

Studien zur theoretischen und empirischen
Forschung in der Mathematikdidaktik

RESEARCH

Anna-Katharina Roos

Mathematisches Begriffsverständnis im Übergang Schule—Universität

Verständnisschwierigkeiten von
Mathematik an der Hochschule am
Beispiel des Extrempunktbegriffs

EXTRAS ONLINE



Springer Spektrum

Studien zur theoretischen und empirischen Forschung in der Mathematikdidaktik

Reihe herausgegeben von

Gilbert Greefrath, Münster, Deutschland

Stanislaw Schukajlow, Münster, Deutschland

Hans-Stefan Siller, Würzburg, Deutschland

In der Reihe werden theoretische und empirische Arbeiten zu aktuellen didaktischen Ansätzen zum Lehren und Lernen von Mathematik – von der vorschulischen Bildung bis zur Hochschule – publiziert. Dabei kann eine Vernetzung innerhalb der Mathematikdidaktik sowie mit den Bezugsdisziplinen einschließlich der Bildungsforschung durch eine integrative Forschungsmethodik zum Ausdruck gebracht werden. Die Reihe leistet so einen Beitrag zur theoretischen, strukturellen und empirischen Fundierung der Mathematikdidaktik im Zusammenhang mit der Qualifizierung von wissenschaftlichem Nachwuchs.

Weitere Bände in der Reihe <http://www.springer.com/series/15969>

Anna-Katharina Roos

Mathematisches Begriffsverständnis im Übergang Schule–Universität

Verständnisschwierigkeiten von
Mathematik an der Hochschule am
Beispiel des Extrempunktbegriffs

Mit einem Geleitwort von Prof. Dr. Hans-Georg Weigand



Springer Spektrum

Anna-Katharina Roos
Didaktik der Mathematik (Lehrstuhl V)
Universität Würzburg
Würzburg, Deutschland

Dissertation Julius-Maximilians-Universität Würzburg, Fakultät für Mathematik und Informatik, 2019

Erstgutachter: Prof. Dr. Hans-Georg Weigand
Zweitgutachter: Prof. Dr. Volker Ulm
Tag der Disputation: 15.10.2019

ISSN 2523-8604 ISSN 2523-8612 (electronic)
Studien zur theoretischen und empirischen Forschung in der Mathematikdidaktik
ISBN 978-3-658-29523-3 ISBN 978-3-658-29524-0 (eBook)
<http://doi.org/10.1007/978-3-658-29524-0>

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

© Der/die Herausgeber bzw. der/die Autor(en), exklusiv lizenziert durch Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH, ein Teil von Springer Nature 2020

Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung, die nicht ausdrücklich vom Urheberrechtsgesetz zugelassen ist, bedarf der vorherigen Zustimmung des Verlags. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Bearbeitungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von allgemein beschreibenden Bezeichnungen, Marken, Unternehmensnamen etc. in diesem Werk bedeutet nicht, dass diese frei durch jedermann benutzt werden dürfen. Die Berechtigung zur Benutzung unterliegt, auch ohne gesonderten Hinweis hierzu, den Regeln des Markenrechts. Die Rechte des jeweiligen Zeicheninhabers sind zu beachten.

Der Verlag, die Autoren und die Herausgeber gehen davon aus, dass die Angaben und Informationen in diesem Werk zum Zeitpunkt der Veröffentlichung vollständig und korrekt sind. Weder der Verlag, noch die Autoren oder die Herausgeber übernehmen, ausdrücklich oder implizit, Gewähr für den Inhalt des Werkes, etwaige Fehler oder Äußerungen. Der Verlag bleibt im Hinblick auf geografische Zuordnungen und Gebietsbezeichnungen in veröffentlichten Karten und Institutionsadressen neutral.

Springer Spektrum ist ein Imprint der eingetragenen Gesellschaft Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH und ist ein Teil von Springer Nature.

Die Anschrift der Gesellschaft ist: Abraham-Lincoln-Str. 46, 65189 Wiesbaden, Germany

Geleitwort

Der Übergang von der Schule zur Hochschule stellt insbesondere für das Studium der Mathematik ein zentrales Problemfeld sowohl unter fachmathematischen als auch fachdidaktischen Gesichtspunkten dar. Bereits 1924 beklagte Felix Klein in seiner mittlerweile viel zitierten „Doppelten Diskontinuität“, dass sich „der junge Student ... am Beginn seines Studiums vor Probleme gestellt [sieht], die ihn in keinem Punkte mehr an die Dinge erinnern, mit denen er sich auf der Schule beschäftigt hat“. Das Problem ist sicherlich heute noch immer vorhanden. In jüngster Zeit sind viele Initiativen und Projekte gestartet und entsprechende „Brückenkurse“ entwickelt worden, die diesen Übergang unter verschiedenen Gesichtspunkten untersuchen und Hilfen anbieten (etwa Bausch u. a. 2014, Roth u. a. 2015). Die Arbeit von Anna-Katharina Roos ist in dieses Umfeld einzuordnen. Sie untersucht die Schwierigkeiten von Studierenden am Übergang von der Schulanalysis zur Hochschulanalysis (Analysis I). Im Mittelpunkt der Arbeit steht der Begriff des Extremwerts oder Extrempunktes reeller Funktionen. Dies ist ein zentraler Begriff für viele mathematische Gebiete, insbesondere bei Anwendungen (Extremwert- oder Optimierungsprobleme), er ist in ein Netz von weiteren zentralen Begriffen eingebunden (Monotonie, Stetigkeit, Differenzierbarkeit), und es ist ein Begriff, der sowohl im Analysisunterricht der Schule als auch in der Analysisvorlesung der Hochschule eine bedeutende Rolle spielt.

Der didaktische Hintergrund der Arbeit ist im theoretischen Konstrukt der *Grundvorstellungen* zu sehen, das gerade in jüngster Zeit im Rahmen der Analysis theoretisch präzisiert wurde (Greefrath u.a. 2016). Dieses wird zum einen in Bezug zu dem in der internationalen Didaktik etablierten Begriffspaar *Concept Image/Concept Definition* und den damit verbundenen *Prototypen* in Beziehung gesetzt. Damit können Schwierigkeiten und Fehlvorstellungen bei Studienanfängern im Rahmen der Entwicklung des Verständnisses des Extremwertbegriffs aufgezeigt, auf der Grundlage der theoretischen Basis deren Ursachen ergründet und schließlich Vorschläge für Schule und Universität zum Überkommen dieser Schwierigkeiten unterbreitet werden. Grundvorstellungen sind dabei in der normativen, Concept Images in der deskriptiven Ebene angesiedelt. Zum anderen wird auf die *Conceptual Change Theorie* eingegangen, die eine alternative Sichtweise auf (Fehl-)Vorstellungen und Vorstellungswech-

sel bietet. Damit sind die für diese Arbeit wichtigen grundlegenden Theorien zur Begriffsentwicklung gelegt. Die Forschungsfragen ergeben sich dann gut begründet aus den bisherigen theoretischen Überlegungen und empirischen Erfahrungen.

Die Überlegungen von Anna-Katharina Roos stellen insofern Neuland in der didaktischen Forschung dar, als sie das vor allem im Rahmen der Schulmathematik entwickelte Grundvorstellungskonzept auf die Hochschulmathematik übertragen und dadurch die Weiterentwicklung der Begriffsvorstellungen beim Übergang von Schule zur Hochschule aufzeigen. Dabei erweist sich der von der Autorin eingeführte – neue – Begriff der „partiellen Grundvorstellung“ vor allem im Hinblick auf unterschiedliche Sichtweisen von Begriffen in Schule und Hochschule als äußerst hilfreich.

