

Paul Jainta  
Lutz Andrews

# Mathe ist wirklich noch viel mehr

Aufgaben und Lösungen der Fürther  
Mathematik-Olympiade 1999–2006



Springer Spektrum

Mathe ist wirklich noch viel mehr

Paul Jainta · Lutz Andrews

# Mathe ist wirklich noch viel mehr

Aufgaben und Lösungen der Fürther  
Mathematik-Olympiade 1999–2006

 Springer Spektrum

Paul Jainta  
Vorsitzender des Fördervereins  
Fürther Mathematik Olympiade e. V.  
Schwabach, Bayern, Deutschland

Lutz Andrews  
Röthenbach a. d. Pegnitz  
Bayern  
Deutschland

ISBN 978-3-662-61459-4      ISBN 978-3-662-61460-0 (eBook)  
<https://doi.org/10.1007/978-3-662-61460-0>

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

© Springer-Verlag GmbH Deutschland, ein Teil von Springer Nature 2020

Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung, die nicht ausdrücklich vom Urheberrechtsgesetz zugelassen ist, bedarf der vorherigen Zustimmung des Verlags. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Bearbeitungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von allgemein beschreibenden Bezeichnungen, Marken, Unternehmensnamen etc. in diesem Werk bedeutet nicht, dass diese frei durch jedermann benutzt werden dürfen. Die Berechtigung zur Benutzung unterliegt, auch ohne gesonderten Hinweis hierzu, den Regeln des Markenrechts. Die Rechte des jeweiligen Zeicheninhabers sind zu beachten.

Der Verlag, die Autoren und die Herausgeber gehen davon aus, dass die Angaben und Informationen in diesem Werk zum Zeitpunkt der Veröffentlichung vollständig und korrekt sind. Weder der Verlag, noch die Autoren oder die Herausgeber übernehmen, ausdrücklich oder implizit, Gewähr für den Inhalt des Werkes, etwaige Fehler oder Äußerungen. Der Verlag bleibt im Hinblick auf geografische Zuordnungen und Gebietsbezeichnungen in veröffentlichten Karten und Institutionsadressen neutral.

Planung/Lektorat: Andreas Rüdinger

Springer Spektrum ist ein Imprint der eingetragenen Gesellschaft Springer-Verlag GmbH, DE und ist ein Teil von Springer Nature.

Die Anschrift der Gesellschaft ist: Heidelberger Platz 3, 14197 Berlin, Germany

*„Es ist noch nichts getan, wenn noch etwas  
zu tun übrig bleibt“*

*(Carl Friedrich Gauß, 1777–1855)*

# Vorwort

„Es gibt drei Arten von Menschen: diejenigen, die rechnen können, und solche, die es nicht können.“ Unbekannt

Der aktuelle Band ist der dritte in der Reihe mit Aufgaben und Lösungen der Fürther Mathematik-Olympiade (FüMO). Das Buch umfasst den Zeitraum von 1999 bis 2006 und enthält alle Fragestellungen der 8. bis 14. FüMO.

Mathe in der Schule ist schon schlimm genug und dann noch freiwillig mehr Tüfteln zu Hause und zudem kniffligere Aufgaben? So werden sicher viele Schüler denken, wenn sie von der Fürther Mathematik-Olympiade hören. Mathematik in der Schule – das ist eine nahezu unendliche Geschichte und in der Vergangenheit immer wieder mal durch schlechte Tests deutscher Schüler in die Diskussion geraten. Dabei hat sich gezeigt, dass es oft an Kreativität fehlt, wenn unkonventionelle Aufgaben schwerfallen, während Routineprobleme eher bewältigt werden können. Hier kann die Fürther Mathematik-Olympiade helfen: raus aus eingefahrenen Gleisen, hin zu Selbständigkeit und Einfallsreichtum. Und mit FüMO hört es ja nicht auf: Es folgen der Landeswettbewerb, die deutschlandweite Mathematik-Olympiade und der Bundeswettbewerb Mathematik.

Auch die Unis werden profitieren: Deutschland braucht immer mehr Mathematiker (und Informatiker, Ingenieure etc.). Die Ressourcen sind vorhanden, die Studienbedingungen an den bundesdeutschen Hochschulen sind hervorragend, das Fach Mathematik gewinnt immer mehr an Bedeutung in Industrie und Technologie, es gibt viele Jobs und beste Bezahlung und dennoch nicht genug Studenten.

Viele Mathetalente stehen umgekehrt jedoch vor dem Dilemma, dass Schule sie nicht mehr fordert. „Man bekommt fertige Formeln an die Hand, um Lösungen nach Schema F zu finden. Mathematik beginnt aber (erst) dort, wo es Probleme gibt und die Lösungswege erst gefunden werden müssen“, hört man sie oft klagen.

Das folgende Szenario beschreibt dieses Manko ziemlich genau, und es ist auch nicht selten: Erst in der 8. Klasse, im Idealfall auch früher, hat eine Mathematiklehrkraft zufällig eine Sonderbegabung bei einem ihrer Schützlinge bemerkt. Nachdem sein Ergebnis bei einem Mathematiktest aus dem Rahmen fällt, legt ihm die Lehrkraft die Aufgaben von der Fürther Mathematik-Olympiade oder vom Landeswettbewerb Mathematik vor. „Das solltest du lösen können“, meint

die Lehrerin/der Lehrer. Aus dem Stand holt die/der Jugendliche dann einen Preis. Dann darf sie/er zum FÜMO-Seminar, zum Mathetag an der Universität oder zur Spitzenförderung (JuMa = Jugend trainiert Mathematik) und besteht auch bei (über)regionalen Wettbewerben.

