Gert Kadunz *Hrsg.*

Zeichen und Sprache im Mathematik-unterricht

Semiotik in Theorie und Praxis

Springer Spektrum

Zeichen und Sprache im Mathematikunterricht

Gert Kadunz
(Hrsg.)

Zeichen und Sprache im Mathematikunterricht

Semiotik in Theorie und Praxis

Springer Spektrum

Hrsg.
Gert Kadunz
Institut für Mathematik
Alpen-Adria-Universität Klagenfurt
Klagenfurt, Österreich

ISBN 978-3-662-61193-7 ISBN 978-3-662-61194-4 (eBook)
https://doi.org/10.1007/978-3-662-61194-4

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Planung/Lektorat: Annika Denkert
Springer Spektrum ist ein Imprint der eingetragenen Gesellschaft Springer-Verlag GmbH, DE und ist ein Teil von Springer Nature.
Die Anschrift der Gesellschaft ist: Heidelberger Platz 3, 14197 Berlin, Germany

Vorwort

Der nun vorliegende dritte Band des GDM Arbeitskreises Semiotik, Zeichen und Sprache in der Mathematikdidaktik, setzt mit der Tradition fort, Semiotik als nutzbringendes Werkzeug für die Mathematikdidaktik vorzustellen. Die Wertschätzung dieses Mittels für das Lehren und Lernen von Mathematik zeigt sich sowohl in der Vielzahl einschlägiger Publikationen als auch in zahlreichen Vorträgen. Dies spiegelt die Themenvielfalt der in dieser Sammlung angebotenen Texte. Sie reicht von der Diskussion ontologischer Annahmen innerhalb der Mathematik über unterrichtspraktische Überlegungen bis hin zur Verwendung semiotischer Ansätze zur Interpretation von Gebärdensprache beim Lernen von Mathematik.

Mein Dank gilt allen Autorinnen und Autoren dieses Bandes, die mit großer Sorgfalt die Texte erstellt und mit der zu Gebote stehenden Strenge die Begutachtungstätigkeit durchgeführt haben. Die Veröffentlichung einer Anthologie bedarf aber auch der Unterstützung durch einen Verlag und einer Vielzahl von dort tätigen Personen. Ich darf daher dem Verlag Springer vertreten durch Frau Annika Denkert und Frau Agnes Herrmann für die Organisation und die jederzeit reibungslose Kooperation danken.

Klagenfurt
im Januar 2020

Gert Kadunz

Inhaltsverzeichnis

Autorenverzeichnis

Martin Brunner, Bundesgymnasium und Bundesrealgymnasium Lienz, Maximilianstraße 11, 9900 Lienz, Österreich

Willi Dörfler, Institut für Didaktik der Mathematik, Alpen-Adria-Universität Klagenfurt, Sterneckstraße 15, 9020 Klagenfurt a. W., Österreich

Melanie C. M. Huth, Institut für Didaktik der Mathematik und der Informatik, Goethe-Universität Frankfurt am Main, Robert-Mayer-Straße 6–8, 60325 Frankfurt am Main, Deutschland

Gert Kadunz, Institut für Mathematik, Alpen-Adria Universität Klagenfurt, Universitätsstraße 65–67, 9020 Klagenfurt a. W., Österreich

Hermann Kautschitsch, Institut für Mathematik, Alpen-Adria Universität Klagenfurt, Universitätsstraße 65–67, Klagenfurt a. W., Österreich

Angel Mizzi, Fakultät für Mathematik, Universität Duisburg-Essen, Thea-Leymann-Straße 9, 45127 Essen, Deutschland

Barbara Ott, Institut Lehr-Lernforschung, Pädagogische Hochschule St. Gallen, Notkerstrasse 27, 9000 St. Gallen, Schweiz

Sebastian Rezat, Institut für Mathematik, Universität Paderborn, Warburger Straße 100, 33098 Paderborn

Christof K. Schreiber, Institut für Didaktik der Mathematik, Justus-Liebig-Universität Gießen, Karl-Glöckner-Straße 21c, 35394 Gießen, Deutschland

Jan Schumacher, Institut für Mathematik, Universität Paderborn, Warburger Straße 100, 33098 Paderborn

Rose F. Vogel, Institut für Didaktik der Mathematik und der Informatik, Goethe-Universität Frankfurt am Main, Robert-Mayer-Straße 6–8, 60325 Frankfurt am Main, Deutschland

Annika M. Wille, Institut für Didaktik der Mathematik, Alpen-Adria-Universität Klagenfurt, Sterneckstraße 15, 9020 Klagenfurt a. W., Österreich