Die Ergebnisse der empirischen Untersuchung geben einen guten Einblick in und Überblick über die Probleme und Schwierigkeiten der Studierenden mit dem Extremwertbegriff. Dabei werden insbesondere die Unzulänglichkeiten und Grenzen der in der Schule erworbenen Begriffsvorstellungen deutlich. Die aufgestellten Fehlerkategorien sind dann der Schlüssel zum Aufzeigen von Ursachen dieser Schwierigkeiten. Die ausgewählten Beispiele zeigen vor allem die Komplexität, die mit einer vermeintlich einfachen Begriffsbildung wie der des Extrempunkts verbunden ist. Es werden hier die Probleme der Studierenden deutlich, die sich auf die Vielfalt des Begriffsnetzes, die verschiedenen Prototypen und die logische Struktur mathematischer Sätze zurückführen lassen.

Die in der empirischen Studie gefundenen Schwierigkeiten der Studierenden werden dann – orientiert an der Conceptual Change Theorie – einerseits auf Alltagserfahrungen und andererseits auf Schulerfahrungen zurückgeführt. Während Alltagserfahrungen äußerst vielfältig sein können (Sport, Werbung), kann bei den Schulerfahrungen auf die Darstellung in Schulbüchern zurückgegriffen werden. Es werden vier in Bayern zugelassene Schulbücher im Hinblick auf Definition und Behandlung von Extremwerten analysiert. Die Autorin stellt überzeugend dar, wie die Ergebnisse der empirischen Untersuchung eine Rückführung auf die in der Schule vorhandenen lediglich partiellen Grundvorstellungen erlauben. Äußerst interessant ist auch die von der Autorin als ‚Nebenuntersuchung‘ bezeichnete Fallanalyse, die zeigt, wie bei Studierenden am Ende ihres Studiums der Einfluss der Schulmathematik immer noch eine überraschend dominante Rolle spielt. Dies ist eine Erkenntnis, die nach Gegenmaßnahmen in der Hochschulmathematik ruft!

Der Arbeit von Anna-Katharina Roos kann Nachhaltigkeit in verschiedene Richtungen vorausgesagt werden, wobei die Ergebnisse dieser Arbeit weit über den Extremwertbegriff hinausweisen. Auf der theoretischen Forschungsebene

hat sich die Kombination aus Grundvorstellungskonzept und Concept Image/ Concept Definition-Theorie bewährt und kann richtungsweisend für zukünftige Ansätze bzgl. eines Begriffsverständnis sein. Mit Hilfe der Conceptual Change Theorie kann dann auch die zeitliche Entwicklung und notwendige Veränderung von Grundvorstellungen erklärt werden. Auch sollten die Folgerungen für die Schul- und Universitätsmathematik im Hinblick auf Inhalt, Umfang und Tiefe von Begriffsentwicklungen konstruktiv aufgegriffen werden.

Schließlich lässt sich der hier entwickelte Ansatz in vielfältiger Weise weiterverfolgen. Insbesondere wird hier eine Basis für eine größere quantitative Untersuchung zu Grundvorstellungen und einem entsprechenden Begriffsverständnis gelegt.



Prof. Dr. Hans-Georg Weigand

Literatur:

- Bausch, I., Biehler, R., Bruder, R., Fischer, P.R., Hochmuth, R., Koepf, W., Schreiber, S., Wassong, Th. (Hrsg.) (2014). *Mathematische Vor- und Brückenkurse*. Wiesbaden: Springer Spektrum
- Greefrath, G., Oldenburg, R., Siller, H.-S., Ulm, V., Weigand, H.-G. (2016). *Didaktik der Analysis*. Berlin: Springer.
- Klein, F.: *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus*. Bd. 1, Berlin, Göttingen u. Heidelberg, 1924.
- Roth, J., Bauer, T., Koch, H., Prediger, S. (Hrsg.) (2015). *Übergänge konstruktiv gestalten*. Wiesbaden: Springer.

Danksagung

Bei der Entstehung und Durchführung meines Forschungsprojekts hat mich eine Reihe an Personen unterstützt und motiviert. Bei ihnen möchte ich mich an dieser Stelle herzlich bedanken.

Ganz besonders danken möchte ich meinen beiden Betreuern Prof. Dr. Jürgen Appell und Prof. Dr. Hans-Georg Weigand für die Förderung und Hilfestellungen im Laufe des Entstehungsprozesses dieser Arbeit:

Herrn Appell danke ich für die vielen mathematischen Rückmeldungen und den Anstoß, die Lehre an der Universität zu beforschen. Seine stete Bereitschaft auch dringende Anliegen sofort zu beantworten, haben mir in vielen Situationen den Rücken gestärkt. Darüber hinaus hat er durch seine internationale Arbeitsweise auch für mich den Impuls gesetzt, im Rahmen der Promotion Einflüsse außerhalb Deutschlands mit einzubeziehen.

Herrn Weigand danke ich für zahlreichen mathematik-didaktischen Rückmeldungen und die damit verbundene Unterstützung, den Rahmen sowie die genaue Struktur für vorliegende Arbeit zu konzipieren und dadurch die Themenstellung zu finalisieren. In vielen Unterhaltungen habe ich konstruktives Feedback und wertvolle Hinweise bekommen, die mir bei der Auseinandersetzung mit dieser Problemstellung weitergehende Denkanstöße gegeben haben. Darüber hinaus möchte ich ihm auch im Hinblick auf meine allgemeine wissenschaftliche Entwicklung, für die wirklich immer bereitgestellte Unterstützung und auch die besondere Aufgeschlossenheit für jegliche von mir vorgeschlagene Projekte, danken.

Beide haben in besonderem Maße zum Gelingen dieser Dissertation beigetragen. Mir wurde stets ein Umfeld ermöglicht, in dem eigenständiges Arbeiten gefördert und meine Forschung unterstützend und motivierend begleitet wurde.

Prof. Dr. Volker Ulm möchte ich als Zweitgutachter herzlich danken für das Interesse an meiner Dissertation und die konstruktiven Rückmeldungen im Rahmen der Spring School 2016.

Meinen Kollegen vom Lehrstuhl für Didaktik der Mathematik und auch der Algebra und Geometrie möchte ich herzlich danken für die sehr gute Arbeits-

atmosphäre und anregenden Diskussionen zu meinem Forschungsprojekt und darüber hinaus.

Den Studierenden, die an meiner empirischen Untersuchung teilgenommen haben, sowie die Dozierenden, die es mir ermöglicht haben, meine Datenerhebungen in ihren Veranstaltungen durchzuführen, gilt ebenfalls mein Dank.

Dem DAAD und der Gleichstellungsbeauftragten, Frau Prof. Dr. Anja Schlömerkemper, danke ich für die finanzielle Unterstützung akademischer Reisen im Rahmen der Entstehung meiner Arbeit.

Danken möchte ich ebenfalls den Kollegen, die mir bei Tagungen hilfreiche Hinweise und Anregungen für mein Forschungsprojekt gegeben haben.

Des Weiteren begleiteten mich bei der mühevollen Arbeit des Korrekturlesens viele Personen, denen ich danken möchte: Andreas, Corinna, Elena, Eva, Gabi, Jenny, Kristina, Ramona, Thesi, Theresa, Verena.