Der englische Franziskanermönch und Naturphilosoph, Roger Bacon (1561–1626), genannt „Doctor mirabilis“, gilt als einer der ersten Verfechter empirischer Methoden. Sein Wort von der „Mathematik als das Tor und der Schlüssel zu den Wissenschaften“ ist in den Aufgeregtheiten der Klimadiskussion wieder ziemlich aktuell. Welchen Weitblick musste doch dieser englische Kirchenmann vor ungefähr 400 Jahren bereits gehabt haben, als er die Mathematik zum Türöffner der Aufklärung beförderte. Die heutigen so genannten MINT-Fächer (MINT = Mathematik, Informatik, Naturwissenschaften und Technik) sind mittlerweile gefragter denn je. In einer Vorankündigung zum MINT-Tag 2011 im Deutschen Museum München hieß es ganz im Sinne des mittelalterlichen Sehers: „Deutschlands wichtigste Ressourcen sind die Talente und der Ideenreichtum seiner Menschen.“

Unser Wohlstand basiert auf MINT. Um auch weiterhin die Innovationsfähigkeit der Bundesrepublik zu sichern und auszubauen, muss der Fachkräftebedarf nachhaltig gesichert sein. Mathematisch begabte Kinder können in der durch Komprimierung des Lernstoffs frei gewordenen Unterrichtszeit von so genannten Enrichment-Angeboten profitieren. Solche Angebote wollen die Inhalte des regulären Mathematikunterrichts vertiefen, ergänzen und bereichern. Eines dieser Enrichment-Programme ist FÜMO. Und es sollte in der Frühzeit des Schulbesuchs stattfinden, also möglichst bereits in der Grundschule.

„[...] Bildung ist der große Motor der persönlichen Entwicklung.“ So spannt Nelson Mandela 1993, nach seiner Nominierung für den Friedensnobelpreis, diesen Gedanken weiter. Was könnte der langjährige Aktivist und Politiker aus der Republik Südafrika damit gemeint haben? Vielleicht hat er dabei auch an die Mathematik gedacht, die ja ein wesentlicher Bestandteil der Bildung ausmacht. Mathematik ist unverzichtbar, um die Ziele der UN für nachhaltige Entwicklung zu erreichen. Einige Beispiele: Modellierung globaler Veränderungen der Welt und deren Konsequenzen für die Artenvielfalt, Optimierungsverfahren und Datenanalysen für eine nachhaltige Ressourcennutzung. Mit Hilfe Künstlicher Intelligenz können auch Daten von Satellitenbildern extrahiert und Karten von Stadt-, Industrie-, Landschafts- und Waldgebieten erstellt werden, von denen es keine traditionellen Daten gibt. Die globale Erwärmung erfordert sehr viel an mathematischer und technischer Expertise, an weiblichen und männlichen Fachleuten. Solche zu finden, dabei wird FÜMO weiter mitwirken. Nie war sie so wertvoll wie heute ...

Vielleicht kennen Sie und Ihre Schüler ja das Dilemma: Sie haben die Antwort zu einem Problem skizziert. Wie fantastisch! Aber man ist noch lange nicht fertig. Denn: Vor die Aufgabe gestellt, wie schreibe ich dies verständlich auf – sei es in einem Artikel für eine Zeitung, in einem Kurzbeitrag für einen Web-Blog oder einfach nur für eine Freundin oder einen Freund –, sollte man die Kunst der klaren

Darstellung beherrschen. Brillante Ideen und kreative Lösungen von Problemen sind mehr oder weniger wertlos, wenn man sie nicht „rüberbringen“ kann.

Genau vor diesen Schwierigkeiten stehen vor allem jüngere Teilnehmer an Mathematikwettbewerben, die vielleicht schon eine schnelle Idee zur Lösung einer Aufgabe haben, aber nicht wissen, wie sie das formulieren sollen. Im Zweifelsfall lassen sie es dann doch bleiben. Das wäre sehr schade!

Mit diesem Problem stehen wir in der Welt der Mathewettbewerbe nicht allein. Aufgabensteller vergleichbarer Wettbewerbe sehen sich mit ähnlichen Fragen konfrontiert. Hinzu kommt noch bei überregionalen Wettbewerben das Handicap unterschiedlicher Startbedingungen. Erfahrene Teilnehmer an Pluskursen in Mathematik oder Förderprogrammen wie JuMa haben eben einen größeren Wissensvorsprung als manches junge, mathematische Greenhorn. Solche Startnachteile lassen sich natürlich nicht immer auf gleiche Eingangsvoraussetzungen glatthobeln. Das wollen wir auch nicht. Aber wir könnten doch für vergleichbarere Startbedingungen sorgen...

... und dabei könnte dieser dritte Band aus der Reihe mit Problemen der Fürther Mathematik-Olympiade gute Dienste leisten. Insbesondere (noch) unerfahrene Wettbewerbsanfänger sollten sich jedenfalls nicht von den vermeintlichen Hürden der gestellten Fragen von vornherein abschrecken lassen. Die Angst wollen wir ihnen mit diesem weiteren Buch nach Möglichkeit nehmen. Es hat sich nämlich regelmäßig in all den Jahren gezeigt, dass die Teilnahme an der Fürther Mathematik-Olympiade ein hervorragendes Trainingsgelände für Erfolge bei anderen Wettbewerben bietet.

„Sag mir, wo die Tüftler sind“, titelte noch *Spiegel online* am 6. Juni 2006, denn Deutschlands Wirtschaft gehen langsam die Ingenieure aus. Aktuell ist die Situation nicht besser. Der Nachwuchs in den technischen Studien- und Ausbildungsrichtungen macht sich immer rarer – und dies trotz bester Berufsaussichten. Umso bedeutender sind Mathematikprojekte, weil die Mathematik die Grundlage unserer gesamten (globalisierten und) technologiebasierten Zivilisation ist. Hier also bietet die Fürther Mathematik-Olympiade den idealen Einstieg.

Dabei gäbe es viel zu tun ..., z. B. in der Organisation unserer Zivilisation durch Optimierung von Transportwegen und Kommunikationsnetzen, für das Verständnis der Ausbreitung von Epidemien und deren Kontrolle, oder es könnten die Bereiche Statistik und Optimierung vermehrt genutzt werden, um Gesundheits-, Wirtschafts- und Sozialsysteme effizienter zu planen und zu verwalten. Schließlich kann Mathematik wirksamer eingesetzt werden, um die Risiken von Naturkatastrophen zu verstehen (Überschwemmungen, Erdbeben, Wirbelstürme) und betroffene Populationen rechtzeitig darauf vorzubereiten.

Mathematik ist überall und in allem, was wir tun, etwa in unseren Vorlieben ...

Sie inspiriert bildende Künstler und Musiker zu Symmetrien, Parkettierungen, Fraktalen, (geometrischen) Kurven, Flächen und Formen, Mustern, Tonleitern und Klängen, hilft bei Strategiespielen von Backgammon oder Schach bis hin zum Entwirren eines Zauberwürfels oder beim Strategiespiel *Awale*, dem afrikanischen Schach. Sehr wichtig ist die Mathematik bei der Erstellung von Finanzplänen und



der Nutzung von Planungen oder Konzepten in Bauunternehmen, in der Landwirtschaft, im Einzelhandel, im Handwerk, im Sport u. v. m.

Diese grundlegende Bedeutung der Mathematik mit ihren unüberschaubaren Anwendungen hat etwa Prof. Dr. Thomas Peternell von der Uni Bayreuth immer wieder bei den Preisverleihungen von FÜMO Oberfranken angesprochen. Anlass waren für ihn nicht zuletzt die schlechten PISA-Ergebnisse im Jahr 2002. Er kritisierte dabei die in der Öffentlichkeit diskutierten Konsequenzen aus der Studie. Prof. Peternell sagte schon damals: „Es wird zu viel über Strukturen geredet und zu wenig über Inhalte.“ Und er ist auch heute immer noch aktuell, wenn er den Rückgang der Geometrie in den bundesweiten Lehrplänen beklagt.

Prof. Peternell begrüßt stattdessen, dass FÜMO Schüler an mathematische Probleme heranführen will, deren Lösung Kreativität und längeres Nachdenken erfordert. Diese Fragestellungen seien nicht wie viele Aufgaben im Unterricht mit bereitgestellten Methoden mechanisch zu lösen. Sein Wunsch: „Vielleicht kann der Wettbewerb FÜMO [...] helfen, mehr Interesse für die Naturwissenschaften zu wecken und überhaupt eine positivere Grundstimmung für das Fach zu erzeugen.“

Problemlösen ist also ein bisschen wie Spurensuche an einem Tatort: Man sammelt die Fakten, zieht Schlussfolgerungen und erhält so Beweise für eine kriminelle Tat. Allerdings sind die Kriterien in der Mathematik meist strenger. Vom Prinzip her gleicht ein mathematischer Beweis einer Spielidee im Schach: Matt in drei Zügen. Es müssen die richtigen Züge gefunden werden, und egal, wie der Gegner zieht, auf alle seine Züge muss ich eine Antwort geben, die zum Matt führt.

Wir bieten Runde für Runde viele Möglichkeiten der Spurensicherung an. Aber nicht nur dort. Am FÜMO-Tag am Department Mathematik der Friedrich-Alexander-Universität Erlangen kann man regelmäßig in Gruppen mathematische Beweisverfahren ausprobieren oder auf Recherche gehen. Die Fälle heißen dann Schloss knacken, Tabu, Escape Room oder einfach Entschlüsseln. Was sollen also Wettbewerbe im Allgemeinen leisten, was wollen wir speziell mit FÜMO erreichen? Die wichtigste Maxime lautet: Begabungen fördern durch die Entwicklung von Wissen und Fähigkeiten sowie Persönlichkeiten schärfen und gleichzeitig an den Schulen den Stellenwert mathematischer Bildung stärken und festigen, die Freude an der Beschäftigung mit Mathematik wecken bzw. vertiefen sowie Lehrkräften mit einem dauerhaften Angebot an „anderen“ Aufgaben konkrete Anregungen für ihre Unterrichtsgestaltung aufzeigen. Ein gemeinsames Merkmal dieser Aktivitäten ist, dass die Teilnehmerinnen und Teilnehmer üblicherweise in zwei Stufen mehr oder weniger anspruchsvolle Knobel- bzw. Problemaufgaben als Hausaufgaben oder in Klausuren (allein) bearbeiten sollen und nach einem einheitlichen Schema bewertet werden. Dies dient dann etwa bei der FÜMO als Kriterium für eine Weiterempfehlung zu überregionalen oder bundesweiten Maßnahmen. Auf der einen Seite sind solche „Wettkämpfe“ auf Grund ihres spielerischen Charakters – zumal in der 5./6. Jahrgangsstufe – unter den Schülerinnen und Schülern sehr beliebt. Durch die Würdigung ihrer erzielten Erfolge durch Urkunden, kleine Sachpreise oder eine Veröffentlichung innerhalb der Schule bzw. in der Lokalpresse besitzen sie für die erfolgreichen Teilnehmerinnen und Teilnehmer auch

einen ideellen Wert. Andererseits dürfe nach einer Untersuchung des Didaktikers Prof. Dr. Friedhelm Käpnick (Westfälische Wilhelms-Universität Münster, 1998) nicht unberücksichtigt bleiben, dass sich Misserfolge in solchen Wettbewerben u. a. auch zum Nachteil auf weitere Aktivitäten des Kindes auswirken können. Hinzu kommt in der Regel ein weiteres Manko bei erstmaliger Teilnahme im frühen Alter, nämlich dass fast ausschließlich die Punktbewertung der Einzelleistungen im Vordergrund steht und (noch) nicht das Eingehen auf die Verwendung individueller Lösungsverfahren und somit allgemein die Entwicklung besonderer mathematischer Fähigkeiten nicht näher beachtet bzw. verstärkt werden. Vordergrundig liegt somit der besondere Schwerpunkt bei Wettbewerben wie FüMO darauf, frühzeitig Talente zu sichten, sie zu fördern und ihnen einen dauerhaften Spaß an außerschulischer Mathematik mitzugeben.