Ein besonders großes Dankeschön gebührt Eva, die mir sowohl bei der Auswertung der Voruntersuchung als auch in der Endphase tatkräftig unter die Arme gegriffen hat.

Ein sehr herzlicher Dank gilt meiner Familie, die mich jederzeit beraten, unterstützt und motiviert hat.

Mein Dank richtet sich auch an alle, die an dieser Stelle nicht namentlich genannt sind.

Anna-Katharina Roos

Anmerkungen

Aufgrund der leichteren Lesbarkeit wurden nicht durchgängig die Schreibweisen *Schülerinnen und Schüler*, *Studentinnen und Studenten* sowie *Teilnehmerinnen und Teilnehmer* etc. verwendet. Selbstverständlich sind jeweils beide Geschlechter gemeint.

Da die durchgeführte empirische Untersuchung vorliegender Arbeit an einer bayerischen Universität durchgeführt wurde, wurde sich auch hinsichtlich weiterer Gegebenheiten (schulisches Curriculum etc.) an den bayerischen Vorgaben orientiert.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Zielsetzung der Arbeit	4
1.2	Mathematische Grundlagen	5
1.2.1	Der Monotoniebegriff	5
1.2.2	Der Grenzwertbegriff	6
1.2.3	Der Ableitungsbegriff	8
1.2.4	Der Extremwertbegriff	9
1.3	Aufbau	11
2	Theoretischer Hintergrund	13
2.1	Grundvorstellungen	14
2.1.1	Die Entwicklung des Grundvorstellungskonstrukts	14
2.1.2	Die bisherige Verwendung von Grundvorstellungen . . .	19
2.1.3	Die Unterscheidung von Aspekten und Grundvorstellungen	20
2.1.4	Partielle und allgemeine Aspekte und Grundvorstellungen	22
2.1.5	Zusammenfassung	28
2.2	Fehler und Fehlvorstellungen aus Sicht der Mathematikdidaktik	29
2.2.1	Fehler	29
2.2.2	Fehlvorstellungen	31
2.3	Concept Image und Concept Definition	35
2.3.1	Die Entwicklung des Concept Image/Concept Definition Konstrukts	35
2.3.2	Die bisherige Verwendung von Concept Image/Concept Definition	37
2.3.3	Zusammenhang von Concept Image/Concept Definition mit Aspekten/Grundvorstellungen	42
2.4	Prototypen	47
2.4.1	Eine allgemeine Diskussion des Prototypenbegriffs	47
2.4.2	Die bisherigen Studien zu Prototypen in der Mathematik	50
2.5	Conceptual Change Theorie	53
2.5.1	Die Entwicklung der Conceptual Change Theorie	54
2.5.2	Die bisherige Verwendung der Conceptual Change Theorie	61
2.6	Zusammenfassung des Kapitels	63

3	Der Übergang Schule-Universität	65
3.1	Allgemeiner Überblick	65
3.2	Schwierigkeiten mit dem Verständnis zentraler Begriffe der Analysis	67
3.2.1	Der Grenzwertbegriff	67
3.2.2	Der Monotoniebegriff und konstante Funktionen	71
3.2.3	Der Ableitungsbegriff	72
3.2.4	Der Extrempunktbegriff	77
3.2.5	Zusammenfassung	81
3.3	Schwierigkeiten mit der mathematischen Arbeitsweise	81
3.3.1	Logische Probleme mit der mathematischen Sprache	84
3.3.2	Algorithmen	85
3.3.3	Schwierigkeiten mit Beweisen	86
3.3.4	Schwierigkeiten mit Definitionen	88
3.3.5	Beispiele und Gegenbeispiele	91
3.3.6	Zusammenfassung	92
3.4	Zusammenfassung des Kapitels	92
4	Forschungsdesiderata und daraus resultierende Forschungsfragen	95
4.1	Zusammenfassung der Ergebnisse aus Theorie und Literatur	95
4.2	Forschungsfragen	98
5	Zur Forschungsfrage 1	101
5.1	Vorüberlegungen	101
5.2	Aspekte des Extrempunktbegriffs	101
5.2.1	Größter/Kleinst-Wert-Aspekt	101
5.2.2	Monotoniewechsel-Aspekt	102
5.2.3	Ableitung-Null-Aspekt	108
5.2.4	Diskussion der Aspekte	109
5.3	Grundvorstellungen des Extrempunktbegriffs	109
5.3.1	Höchster/Tiefster-Punkt-Grundvorstellung	110
5.3.2	Monotoniewechsel-Grundvorstellung	111
5.3.3	Horizontale-Tangente-Grundvorstellung	112
5.3.4	Verstärkungsfaktor-Null-Grundvorstellung	114
5.4	Überblick über Aspekte und Grundvorstellungen zum Extrempunktbegriff	116
6	Zur Methodik der Untersuchung	119
6.1	Die Methode der qualitativen Inhaltsanalyse	120
6.2	Voruntersuchung	121
6.2.1	Aufbau der Voruntersuchung	122

6.2.2	Durchführung, Auswertung und Folgerungen aus der Vor- untersuchung	125
6.3	Planung der empirischen Studie	129
6.3.1	Spezifizierung fokussierter Leitfadeninterviews	132
6.3.2	Aufbau der Studie	133
6.3.3	Konstruktion der schriftlichen Befragung	134
6.3.4	Der Leitfaden der Interviews	140
6.4	Durchführung der empirischen Studie	143
6.4.1	Durchführung der schriftlichen Befragung	143
6.4.2	Durchführung der Interviews	144
6.4.3	Nebenstudie	147
6.5	Auswertung der Interviews	148
6.5.1	Die strukturierende qualitative Inhaltsanalyse	148
6.5.2	Auswertung mit dem Computer	150
6.5.3	Ablauf(modell) der inhaltlich strukturierenden Inhalts- analyse	152
6.5.4	Gütekriterien für qualitative Verfahren	165
6.6	Zusammenfassung	167
7	Zu den Forschungsfragen 2 und 3	169
7.1	Konstante Funktionen	170
7.1.1	Beispiele	170
7.1.2	Zusammenfassung	174
7.2	Randextrema	176
7.2.1	Beispiele	176
7.2.2	Zusammenfassung	177
7.3	Lokale Linearität	178
7.3.1	Beispiele	178
7.3.2	Zusammenfassung	186
7.4	Differenzierbarkeit als Voraussetzung	188
7.4.1	Beispiele	188
7.4.2	Zusammenfassung	189
7.5	x_0 Extremstelle impliziert $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) \geq 0$	189
7.5.1	Beispiele	189
7.5.2	Zusammenfassung	193
7.6	$f'(x_0) = 0$ impliziert x_0 ist Extremstelle	194
7.6.1	Beispiel	194
7.6.2	Zusammenfassung	196
7.7	Begriffsaufspaltung: Extremum, Maximum/Minimum, Hochpunkt/ Tiefpunkt	196
7.7.1	Beispiele	196