Leider bleibt in den Lehrplänen Mathematik verglichen mit früheren Jahren immer weniger Raum für problemlösendes Denken. In den Schulbüchern finden sich fast ausschließlich Standardaufgaben, die mechanisch zu lösen sind, und kaum sog. offene Fragestellungen. Mathematik ist ja eine Kunst, eine Suche nach kreativen Lösungswegen und nicht das Einhämmern von immer gleichen Lösungstechniken. Gerade für interessierte und begabte Schülerinnen und Schüler eignen sich offene Fragestellungen insbesondere dazu, ihre Kunstfertigkeiten und Talente ausleben zu lassen. Die Tatsache, dass an einer offenen Frage sehr viel breiter und intensiver gearbeitet werden kann, steigert die Motivation, sich in eine Aufgabenstellung zu vertiefen. Solche Fragestellungen sind ein spezifisches Erkennungsmerkmal für FüMO-Aufgaben.

Bei der Fürther Mathematik-Olympiade finden besonders begabte Lernende ein Umfeld, in dem sie sich über dem schulischen Leistungsniveau bewegen können. Daneben bietet der Wettbewerb diesen Schülerinnen und Schülern neben der inhaltlichen Attraktivität auch die Möglichkeit, mit Gleichgesinnten an einem Problem zu arbeiten, und so fördert er Eigenschaften wie Selbständigkeit, Kompetenz im Problemlösen, Sachkompetenz, Sozialkompetenz und die Fähigkeit, mit Stresssituationen umzugehen. Durch die Teilnahme an einem Wettbewerb bzw. einer Olympiade finden begabte Schülerinnen und Schülern allgemein eine Lernumgebung vor, die ihren Fähigkeiten und Anforderungen entspricht und sie herausfordert.

Der Mikrokosmos „FüMO“ behauptet sich weiterhin unangefochten in der Welt der „großen“ Wettbewerbe. Worin liegt nun das besondere Merkmal für seinen Erfolg? Nun, der Wettbewerb entwickelt ein selbstbewusstes Eigenleben mit vielen bunten Einsprengseln und sorgt für ein gleich bleibendes Rauschen im Blätterwald und so manchen Hingucker. Jede Wettbewerbsrunde bringt ständig Neues zum Tüfteln: „Logisches, Geometrisches, Alltägliches, Kombinatorik, Zahlentheorie, Winkel- und Flächenberechnungen [...], mit ausführlichen Lösungen – nach Strategien oder Verfahren geordnet – und alles auf durchaus hohem Niveau: Mathematik-Olympiade eben!“, hieß es in einer früheren Verlagsanzeige. Zu finden sei hier (nahezu) das gesamte Spektrum, „das anspruchsvolle Lernende brauchen [...]“. Sicher eine gute Investition für Schülerbibliotheken,

Pluskurse, Arbeitsgemeinschaften oder eben wissensdurstige Schüler oder Knobelfreunde, die zusätzlich gefordert werden wollen.

Im Internet kursieren inzwischen zahlreiche positive Einschätzungen zu den FüMO- Aufgaben. Ein Mathe-Tiger schreibt etwa: „Auf [...] Seiten erwartet den interessierten Mathe-Fan [...] ein Buch voller packender Knobeleyen, Spitzfindigkeiten oder scheinbar unlösbarer Rätsel.“ Schnell schaffe es das FüMO-Team nicht nur, „den Leser mit klassischen Alltagsproblemen zu fesseln [...] sondern auch mit solcher Art von Aufgaben eine knisternde Mathe-Erotik (!) zu versprühen“. Zum Glück fällt diese Art von Sinnesfreude nicht unter das Thema „Kinderschutz.“ Ganz im Gegenteil: Es sollen gerade die Jüngeren von den Schönheiten der Mathematik angelockt und verführt werden.

Auch dieser Band beinhaltet eine Fülle von Leckerbissen aus dem reichhaltigen Büfett der Mathematik: Gelee-Eier, Fallobst, Marmelade oder Schnapszahlen. Gefeierte wird bei Dr. Eiecks Denkliegeparty, mit dem Herr(n) der Ringe oder dem, „der mit der Zahl tanzt“, mit einem Mathefloh und mit Perlenhaarbändern bei Ferien in Geraden u.v.m. Für jeden ist etwas dabei von jung bis „Wie ALT ist das Dreieck?“ Es ist also angerichtet...

Über die im Buch dargebotene Schönheit von Mathematik lässt sich vielleicht streiten, aber möglicherweise ist es die Einstellung, die einen blockiert. „Mathematik ist oft wie Bergsteigen: Man muss sich manchmal etwas quälen, bis der Gipfel erreicht ist, aber das Gefühl etwas geschafft zu haben, ist herrlich.“ Der herrliche Ausblick auf (mathematische) Erhebungen und der Blick in tiefe Täler lässt alle Beschwerden vergessen.

Schwabach  
28. Februar 2020

Paul Jainta StD i. R.  
Vorsitzender des Vereins FüMO e. V.  
Lutz Andrews  
Mitglied des Vorstandes des Vereins FüMO e. V.