7.7.2	Zusammenfassung	203
7.8	Allgemeiner Überblick und kurze Diskussion	204
7.9	Zusammenfassung des Kapitels	208
8	Diskussion	211
8.1	Alltagserfahrungen	211
8.2	Schulerfahrungen	214
8.2.1	Kurze Analyse des bayerischen Lehrplans im Hinblick auf den Extrempunktbegriff	216
8.2.2	Kurze Analyse der vier bayerischen Schulbücher hinsicht- lich des Extrempunktbegriffs	218
8.2.3	Die Rolle der Schule (Hauptuntersuchung)	230
8.3	Vorstellungswandel im Übergang	236
8.4	Fallanalyse der Nebenuntersuchung	239
8.4.1	Lisa	240
8.4.2	Florian	243
8.4.3	Zusammenfassung der Nebenuntersuchung	247
8.5	Zusammenfassung des Kapitels	247
9	Schlussfolgerungen	249
9.1	Rückblickende Reflexion	249
9.2	Diskussion und Schlussfolgerungen	250
9.2.1	Allgemeine Schlussfolgerungen	251
9.2.2	Schlussfolgerungen zur theoretischen Rahmung	252
9.2.3	Schlussfolgerungen für die Schule	258
9.2.4	Schlussfolgerungen für die Hochschule	261
9.2.5	Zusammenfassung und Folgerungen	264
9.3	Ausblick	267
	Literaturverzeichnis	271

Abbildungsverzeichnis

1.1	Funktionsgraph der Funktion $g : [0, 3] \rightarrow \mathbb{R}, x \rightarrow \min\{x, 1, 3 - x\}$	11
2.1	Gegenüberstellung allgemeiner und partieller Grundvorstellungen	24
2.2	Einordnung partieller und allgemeiner Grundvorstellungen . . .	27
2.3	Zusammenhang zwischen Grundvorstellungen, Aspekten, Concept Image und Concept Definition	44
2.4	Zusammenhang von Grundvorstellungen, Aspekten, Concept Image und Concept Definition in vorliegender Arbeit	45
3.1	Fehlvorstellungen zum Tangentenbegriff	74
3.2	Darstellungsschwierigkeiten von Funktionsgraphen durch Computerprogramme	76
3.3	Funktionsgraph als Ausgangspunkt zur Diskussion über den Extrempunktbegriff	79
4.1	Beispielaufgabe zu Extremwerten	96
4.2	Übersicht zu den Forschungsfragen vorliegender Arbeit	100
5.1	Graph der Funktion f	103
5.2	Graph der Funktion g	104
5.3	Graph der Funktion h	106
5.4	Vorzeichentabelle	107
5.5	Schraffierung zur Bestimmung von Extremstellen	107
5.6	Extrempunkte mit horizontaler Tangente	113
5.7	Terrassenpunkt mit horizontaler Tangente	113
5.8	Finden von Extrempunkten mit der Verstärkungsfaktor-Null-Vorstellung (1)	115
5.9	Finden von Extrempunkten mit der Verstärkungsfaktor-Null-Vorstellung (2)	115
5.10	Verbindungen zwischen Aspekten und Grundvorstellungen des Extrempunktbegriffs	116
5.11	Verbindungen zwischen Aspekten und Grundvorstellungen des Extrempunktbegriffs unter Berücksichtigung von <i>partiellen Aspekten</i>	117

6.1	Ausschnitt aus der Voruntersuchung (Beispiel 1)	127
6.2	Ausschnitt aus der Voruntersuchung (Beispiel 2)	127
6.3	Ausschnitt aus der Voruntersuchung (Beispiel 3)	128
6.4	Schriftliche Befragung: Funktionsgraph der Funktion f (Item 15)	138
6.5	Schriftliche Befragung: Funktionsgraph der Funktion f' (Item 15)	139
6.6	Ausschnitt aus der Voruntersuchung (Beweis durch Beispiel) . .	141
6.7	Ausschnitt aus der Voruntersuchung (Randextrema)	142
6.8	Ausschnitt des Kategoriensystems (MAXQDA)	151
6.9	Gegenüberstellung der normativen und deskriptiven Ebene . . .	159
6.10	Ausprägungen der zweiten Strukturierungsdimension (kognitiver Zugang)	161
6.11	Ausprägungen der zweiten Strukturierungsdimension (externe Ursachen)	161
6.12	Überblick über die Kodierungsdurchgänge	164
7.1	Auszug aus Alis Bearbeitung zu Item 1 der schriftlichen Befragung	171
7.2	Auszug aus Davids Bearbeitung zu Item 1 der schriftlichen Befragung	172
7.3	Auszug aus Davids Zeichnungen während des Interviews	172
7.4	Auszug aus Svenjas Bearbeitung zu Item 1 der schriftlichen Befragung	173
7.5	Überblick über die Ursachendiskussion der Kategorie <i>konstante Funktionen</i>	175
7.6	Extrempunkte auf dem Rand eines Intervalls (Auszug aus dem Interviewleitfaden)	176
7.7	Überblick zur Ursachendiskussion der Kategorie <i>Randextrema</i> .	178
7.8	Auszug aus Kiras Bearbeitung zu Item 2 der schriftlichen Befragung	178
7.9	Übersicht zu Kiras Argumentation zur lokalen Linearität an Extremstellen	180
7.10	Auszug aus Stellas Bearbeitung zu Item 2 der schriftlichen Befragung	181
7.11	Auszug aus Stellas Zeichnungen während des Interviews	182
7.12	Auszug aus Stellas Bearbeitung zu Item 5 der schriftlichen Befragung	183
7.13	Übersicht zu Stellas Argumentation zur lokalen Linearität an Extremstellen	186
7.14	Aspekte und Grundvorstellungen zum Ableitungsbegriff	187
7.15	Überblick zur Ursachendiskussion der Kategorie <i>lokale Linearität</i>	188
7.16	Auszug aus Danielas Bearbeitung zu Item 1 der schriftlichen Befragung	188

7.17	Auszug aus Danielas Bearbeitung zu Item 4 der schriftlichen Befragung	189
7.18	Auszug aus Lorenz' Bearbeitung zu Item 4 der schriftlichen Befragung	191
7.19	Auszug aus Alis Bearbeitung zu Item 4 der schriftlichen Befragung	193
7.20	Überblick zur Ursachendiskussion der Kategorie x_0 <i>Extremstelle impliziert $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) \geq 0$</i>	194
7.21	Auszug aus Annes Bearbeitung zu Item 2 der schriftlichen Befragung (1)	195
7.22	Auszug aus Annes Bearbeitung zu Item 2 der schriftlichen Befragung (2)	195
7.23	Überblick zur Ursachendiskussion der Kategorie $f'(x_0) = 0$ <i>impliziert x_0 ist Extremstelle</i>	196
7.24	Auszug aus Janas Zeichnungen während des Interviews	197
7.25	Janas Verständnis des Extremwertbegriffs	197
7.26	Annes Vorstellung von Extremwerten	198
7.27	Annes Verständnis des Extremwertbegriffs	200
7.28	Auszug aus Davids Bearbeitung zu Item 1 der schriftlichen Befragung	201
7.29	Auszug aus Davids Zeichnungen während des Interviews	202
7.30	Davids Verständnis des Extremwertbegriffs	203
7.31	Überblick zur Ursachendiskussion der Kategorie <i>Begriffsaufspaltung</i>	204
7.32	Übersicht zu den Kategorien der gefundenen Schwierigkeiten	205
7.33	Extrempunkte auf dem Rand eines Intervalls (Auszug aus dem Interviewleitfaden)	206
8.1	Extremwertprobleme (Fokus 9)	219
8.2	Extremstellen (Fokus 10)	220
8.3	Fragen zum Extrempunktbegriff (Fokus 11)	220
8.4	Notwendige Bedingung (Fokus 11)	221
8.5	Lokale Extremstellen als Nullstellen der Ableitung (Fokus 11)	221
8.6	Klassifikation lokaler Extremstellen (Fokus 11)	222
8.7	Globale Extrema (Fokus 11)	222
8.8	Einführung des Extremwertbegriffs (Lambacher Schweizer 9)	223
8.9	Kritische Betrachtung der eingeführten Kriterien zum Extrempunktbegriff (Lambacher Schweizer 11)	224
8.10	Einführung des Extrempunktbegriffs (Delta 9)	224
8.11	Notwendiges und hinreichendes Kriterium (Delta 11)	225
8.12	Globale Extrema und Randwerte (Delta 11)	226
8.13	Extremwertprobleme (BSV 9)	226

8.14	Monotonie- und Extrempunktbegriff (BSV 11)	227
8.15	Absolute und relative Extrema (BSV 11)	228
8.16	Extremwertkriterium (BSV 11)	229
8.17	Auszug aus Lisas Antwort zu Item 4 der schriftlichen Befragung	240
8.18	Auszug aus Lisas Antwort zu Item 5 der schriftlichen Befragung	242
8.19	Auszug aus Florians Antwort zu Item 4 der schriftlichen Befragung	244
8.20	Auszug aus Florians Zeichnungen während des Interviews	245
9.1	Dreidimensionale Matrix des Begriffsverständnis unter Berücksichtigung von Aspekten und Grundvorstellungen des Integralbegriffs	255

Tabellenverzeichnis

5.2	Verschiedene Funktionsgraphen mit Extremstellen	111
6.1	Anzahl der Fehlerkategorien bzgl. des Extrempunktbegriffs (Vor- untersuchung)	135
6.2	Übersicht der Interviewtermine (Hauptstudie)	146
6.3	Übersicht der Interviewtermine (Nebenstudie)	147
6.4	Übersicht über einem normativen und deskriptiven Zugang in Bezug auf das Begriffsverständnis	159
6.5	Ablaufplan der empirischen Untersuchungen	168



1 Einleitung

In den letzten Jahren wurde in den Medien immer wieder berichtet¹, dass der Übergang von Schule zu Universität in vielen Fächern Schwierigkeiten und Herausforderungen mit sich bringt – insbesondere auch im Fach Mathematik. Dies zeigt sich u. a. an der geringen Erfolgsquote von Mathematikstudierenden (siehe dazu Bericht des statistischen Bundesamtes 2015 (Statistisches Bundesamt, 2017)²). Auch der Bildungsbericht 2014, der sich auf Daten der Jahre 2010 und 2012 stützt, zeichnet ein ähnliches Bild. Die Abbruchquote im Fach Mathematik ist mit circa 40 % - 55 % höher als die allgemeine Abbruchquote an den Universitäten, die mit 33 % (2010) bzw. 35 % (2012) für den Bachelorstudiengang angegeben wird (Autorengruppe Bildungsberichterstattung, 2014, S. 301).

Eine Ursache dafür könnte die folgende Charakterisierung der Mathematik von dem mit einer Fields Medaille ausgezeichneten Mathematiker W. P. Thurston sein:

Mathematics is amazingly compressible: you may struggle a long time, step by step, to work through some process or idea from several approaches. But once you really understand it and have the mental perspective to see it as a whole, there is often a tremendous mental compression. You can file it away, recall it quickly and completely when you need it, and use it as just one step in some other mental process. The insight that goes with this compression is one of the real joys of mathematics.

After mastering mathematical concepts, even after great effort, it becomes very hard to put oneself back in the frame of mind of someone to whom they are mysterious. (Thurston, 2005, S. 5)

Er schildert damit ein von vielen Menschen als sehr faszinierend empfundene Eigenschaft der Mathematik: Das Zusammenfassen komplexer Inhalte in eine möglichst prägnante Form. Diese kompakte Präsentation von Informationen kann einerseits sehr sinnvoll sein, da in wenigen Worten (oder sogar

¹siehe bspw. das Interview mit G. Törner (Greiner, 2012).

²In diesem Bericht werden Mathematik und Naturwissenschaften gemeinsam für die Jahre 2003 bis 2007 betrachtet. Die Erfolgsquote von jenen Studierenden von 65 %- 71 % an den Universitäten ist im Vergleich mit allen untersuchten Fächern am geringsten.

Formeln) der komplette zu übermittelnde Inhalt eindeutig dargestellt werden kann. Andererseits fällt es vielen, die diese Informationsdichte nicht gewohnt sind, eventuell schwer, mathematische Texte und Konzepte zu verstehen: Sie empfinden es als ausgesprochen anstrengend, beim Lesen jedes einzelne Wort (oder Symbol) zu überdenken, was jedoch bei mathematischen Texten notwendig ist, da in der Mathematik Begriffe eine festgelegte Bedeutung haben, mit der man vertraut sein muss.

Hinzukommend spricht Thurston ein Problem an, dass in Lehrsituationen häufig auftritt: Während derjenige, der sich Inhalte neu aneignet, mit verschiedenen Hindernissen umgehen muss, sieht die Lehrperson diese Herausforderungen nicht immer. Diese und weitere Charakteristika der Mathematik können dazu führen, dass ein Mathematikstudium weithin als anspruchsvoll empfunden wird.

Um ein konkretes Hilfsangebot für die Lernenden zu schaffen, wurden vor allem in den letzten Jahren immer mehr sogenannte Brücken- oder Vorkurse entwickelt, die im Vorfeld eines Studiums, oder begleitend zu den ersten Semestern, den Übertritt an die Hochschule erleichtern sollen (siehe z. B. Bausch et al., (2014); Roth et al., (2015)).

Um solche Kurse gewinnbringend zu gestalten, muss man natürlich zunächst die Faktoren, die zu den Schwierigkeiten der Studienanfänger führen, kennen und verstehen. Die Probleme und Herausforderungen in der Übergangsphase sind sicher nicht monokausal, sondern gehen zurück auf eine Vielzahl unterschiedlicher Ursachen.

Die typischen Vorlesungen in den Anfangssemestern eines Mathematikstudiums, also in denen Übergangsschwierigkeiten auftreten, sind die Analysis und die Lineare Algebra. Die vorliegende Arbeit soll sich auf die Analysis konzentrieren. Dort werden teilweise Konzepte wieder aufgegriffen, die bereits in der Schule intuitiv eingeführt wurden. Diese werden erweitert und noch stärker formalisiert. Außerdem wird durch die Einordnung in eine strenge, formal-deduktiv strukturierte Theorie eine Grundlage für viele weitere mathematische Gebiete, wie zum Beispiel Numerik, Funktionentheorie oder Optimierung geschaffen, die Gegenstand späterer Lehrveranstaltungen sind. Etwas genauer betrachtet, werden in der Numerik viele Resultate der Analysis auf eine praktisch-rechnerische Weise verwendet, in der Funktionentheorie werden Überlegungen, die in der Analysis im Reellen gemacht wurden, auf die komplexen Zahlen übertragen und in der Optimierung untersucht man, wie auch in der Analysis, Funktionen im Bezug auf Extrema, allerdings in deutlich komplizierteren Kontexten.

Die Schwierigkeiten der Studierenden äußern sich meist in einer Diskrepanz zwischen den Erwartungen der Dozenten und ihrem eigenen Können. Um sich

der Sicht der Lehrenden zu nähern, ist es wichtig zu wissen, welche Erwartungen diese hinsichtlich des Verständnisses von beispielsweise Analysis an die Studierenden haben.