# Danksagung

„Gedenke der Quelle, wenn du trinkst.“ Volksweisheit

Den beiden Gründern der Fürther Mathematik Olympiade (FüMO), Paul Jainta und Rudolf Großmann, damalige Mathematiklehrkräfte am Gymnasium Stein bei Nürnberg, gebührt ein großer Dank für den Aufbau des Wettbewerbs in der schwierigen Anfangszeit. Fast von Anbeginn begleiten Dr. Eike Rinsdorf (Dietrich- Bonhoeffer-Gymnasium Oberasbach) und Alfred Faulhaber (Sigmund-Schuckert- Gymnasium Nürnberg-Eibach) den Wettbewerb als Organisatoren vor Ort, Ideengeber und Aufgabenausdenker. Sie haben FüMO tatkräftig unterstützt und besitzen einen großen Anteil daran, dass der Wettbewerb eine weite Verbreitung gefunden hat. Ein zusätzlicher Dank gilt den Organisatoren Bertram Hell (Leibniz- Gymnasium Altdorf) und Christine Streib (Johann-Schöner-Gymnasium Karlstadt), sowie Gudrun Tisch (damals Aschaffenburg) und Andrea Stamm (Würzburg), die in den Folgejahren zum FüMO-Team gestoßen sind.

Die vorliegenden Aufgaben und Lösungen (und auch die aus dem Band *Mathe ist noch viel mehr*) wurden von diesen engagierten Lehrern aus Mittel- und Unterfranken in der Vergangenheit erstellt und ausgearbeitet. Besonders zu erwähnen ist auch das Engagement von Vera Krug und Lutz Andrews, beide Eltern von früheren Teilnehmern, die sich später in die Teamarbeit eingeklinkt haben. Ein besonderer Dank gehört zusätzlich Alfred Faulhaber, der den Verein FüMO e. V. viele Jahre als stellvertr. Vereinsvorstand mitgeführt hat, sowie Rudolf Grossmann, der in der gesamten Zeit für die Homepage des Wettbewerbs zuständig war.

Wir danken zudem dem damaligen Schulleiter am Gymnasium Stein, OStD Kurt Dänzer, der die beiden Wettbewerbsgründer tatkräftig dabei unterstützt hat, die Fürther Mathematik-Olympiade an den fünf Nachbargymnasien in der Stadt bzw. im Landkreis Fürth einzuführen.

In diesen Dank einschließen wollen wir auch die Schulleitungen aller teilnehmenden Realschulen und Gymnasien, sowie die Regionalleiterinnen und Regionalleiter und Lehrkräfte an den Schulen, die uns in der schwierigen Startphase und während des langjährigen Bestehens des Wettbewerbs unterstützt und begleitet haben sowie alle ehrenamtlichen Korrektorinnen und Korrektoren.

Ein ganz besonderes Dankeschön gehört natürlich allen Teilnehmern an dieser Urform des Wettbewerbs, die sich an eine wohl für sie gänzlich neue Herausforderung gewagt haben, sowie ihren anspruchsvollen Eltern.

Der Wettbewerb ist von Beginn an unter einer besonderen Schirmherrschaft gestanden. Als Schirmherrin der Fürther Mathematik-Olympiade konnte die frühere Fürther Landrätin Dr. Gabriele Pauli gewonnen werden. Mit ihrer Persönlichkeit, ihrem guten Namen und ihrer öffentlichen Stellungnahme hat sie nach außen das außergewöhnliche Engagement der Organisatoren des Wettbewerbs deutlich wahrnehmbar werden lassen. Wir danken ihr sehr für diesen bemerkenswerten Einsatz.

Das Unternehmen FÜMO wäre ohne die jahrelange Unterstützung durch Sponsoren nicht möglich geworden. Stellvertretend möchten wir hier den Hauptsponsor seit dem Jahr 2000 nennen, die Hermann Gutmann Stiftung Nürnberg. Der damalige Vorstandsvorsitzende der Stiftung, Herr Diplom-Kaufmann Dr. h.c. Hans Novotny, hatte einen entscheidenden Anteil an der Gründung des Fördervereins Fürther Mathematik-Olympiade e. V. im November 2000 und damit am Aufstieg des Wettbewerbs in die Bundesliga der mathematischen Begabtenförderung.

Die Stiftung hat nun bald 20 Jahre den Wettbewerb überaus großzügig unterstützt. Seine Tochter und Nachfolgerin, Frau Angela Novotny, hat diese umfangreiche finanzielle Förderung fortgeführt. Wir bedanken uns herzlich auch für ihr Engagement am Wettbewerb. Seit es den Verein gibt, sind die Teilnehmerzahlen sprunghaft gestiegen und haben die 2000er Marke weit überschritten. Ohne diese überaus noble Unterstützung unserer Maßnahmen seitens der Stiftung hätten wir alle weiteren Maßnahmen nicht stemmen können: FÜMO-Tag an der Universität Erlangen-Nürnberg, Mathetag an der Universität Würzburg, Mathetage an den Unis Bayreuth und Passau, an den Fachhochschulen Regensburg und Aschaffenburg, Zusammenarbeit mit der Uni Augsburg (z. B. Vorträge), ein früherer Schülerzirkel an der Uni Erlangen, Professoren als Referenten anlässlich von Preisverleihungen, die Betreuung der Filialen in den Regierungsbezirken u. v. m.

Schließlich danken wir Herrn Dr. Andreas Rüdinger und Frau Bianca Alton vom Springer-Verlag für die nachhaltige und freundliche Begleitung dieses Buchprojekts und dessen Aufnahme in das SpringerSpektrum-Programm. Ein besonderer Dank gehört dabei auch Lutz Andrews, der alle Texte, Tabellen, Verzeichnisse und Grafiken in L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X gesetzt hat.