Sofronas et al. (2011) sind der Frage *Was bedeutet es für einen Studierenden Analysis in den ersten beiden Semestern verstanden zu haben?* nachgegangen. Sie befragten sie 24 Experten und konnten die folgenden vier Punkte herausarbeiten:

- (a) mastery of the fundamental concepts and – or skills of the first-year calculus,
- (b) construction of connections and relationships between and among concepts and skills,
- (c) the ability to use the ideas of the first-year calculus, and
- (d) a deep sense of the context and purpose of the calculus.

(Sofronas et al., 2011, S. 131)

Ein solch umfassendes Wissen kann natürlich nicht sofort in den ersten Semestern erfolgreich ausgebildet werden. Manche Lernende sind sich gar nicht darüber bewusst, was es heißt, sich in ein mathematisches Gebiet einzuarbeiten. Aber es können auch Schwierigkeiten mit konkreten Inhalten auftreten, die auf Grund ihrer Komplexität nicht direkt zugänglich sind.

In der vorliegenden Arbeit fokussieren wir uns auf einen Begriff innerhalb der ersten Analysisvorlesung, den Extrempunktbegriff, und untersuchen das Begriffsverständnis der Studierenden im Bezug auf diesen. Die vorherigen Überlegungen berücksichtigend, wird nun zur Wahl des untersuchten Extrempunktbegriffs Stellung bezogen (detaillierte Erläuterungen zu dessen Relevanz findet man in Abschnitt 4).

Es gibt wichtige Konzepte und Prozeduren in der Analysis, deren Erlernen sich für Studierende schwierig gestaltet. Für unsere Untersuchung erschienen hierbei solche Begriffe besonders von Bedeutung, die folgende Merkmale erfüllen:

- Sie sollten sowohl für weitere mathematische Gebiete als auch für Anwendungen eine wichtige Rolle spielen, also nicht zu speziell sein.
- Sie sollten in der Analysis nicht isoliert gelehrt werden, sondern in einem engen Zusammenhang mit anderen grundlegenden analytischen Begriffen stehen, also zentrale Begriffe darstellen.
- Sie sollten bereits in der Schule eingeführt worden sein, wenn man sich – wie in unserem Fall – für das Zusammenspiel von Schule und Hochschule interessiert.

Der Begriff *Extrempunkt* erfüllt diese Voraussetzungen und steht daher im Mittelpunkt unserer Untersuchungen.

1.1 Zielsetzung der Arbeit

An dieser Stelle möchten wir kurz auf die wichtigsten Ziele der vorliegenden Arbeit eingehen:

- Wie bereits erwähnt, ist die Phase des Übergangs von der Schule zur Hochschule durch mehrere Herausforderungen geprägt. Umbrüche finden beispielsweise auf inhaltlicher, sozialer und auch institutioneller Ebene statt (vgl. z. B. Gueudet (2008)). Ein Ziel dieser Arbeit ist es, am Beispiel des Extrempunktbegriffs eine Verbindung zwischen Themen herzustellen, die sowohl in der Schule als auch in der Hochschule behandelt werden, um damit inhaltliche Probleme im Übergang zu erklären. Der Extrempunktbegriff erscheint uns hierfür besonders geeignet, weil dessen Definition einige Feinheiten beinhaltet, die in der Schule zunächst meist „verborgen“ bleiben und erst bei einer genaueren Analyse, wie sie in den universitären Anfängervorlesungen üblich ist, zutage treten.
- Schwierigkeiten der Lernenden sind oft komplex und vielschichtig. Die Vielschichtigkeit liegt beispielsweise darin begründet, dass viele mathematische Begriffe nicht isoliert betrachtet werden, sondern vor allem hinsichtlich ihrer Beziehung zu anderen, schon vorher eingeführten Begriffen gesehen werden müssen. Folgendes Beispiel veranschaulicht diesen Aspekt: Extrempunkte einer reellen Funktion stehen im Zusammenhang mit Monotoniebetrachtungen und der Differenzierbarkeit bzw. der Ableitung einer Funktion. Die Ableitung setzt aber wiederum den Grenzwertbegriff voraus, und dieser zählt zu den komplexen und schwierigen Begriffen der Mathematik. Diese Arbeit muss daher diese Vielschichtigkeit berücksichtigen und folglich die Bedeutung und Auswirkungen, die das Verständnis zentraler Begriffe wie Grenzwert, Monotonie und Ableitung auf den Extrempunktbegriff haben, mit einbeziehen.
- Auf dem Weg zu einem erfolgreichen Verständnis mathematischer Begriffe begegnen vielen Lernenden Hindernisse. Das Wissen über Lernenschwierigkeiten ist Grundlage einer bedachten Auseinandersetzung der Lehrperson mit dem zu behandelnden Thema. Für Inhalte der Schule gibt es bereits viele Forschungsergebnisse über Schwierigkeiten und Fehlvorstellungen. Inzwischen gibt es zwar auch Forschungsergebnisse in Bezug auf Verständnisschwierigkeiten der Studierenden an Hochschulen

(z. B. Funktionen (Dreyfus & Eisenberg, 1983), Wendepunkte (Tsamir & Ovodenko, 2013), Grenzwerte (Przenioslo, 2004), Tangenten (Biza & Zachariades, 2010)), jedoch haben solche im Fach Mathematik an Universitäten noch nicht soviel Aufmerksamkeit erfahren wie in der Schulpraxis. Unsere Arbeit soll dazu beitragen, diese Lücke zu verringern und die nötigen Grundlagen zu schaffen, um auch Lernschwierigkeiten der Studierenden an der Universität zu erkennen.

Zentrales Anliegen dieser Arbeit ist es, die didaktische Forschung über Fragen der Verständnisschwierigkeiten von Mathematik an der Hochschule durch das hier untersuchte Beispiel des Extrempunktbegriffs zu vertiefen. Allgemein wird damit auch ein Beitrag zu den Forderungen des Maßnahmenkatalogs der Mathematik-Kommission Übergang Schule-Hochschule geleistet, in welchem u. a. gefordert wird: „12. Die mathematikspezifische und allgemeine Forschung zum Übergang von Schule zu Hochschule wird ausgebaut und intensiviert.“ (Mathematik-Kommission, 2019, S. 2)

1.2 Mathematische Grundlagen

In diesem Abschnitt werden die zugrundeliegenden mathematischen Begriffe erklärt, auf denen die Untersuchungen in dieser Arbeit aufbauen.

1.2.1 Der Monotoniebegriff

Alle Funktionen werden im Folgenden als reellwertig vorausgesetzt. Ein wichtiges Konzept zur Charakterisierung solcher Funktionen ist der Monotoniebegriff:

Definition 1 (Monotonie). Sei $D \subseteq \mathbb{R}$. Eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *monoton steigend* (bzw. *streng monoton steigend*), falls $f(x) \leq f(y)$ (bzw. $f(x) < f(y)$) für alle $x, y \in D$ mit $x < y$ gilt. Entsprechend heißt $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ *monoton fallend* (bzw. *streng monoton fallend*), falls $f(x) \geq f(y)$ (bzw. $f(x) > f(y)$) für alle $x, y \in D$ mit $x < y$ gilt.