Paul Jainta

# Inhaltsverzeichnis

## Teil I Aufgaben der 5. und 6. Jahrgangsstufe

<b>1</b>	<b>Zahlenquadrate und Verwandte</b> .....	3
1.1	Papierstreifen .....	3
1.2	Zahlenpyramide .....	3
1.3	Minisudoku .....	4
<b>2</b>	<b>Alles mit und um Zahlen</b> .....	5
2.1	Iris und ihre Zahlen .....	5
2.2	Die besondere Zahl von Max .....	5
2.3	Alles quer .....	5
2.4	Primfaktorzerlegung .....	6
2.5	$qn$ -Zahl .....	6
2.6	Brüchig .....	6
2.7	Ausradierte Division .....	6
2.8	Addieren oder Subtrahieren .....	7
2.9	Milleniumsrechenmaschine .....	7
2.10	Welche Zahlen? .....	8
2.11	Der Trick von Carl Friedrich Gauß .....	8
2.12	Zahlen stehen Kopf .....	8
2.13	Summe und Differenz .....	9
2.14	Das Palindrom .....	9
2.15	Zahlenbestimmung .....	9
2.16	Eins Zwei Eins .....	10
2.17	Die Fünfoianer .....	10
2.18	Jahreszahlen konstruieren .....	10
2.19	Multiplikationstick .....	11
2.20	Divisionsreste .....	11
2.21	2 004 und gerade Zahlen .....	11
2.22	Chris und sein Problem .....	12
2.23	Schnapszahlen .....	12
2.24	Riesenzahl .....	12
2.25	Quadratschlange .....	12

2.26	Die magische 1 . . . . .	13
2.27	Eine Teilungsgeschichte . . . . .	13
2.28	Zahlenumwandlung . . . . .	13
2.29	Zahlensuche . . . . .	14
2.30	Gebundene Zahlen . . . . .	14
<b>3</b>	<b>Kombinieren und geschicktes Zählen . . . . .</b>	<b>15</b>
3.1	In der Sportstunde . . . . .	15
3.2	Schlüsselsalat . . . . .	15
3.3	Herr der Ringe . . . . .	16
3.4	Jubiläum . . . . .	16
3.5	Schlangenfamilie . . . . .	17
3.6	Orthogo . . . . .	17
3.7	Nummerieren von Brüchen . . . . .	18
3.8	Gummibärchen . . . . .	18
3.9	Fallobst . . . . .	18
3.10	Die Wege des Königs . . . . .	19
3.11	Dreieckelei . . . . .	19
<b>4</b>	<b>Was zum Tüfteln . . . . .</b>	<b>21</b>
4.1	16 Schafe . . . . .	21
4.2	Dreh dich Würfel . . . . .	21
4.3	Glasmurmeln . . . . .	22
4.4	Palindrome der Digitaluhr . . . . .	22
4.5	Der Bücherwurm . . . . .	23
4.6	Zahlensymmetrie . . . . .	23
4.7	Buchstaben und Zahlen . . . . .	23
4.8	Mühlesteinschieben . . . . .	24
4.9	Murmelsalat . . . . .	24
4.10	Leichte und schwere Kugeln . . . . .	25
4.11	Obstsalat . . . . .	25
4.12	Schachbrett – mal anders betrachtet . . . . .	25
4.13	Der Recyclingkalender . . . . .	26
4.14	Der fünfte Advent . . . . .	26
4.15	Sonntagskinder . . . . .	27
<b>5</b>	<b>Logisches und Spiele . . . . .</b>	<b>29</b>
5.1	Die Lügeninsel . . . . .	29
5.2	Familie Kreis . . . . .	29
5.3	Quadrathopserei . . . . .	30
5.4	Der mit der Zahl tanzt . . . . .	30
5.5	Schiffe versenken . . . . .	31
<b>6</b>	<b>Geometrisches . . . . .</b>	<b>33</b>
6.1	Sechsecke zerlegen . . . . .	33
6.2	Supernette Zahlen . . . . .	33
6.3	Briefmarken . . . . .	34

<b>7</b>	<b>Alltägliches</b> . . . . .	35
7.1	Zugverspätung . . . . .	35
7.2	Gelee-Eier . . . . .	35
7.3	In der Wüste . . . . .	35
7.4	Bürgermeisterwahl . . . . .	36
7.5	Das Testament . . . . .	36
7.6	System der ISBN-Zahlen . . . . .	37
7.7	Handballturnier . . . . .	37
7.8	Der leichteste Elefant . . . . .	37
7.9	Telefonkette . . . . .	38
7.10	Gratisschokolade . . . . .	38
7.11	Pünktlich am Bahnsteig . . . . .	38
7.12	Apfelsaft . . . . .	39
7.13	Güterzug . . . . .	39
7.14	Schlaue Schüler . . . . .	39
7.15	Das Erbe . . . . .	39
7.16	Die Schule ist aus . . . . .	40

## Teil II Aufgaben der 7. und 8. Jahrgangsstufe

<b>8</b>	<b>Der Jahreszahl verbunden</b> . . . . .	43
8.1	2 001 Fakultät . . . . .	43
8.2	2 001 und 2 002 . . . . .	43
8.3	Dritte Quersumme . . . . .	43
8.4	Antiprimzahlbeweis . . . . .	44
8.5	Gleiche Brüche . . . . .	44
8.6	Zahlenstreichen . . . . .	44
8.7	Fast zehn Millionen . . . . .	45
8.8	Teilen mit Rest (1) . . . . .	45
8.9	Acht in 2 006 . . . . .	45
<b>9</b>	<b>Geschicktes Zählen</b> . . . . .	47
9.1	Perlenhaarbänder . . . . .	47
9.2	Dr. Eiecks Denkliegeparty . . . . .	47
9.3	Schachclub . . . . .	48
9.4	Summe 105 . . . . .	48
9.5	Ferien in Geraden . . . . .	48
<b>10</b>	<b>Zahlentheorie</b> . . . . .	49
10.1	Zahlenanzahl . . . . .	49
10.2	Teilen mit Rest (2) . . . . .	49
10.3	Besondere Quadratzahlen . . . . .	49
10.4	Zentel und Elftel . . . . .	49
10.5	Primzahlzwillinge . . . . .	50
10.6	Quersummen . . . . .	50
10.7	Fünf Quadrate . . . . .	50
10.8	Beweis durch Binomi . . . . .	51



10.9	<i>ABBA</i> .....	51
10.10	Endziffer .....	51
10.11	Zahlendrachen .....	51
10.12	Größter gemeinsamer Teiler .....	52
10.13	Gleichungen mit Lücken .....	52
10.14	Pauls Quersumme .....	52
<b>11</b>	<b>Winkel, Seiten und Flächen</b> .....	<b>53</b>
11.1	Winkelhalbierende .....	53
11.2	Zirkus .....	53
11.3	Winkelberechnung .....	53
11.4	Lena und Kurt .....	54
11.5	Gleichschenkligkeit im Doppelkreis .....	55
11.6	Parallel? .....	55
11.7	Winkel im Dreieck .....	56
11.8	Origami .....	56
11.9	Winkelzusammenhang .....	57
11.10	Schnittwinkel im 15-Eck .....	57
11.11	Berührungspunkte .....	57
11.12	Verschiedene Dreiecke .....	58
11.13	Zwölfzack .....	58
11.14	Rechteck = Quadrat? .....	58
11.15	Teilung eines Dreiecks .....	58
11.16	Achteck ohne Grenzen .....	59
11.17	Wie <i>ALT</i> ist das Dreieck? .....	60
11.18	Achteck im Quadrat .....	60
<b>12</b>	<b>Geometrische Algebra</b> .....	<b>61</b>
12.1	Diagonale mit Eckpunkten .....	61
12.2	Monsterwürfel .....	61
12.3	Der Mathefloh .....	61
12.4	Der Quadratschneider .....	62
12.5	Peters Karton .....	62
12.6	Eine Menge Gitterpunkte .....	62
<b>13</b>	<b>Besondere Zahlen</b> .....	<b>65</b>
13.1	Palindrom .....	65
13.2	2000 Nullen .....	65
13.3	Drei in Eins .....	65
13.4	$67^2$ im Kopf? .....	66
<b>14</b>	<b>Noch mehr zum Tüfteln</b> .....	<b>67</b>
14.1	Gefleckte Quadrate .....	67
14.2	Zehn Jahre FüMO .....	67
14.3	Symmetrische Legemuster .....	68
14.4	Mobile .....	68
14.5	Kalenderblatt .....	69

14.6	Olympische Ringe .....	69
14.7	Teilerglücksrad .....	70
14.8	Rudi rät. ....	70
<b>15</b>	<b>Probleme des Alltags</b> .....	<b>73</b>
15.1	Begegnung .....	73
15.2	Zwetschgen, Zwetschgen, Zwetschgen .....	73
15.3	Bewässerung .....	74
15.4	Inflation in FÜMO-Land .....	74
15.5	Umschütten .....	74
15.6	Aus Trauben werden Rosinen .....	75
15.7	Klassenwechsel .....	75
15.8	Das Tulpenfeld .....	75
15.9	Zenzi und Anton .....	76
15.10	Handballturnier .....	76
<b>16</b>	<b>... mal was ganz anderes</b> .....	<b>77</b>
16.1	Schnecken tempo .....	77
16.2	Fuchsjagd .....	77
16.3	Kreuzzahlrätsel .....	78
16.4	Kugelziehung .....	78
<b>Teil III Lösungen</b>		
<b>17</b>	<b>Zahlenquadrate und Verwandte</b> .....	<b>81</b>
17.1	L-1.1 Papierstreifen (050912) .....	81
17.2	L-1.2 Zahlenpyramide (051011) .....	82
17.3	L-1.3 Minisudoku (051411) .....	83
<b>18</b>	<b>Alles mit und um Zahlen</b> .....	<b>85</b>
18.1	L-2.1 Iris und ihre Zahlen (050812) .....	85
18.2	L-2.2 Die besondere Zahl von Max (050813) .....	85
18.3	L-2.3 Alles quer (060813) .....	86
18.4	L-2.4 Primfaktorzerlegung (050821) .....	86
18.5	L-2.5 $qn$ -Zahl (050822) .....	86
18.6	L-2.6 Brüchig (060822) .....	87
18.7	L-2.7 Ausradierte Division (060912) .....	87
18.8	L-2.8 Addieren oder Subtrahieren (060913) .....	88
18.9	L-2.9 Milleniumsrechenmaschine (050921) .....	88
18.10	L-2.10 Welche Zahlen? (050922) .....	88
18.11	L-2.11 Der Trick von Carl Friedrich Gauß (050923) .....	89
18.12	L-2.12 Zahlen stehen Kopf (051012) .....	90
18.13	L-2.13 Summe und Differenz (051021) .....	90
18.14	L-2.14 Das Palindrom (051022) .....	91
18.15	L-2.15 Zahlenbestimmung (051023) .....	91
18.16	L-2.16 Eins Zwei Eins (051112) .....	92
18.17	L-2.17 Die Fümüoianer (061112) .....	92