Diese Definition lässt sich insofern als eine Standarddefinition sehen, als dass alle vier bayerischen Gymnasialbücher an dieser orientiert sind (vgl. BSV 11 (Distel, Feuerlein, 2009, S. 39); Delta 11 (Schätz, Eisentraut, 2009, S. 61); Lambacher Schweizer 11 (Götz, Herbst & Kestler (2009), S. 64); oder eher intuitiv Fokus 10 (Freytag et al., 2008, S. 63)). Auch in vielen an der Universität gebräuchlichen Analysisbüchern (vgl. Heuser, 2009, S. 115; Köhler, 2006, S. 51; Forster, 2001, S. 107;) findet man ähnliche Formulierungen. Es gibt

jedoch auch abweichende Definitionen. So basiert Zorichs Begriffsbestimmung im Großen und Ganzen auf folgender Terminologie (vgl. Zorich, 2006, S. 142):

Definition 2 (Monotonie, Variante). Eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *auf D anwachsend*, wenn

$$\forall x_1, x_2 \in D : (x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)),$$

auf D nicht absteigend, wenn

$$\forall x_1, x_2 \in D : (x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)),$$

auf D nicht anwachsend, wenn

$$\forall x_1, x_2 \in D : (x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)),$$

auf D absteigend, wenn

$$\forall x_1, x_2 \in D : (x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)).$$

Was Zorich als *anwachsend* bezeichnet, entspricht in Definition 1 also *streng monoton steigend*, und was er *nicht absteigend* nennt, wäre in Terminologie von Definition 1 *monoton steigend*. Uns scheint Zorichs Bezeichnung etwas unglücklich gewählt zu sein, denn die Sinusfunktion ist – betrachtet auf ganz $\mathbb{R}$ – *nicht monoton fallend* im Sinne von Definition 1, aber nicht *nicht absteigend* auf $\mathbb{R}$ gemäß Definition 2. Um Schwierigkeiten zu vermeiden, muss also genau darauf geachtet werden, welche Definition und damit welche Bezeichnungen von Monotonie bzw. strenger Monotonie ein Autor zu Grunde legt.

In vorliegender Arbeit beziehen wir uns auf Definition 1.

1.2.2 Der Grenzwertbegriff

Der Grenzwertbegriff wird heute in der Schule meist graphisch-visuell und nicht streng formal eingeführt, beispielsweise über Grenzwerte, die Asymptoten beschreiben, wie

$$a = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x).$$

Im Lambacher Schweizer Buch Bayern für die 10. Klasse findet man seine Definition folgendermaßen:

„Definition“

Kommen die Funktionswerte $f(x)$ einer Funktion f für beliebig groß werdende x -Werte einer Zahl a beliebig nahe, so nennt man a den Grenzwert der Funktion f für x gegen plus unendlich ($x \rightarrow +\infty$).
(Schmid & Weidig, 2008, S. 142)

An den Universitäten folgt dann eine formale Definition. Dies betrifft sowohl Grenzwerte von Folgen (insbesondere Reihen) als auch Grenzwerte von Funktionen:

Definition 1 (Folggengrenzwert). Eine Folge $(a_n)_n$ in $\mathbb{R}$ heißt *konvergent* gegen $a \in \mathbb{R}$, falls es für alle $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, derart, dass $|a_n - a| < \epsilon$ für alle $n \geq N$ gilt. Die Zahl a heißt dann *Grenzwert* oder *Limes* der Folge und man schreibt

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \quad \text{oder} \quad a_n \rightarrow a \ (n \rightarrow \infty).$$

Definition 2 (Funktionsgrenzwert). Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, x_0 ein innerer Punkt von I und $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Wir schreiben

$$c = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$$

und nennen c den *Grenzwert von f in x_0* , falls für jede Folge $(x_n)_n$ in $I \setminus \{x_0\}$ aus $x_n \rightarrow x_0$ stets $f(x_n) \rightarrow c$ folgt. Man sagt in diesem Fall auch, dass $f(x)$ für $x \rightarrow x_0$ gegen c konvergiert und schreibt kurz $f(x) \rightarrow c$ für $x \rightarrow x_0$. Neben der ϵ - δ -Definition (siehe bspw. Appell, 2009, S. 4 f.) ist dies wohl die am häufigsten verwendete Definition des Grenzwertbegriffs für Funktionen (siehe auch Heuser, 2009, S. 235; Köhler, 2006, S. 114; Rudin, 2009, S. 96).

Bisweilen findet man jedoch auch Vorlesungen, die auf folgender etwas anderen Grenzwertdefinition beruhen:

Definition 3 (Funktionsgrenzwert, Variante). Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, x_0 ein innerer Punkt von I und $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Wir schreiben

$$c = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$$

und nennen c den *Grenzwert von f in x_0* , falls für jede Folge $(x_n)_n$ in I aus $x_n \rightarrow x_0$ stets $f(x_n) \rightarrow c$ folgt. Man sagt in diesem Fall, dass $f(x)$ für $x \rightarrow x_0$ gegen c konvergiert und schreibt kurz $f(x) \rightarrow c$ für $x \rightarrow x_0$.

Der Unterschied zwischen Definition 2 und Definition 3 ist, dass in Definition 3 die Folge $(x_n)_n$ auch den Wert x_0 (sogar unendlich oft) annehmen darf. Bei der Definition der Stetigkeit von f in x_0 muss man dann nur die Existenz des Grenzwerts fordern, während man bei Verwendung von Definition 2 zusätzlich sicherstellen muss, dass der Grenzwert mit $f(x_0)$ übereinstimmt. Wir illustrieren die resultierende Diskrepanz zwischen beiden Definitionen mit einem Beispiel.

Beispiel 1. Sei $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x = 0, \\ 0 & \text{für } x \neq 0. \end{cases}$$

Gemäß Definition 2 hat diese Funktion in $x_0 = 0$ den Grenzwert 0, während sie gemäß Definition 3 keinen Grenzwert besitzt.

Für vorliegende Arbeit wird Definition 2 zu Grunde gelegt.

1.2.3 Der Ableitungsbegriff

Da wir nur Funktionen auf Intervallen betrachten, werden bei der Analyse des Ableitungsbegriffs dieselben Voraussetzungen wie bei der Definition des Grenzwerts verlangt.

Definition (Ableitung). Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, x_0 eine innere Stelle von I und $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann heißt f in x_0 *differenzierbar*, falls der Grenzwert

$$f'(x_0) := \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existiert. Der Grenzwert $f'(x_0)$ heißt dann die *Ableitung* oder der *Differentialquotient* von f in x_0 . Man bezeichnet ihn auch mit $\frac{df}{dx}(x_0)$. Die Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *differenzierbar* (auf I), wenn sie an jeder Stelle $x_0 \in I$ differenzierbar ist.

Die folgende alternative Charakterisierung der Ableitung einer Funktion ist wichtig, vor allem im Hinblick auf ihre Verallgemeinerung auf Funktionen mehrerer Variabler:

Eine Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ist in $x_0 \in I$ genau dann differenzierbar, wenn es ein $c \in \mathbb{R}$ und eine Funktion $r : I \rightarrow \mathbb{R}$ gibt, derart, dass

$$f(x) - f(x_0) = c(x - x_0) + r(x) \quad (x \in I)$$

und

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{r(x - x_0)}{x - x_0} = 0$$

gelten muss. Hierbei ist dann $c = f'(x_0)$. In dieser Form bedeutet Differenzierbarkeit von f in x_0 , dass f in der Nähe von x_0 „linearisiert“ werden kann, wobei der „Rest“ $r(h)$ für $h \rightarrow 0$ stärker als linear gegen Null geht.