18.18	L-2.18 Jahreszahlen konstruieren (051121) . . . . .	93
18.19	L-2.19 Multiplikationstrecke (051123) . . . . .	93
18.20	L-2.20 Divisionsreste (051222) . . . . .	93
18.21	L-2.21 2004 und gerade Zahlen . . . . .	94
18.22	L-2.22 Chris und sein Problem (061313) . . . . .	94
18.23	L-2.23 Schnapszahlen (051322) . . . . .	95
18.24	L-2.24 Riesenzahl (051323) . . . . .	95
18.25	L-2.25 Quadratschlange (051412) . . . . .	96
18.26	L-2.26 Die magische 1 (051413) . . . . .	96
18.27	L-2.27 Eine Teilungsgeschichte (061413) . . . . .	97
18.28	L-2.28 Zahlenumwandlung (051422) . . . . .	97
18.29	L-2.29 Zahlensuche (051423) . . . . .	97
18.30	L-2.30 Gebundene Zahlen (061422) . . . . .	98
<b>19</b>	<b>Kombinieren und geschicktes Zählen . . . . .</b>	<b>99</b>
19.1	L-3.1 In der Sportstunde (060821) . . . . .	99
19.2	L-3.2 Schlüsselsalat (061011) . . . . .	99
19.3	L-3.3 Herr der Ringe (061021) . . . . .	100
19.4	L-3.4 Jubiläum (061111) . . . . .	100
19.5	L-3.5 Schlangenfamilie (051212) . . . . .	101
19.6	L-3.6 Orthogo (061212) . . . . .	101
19.7	L-3.7 Nummerieren von Brüchen (061213) . . . . .	102
19.8	L-3.8 Gummibärchen (061222) . . . . .	102
19.9	L-3.9 Fallobst (051321) . . . . .	103
19.10	L-3.10 Die Wege des Königs (061411) . . . . .	103
19.11	L-3.11 Dreieckelei (051421) . . . . .	104
<b>20</b>	<b>Was zum Tüfteln . . . . .</b>	<b>107</b>
20.1	L-4.1 16 Schafe (050811) . . . . .	107
20.2	L-4.2 Dreh dich Würfel (050823) . . . . .	108
20.3	L-4.3 Glasmurmeln (050911) . . . . .	108
20.4	L-4.4 Palindrome der Digitaluhr (060922) . . . . .	108
20.5	L-4.5 Der Bücherwurm (061022) . . . . .	109
20.6	L-4.6 Zahlensymmetrie (061023) . . . . .	109
20.7	L-4.7 Buchstaben und Zahlen (051111) . . . . .	109
20.8	L-4.8 Mühlesteinschieben (051113) . . . . .	110
20.9	L-4.9 Murmelsalat (061122) . . . . .	110
20.10	L-4.10 Leichte und schwere Kugeln (051213) . . . . .	111
20.11	L-4.11 Obstsalat (051312) . . . . .	112
20.12	L-4.12 Schachbrett – mal anders betrachtet (061311) . . . . .	112
20.13	L-4.13 Der Recyclingkalender (061322) . . . . .	113
20.14	L-4.14 Der fünfte Advent (061412) . . . . .	113
20.15	L-4.15 Sonntagskinder (061421) . . . . .	114

<b>21</b>	<b>Logisches und Spiele</b> . . . . .	115
21.1	L-5.1 Die Lügeninsel (060811) . . . . .	115
21.2	L-5.2 Familie Kreis (060921) . . . . .	115
21.3	L-5.3 Quadrathopserei (051013) . . . . .	116
21.4	L-5.4 Der mit der Zahl tanzt (061221) . . . . .	116
21.5	L-5.5 Schiffe versenken (051311) . . . . .	117
<b>22</b>	<b>Geometrisches</b> . . . . .	119
22.1	L-6.1 Sechsecke zerlegen (050913) . . . . .	119
22.2	L-6.2 Supernetze Zahlen (051122) . . . . .	119
22.3	L-6.3 Briefmarken (061312) . . . . .	120
<b>23</b>	<b>Alltägliches</b> . . . . .	121
23.1	L-7.1 Zugverspätung (060812) . . . . .	121
23.2	L-7.2 Gelee-Eier (060823) . . . . .	121
23.3	L-7.3 In der Wüste (060911) . . . . .	122
23.4	L-7.4 Bürgermeisterwahl (060923) . . . . .	122
23.5	L-7.5 Das Testament (061012) . . . . .	123
23.6	L-7.6 System der ISBN-Zahlen (061013) . . . . .	123
23.7	L-7.7 Handballturnier (061113) . . . . .	124
23.8	L-7.8 Der leichteste Elefant (061121) . . . . .	124
23.9	L-7.9 Telefonkette (061123) . . . . .	125
23.10	L-7.10 Gratischokolade (051211) . . . . .	126
23.11	L-7.11 Pünktlich am Bahnsteig (061211) . . . . .	126
23.12	L-7.12 Apfelsaft (051221) . . . . .	126
23.13	L-7.13 Güterzug (061223) . . . . .	127
23.14	L-7.14 Schlaue Schüler (061321) . . . . .	127
23.15	L-7.15 Das Erbe (061323) . . . . .	127
23.16	L-7.16 Die Schule ist aus (061423) . . . . .	128
<b>24</b>	<b>Der Jahreszahl verbunden</b> . . . . .	129
24.1	L-8.1 2 001 Fakultät (071013) . . . . .	129
24.2	L-8.2 2 001 und 2 002 (071023) . . . . .	129
24.3	L-8.3 Dritte Quersumme (081113) . . . . .	130
24.4	L-8.4 Antiprimzahlbeweis (071123) . . . . .	130
24.5	L-8.5 Gleiche Brüche (071312) . . . . .	131
24.6	L-8.6 Zahlenstreichen (071411) . . . . .	131
24.7	L-8.7 Fast zehn Millionen (071412) . . . . .	132
24.8	L-8.8 Teilen mit Rest (1) (071421) . . . . .	132
24.9	L-8.9 Acht in 2 006 (081421) . . . . .	132
<b>25</b>	<b>Geschicktes Zählen</b> . . . . .	135
25.1	L-9.1 Perlenhaarbänder (081123) . . . . .	135
25.2	L-9.2 Dr. Eiecks Denkliegeparty (081213) . . . . .	136
25.3	L-9.3 Schachclub (071222) . . . . .	136
25.4	L-9.4 Summe 105 (081411) . . . . .	137
25.5	L-9.5 Ferien in Geradien (81422) . . . . .	137