Beide Charakterisierungen findet man in der Standardliteratur (vgl. Heuser, 2009, S. 261 und S. 268).

1.2.4 Der Extremwertbegriff

Wir kommen nun zu dem für diese Arbeit zentralen Extremwertbegriff. Hinsichtlich des Oberbegriffs *Extremum* gibt es viele Bezeichnungen, die wir im Folgenden vorstellen.

Definition 1 (Extremum).

Es sei $D \subseteq \mathbb{R}$. Man sagt, eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ habe in $x_0 \in D$

- (a) ein *globales Maximum*, wenn $f(x) \leq f(x_0)$ für alle $x \in D$ gilt;
- (b) ein *lokales Maximum*, wenn es ein $\delta > 0$ gibt, so dass $f(x) \leq f(x_0)$ für alle $x \in D \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ gilt.

Entsprechend definiert man *globale* und *lokale Minima*.

Minima und Maxima fasst man unter dem Begriff *Extrema* zusammen. Die Stelle (x -Wert) an der ein Maximum bzw. Minimum angenommen wird, bezeichnet man als *Maximal-* bzw. *Minimalstelle*. Maximal- und Minimalstellen fasst man unter dem Begriff *Extremstelle* zusammen.

Betrachtet man Paare (x, y) aus Argumenten x und Extremwerten y (wobei gilt $y = f(x)$), so spricht man von *Hochpunkten* bzw. *Tiefpunkten* und fasst diese unter dem Namen *Extrempunkte* zusammen. Die Funktion $f(x) = x^2$ hat also bei $x_0 = 0$ eine Minimalstelle mit dem Minimum $f(x_0) = 0$, und $(0, 0)$ ist ein Tiefpunkt des Graphen von f .

Definition 2 (striktes Extremum).

Es sei $D \subseteq \mathbb{R}$. Eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ hat in $x_0 \in D$

- (a) ein *striktes globales Maximum*, wenn $f(x) < f(x_0)$ für alle $x \in D \setminus \{x_0\}$ gilt;
- (b) ein *striktes lokales Maximum*, wenn es ein $\delta > 0$ gibt, so dass $f(x) < f(x_0)$ für alle $x \in D \setminus \{x_0\} \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ gilt.

Entsprechend werden *strikte globale und lokale Minima* definiert. Wird in vorliegender Arbeit von einem *Extremum* gesprochen, beziehen wir uns durchweg auf Definition 1. Wenn wir uns auf Definition 2 beziehen, sprechen wir explizit von einem *strikten* Extremum.

Intuitiv mag Definition 2 eher der Vorstellung eines Maximums entsprechen, weil in diesem Fall die betrachteten Funktionswerte rechts und links der Maximalstelle wirklich kleiner als dieses sind. Das ist analog zu Zorichs Definition von Monotonie, die auch keine horizontalen Abschnitte beim Graphen einer „anwachsenden“ Funktion zulässt. Allerdings hat sich in einem Großteil der Literatur Definition 1 für den Begriff *Extremum* durchgesetzt, vielleicht auch weil sie zwei Vorteile gegenüber Definition 2 aufweist:

- Zunächst ist offensichtlich, dass die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \cos(x)$ ein striktes lokales Maximum in $x_0 = 0$ mit $f(0) = 1$ hat. Andererseits ist dies kein striktes globales Maximum im Sinne von Definition 2, da z. B. auch $f(2\pi) = 1$ ist. Benutzen wir aber Definition 1, dann ist $x_0 = 0$ auch ein globales Maximum. Zusammenfassend ist mit Definition 1 unter der Menge der lokalen Maxima auch immer ein globales Maximum ermittelbar, mit Definition 2 nicht, wie das gegebene Beispiel zeigt. Aufgrund dieser Tatsache erscheint uns Definition 1 intuitiver.
- Ein anderer Gesichtspunkt von Definition 2 ist jedoch schwerwiegender: Ein wichtiger Satz der Analysis besagt, dass eine stetige Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ auf $[a, b]$ ($a \leq b$) sowohl ein globales Maximum als auch ein globales Minimum besitzt. Allerdings muss dies natürlich keineswegs ein striktes Extremum sein, so dass dieser Satz bei der Verwendung von Definition 2 nicht mehr gälte: konstante Funktionen sind ein einfaches Gegenbeispiel.

Auf den ersten Blick könnte man dazu tendieren den erwähnten Satz für Definition 2 zu versuchen dadurch zu „retten“, dass man die Funktion f als nicht-konstant auf $[a, b]$ voraussetzt. Jedoch auch Funktionen, die nur auf einem Teilintervall konstant sind wie $g : [0, 3] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \min\{x, 1, 3 - x\}$, führen zu Problemen.

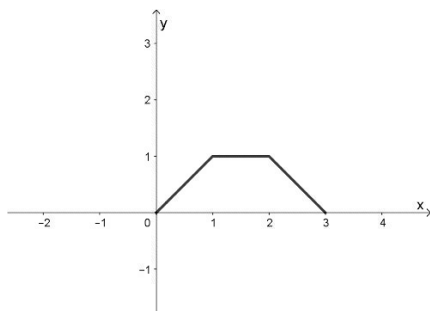


Abbildung 1.1 Funktionsgraph der Funktion $g : [0, 3] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \min\{x, 1, 3 - x\}$

Die Funktion g hat im Sinne von Definition 2 nicht einmal ein lokales Maximum auf $[0, 3]$. (Eine ähnliche Argumentation findet man bei Fischer und Malle (1981, S. 148–150)).

1.3 Aufbau

Die vorliegende Arbeit besteht aus neun Kapiteln, die folgendermaßen gegliedert sind.

Nach dieser Einleitung (*Kapitel 1*) stellen wir in *Kapitel 2* den theoretischen Hintergrund der Arbeit vor. Ausgehend von einer Klärung der Bedeutung des Ausdrucks *Begriffsverständnis* wird einem erfolgreichen Verständnis die Konstrukte Fehler und Fehlvorstellungen gegenübergestellt und aus unterschiedlichen Perspektiven beleuchtet. Es werden Hilfsmittel zur Diskussion ihrer Ursachen vorgestellt. Hauptaugenmerk liegt dabei auf den theoretischen Konstrukten der *Grundvorstellungen* (vgl. z. B. vom Hofe, 1995; Greefrath et al, 2016b), des *Concept Images* (vgl. z. B. Tall & Vinner, 1981) und der *Conceptual Change Theorie* (vgl. z. B. Posner et al., 1982). Der in diesem Kapitel zusammengestellte theoretische Rahmen liefert das Fundament für die Auswertung der durchgeführten Untersuchung.

Anschließend wird in *Kapitel 3* der bisherige Forschungsstand hinsichtlich Schwierigkeiten im Übergang Schule-Hochschule aufgezeigt, und zwar unter besonderer Berücksichtigung des Gebiets Analysis. Dabei wird zum einen die im Gegensatz zur Schule streng wissenschaftliche Arbeitsweise an der Universität beleuchtet, zum anderen werden spezielle Begriffe genauer betrachtet. Hierzu werden auch bereits bestehende Studien zu den Begriffen Monotonie, Ableitung, Grenzwert kurz vorgestellt und auf Lernendenschwierigkeiten eingegangen.