1 Einleitung

Gert Kadunz

In sehr unterschiedlicher Weise haben Mathematikdidaktikerinnen und Mathematikdidaktiker die Bedeutung des Sichtbaren und des schillernden Wortes „Visualisierung“ betrachtet. Exemplarisch sei auf Arbeiten von N. Presmeg (1986, 1994) oder Texte, die in den Sammelbänden der Klagenfurter Visualisierungstagungen (Kautschitsch 1982, 1994) erschienen sind, verwiesen. Gerne verwendete Bezugsdisziplinen waren dabei z. B. die lernpsychologischen Theorien von Jean Piaget (1955) oder Jerome Bruner (1966). Schon in den Jahren des Erscheinens dieser Publikationen zur Visualisierung entstand in der Mathematikdidaktik, vorerst kaum rezipiert, der alternative Vorschlag, Sprechen, Schreiben und Lernen von Mathematik von einer alternativen Position aus zu betrachten (vgl. Otte 2018; Hoffmann 2005). Dieser Vorschlag bestand in der Konzentration auf die beim Lernen von Mathematik verwendeten *Zeichen,* deren Konstruktion und Gebrauch. Die Beschäftigung mit den Zeichen und deren Verwendung eröffnete den Blick auf einen historisch bestimmten Prozess (vgl. Nöth 2000), in dessen Verlauf eine größere Anzahl von Zeichentheorien entwickelt wurde. Wenige davon haben heute in die Mathematikdidaktik Eingang gefunden. In erster Linie ist der Ansatz nach Charles S. Peirce zu nennen, der als Autor das Wort „Semiotik“ prägte. Vor allem Michael Hoffmann hat hier wegweisende Arbeiten vorgelegt, in denen Überlegungen von Peirce in die Mathematikdidaktik transformiert wurden. Darüber wurde in zahlreichen Arbeiten berichtet (z. B. Kadunz 2010; Sáenz-Ludlow und Kadunz 2016).

Einen lern- und sozialpsychologischen Ansatz, der ebenfalls unter dem Stichwort Semiotik in der Mathematikdidaktik Verwendung findet, hat Lew S. Vygotskii entwickelt. Bei ihm finden wir Überlegungen zur Kreativität oder kognitiven und kulturellen Entwicklung von Kindern (Vygotskii 1978). Zur Rezeption von Vygotskii sei

G. Kadunz (✉)
Institut für Mathematik, Alpen-Adria-Universität Klagenfurt, Klagenfurt, Österreich
E-Mail: gert.kadunz@aau.at

G. Kadunz (Hrsg.), *Zeichen und Sprache im Mathematikunterricht,*
https://doi.org/10.1007/978-3-662-61194-4_1

auf Publikationen von Luis Radford (z. B. 2006) verwiesen. Eine dritte, wenn auch in der Mathematikdidaktik weniger verwendete semiotische Theorie ist noch zu erwähnen. Es ist eine linguistische Theorie, die von Ferdinand de Saussure entwickelt wurde. Deren mathematikdidaktische Umsetzung hat vor allem Raymond Duval versucht (vgl. Duval 2000).

Die hier aufgelisteten Semiotiken zeichnen sich durch eine Gemeinsamkeit aus. Die Bedeutung eines Zeichens besteht – sehr verkürzt gesprochen – in der Referenz auf ein Objekt, auf welches das Zeichen verweist. Diese Bedeutung kann z. B. bei Peirce auch als Resultat eines nicht endlichen Interpretationsprozesses gelesen werden. Ungeachtet eines solchen Prozesses verbleibt die postulierte Existenz eines Referenten. Die implizite Annahme solcher mathematischen Objekte, welche die Bedeutung und die korrekte Verwendung der mathematischen Zeichen regulieren, kann bei Lernenden zu Lernschwierigkeiten führen. Daher scheint es sinnvoll, dass bei Überlegungen zum Zeichengebrauch in der Mathematik eine Vorschlag präsentiert wird, der eine solche „platonistische" Sichtweise vermeidet, gleichzeitig aber keinen Konstruktivismus im Sinne einer kognitiven/psychologischen Theorie darstellt. Es war Ludwig Wittgenstein, der sich in prononcierter Weise als Verfechter eines nichtplatonistischen Standpunktes zeigte (Mühlhölzer 2010). Werfen wir einen Blick auf die einzelnen Beiträge.

Im Band sind, wenn man von der Einleitung absieht, neun Beiträge dem Lernen von Mathematik gewidmet. Die Spannweite der Inhalte ist groß. So finden wir Ausführungen zu eben angedeuteten ontologischen Fragen der Mathematik, wie etwa bei jenen von Willi Dörfler oder auch bei Martin Brunner. Die Untersuchung der Sprache von Lernenden bildet einen zweiten Schwerpunkt. Hier ist nicht nur die Lautsprache gemeint, sondern auch die Verwendung von Gesten sowie die Gebärdensprache. Die Gebärdensprache und deren Verhältnis zum Lernen von Mathematik wird von Annika Wille gemeinsam mit Christof Schreiber sowie die Schnittstellen von Handlung und Gesten durch Rose Vogel und Melanie Huth dargestellt. Einen anderen Fokus richtet Angel Mizzi auf die Sprache, wenn er von einem Mathematikunterricht berichtet, in dem zwischen zwei Sprachen (Erst- und Zweitsprache) gewechselt wird. Die Beiträge von Barbara Ott, Jan Schumacher gemeinsam mit Sebastian Rezat und von Hermann Kautschitsch stellen Überlegungen in den Vordergrund, die unmittelbar mit dem Lernen und dem Gebrauch von Zeichen einhergehen. Vereinfachend gesprochen stehen diese drei Erörterungen für den „stoffdidaktischen" Anspruch der hier vertretenen Semiotik. Erweitern wir diese Überschriften durch knappe Skizzen der entsprechenden Inhalte.

Theoretische Überlegungen

Wenn von Mathematik die Rede ist, so werden mit ihr gerne Eigenschaften wie wahr, zeitlos oder auch allgemeingültig konnotiert. Es wundert wenig, wenn als Folge solcher Zuweisungen die Vorstellung entsteht, dass die Mathematik von Objekten rede, die unabhängig von Menschen existieren und sich durch „zeitlose" Gültigkeit auszeichnen. Dass eine solche Sichtweise zu Widersprüchen führt, zeigt ein Blick in die Geschichte der Philosophie der Mathematik. Willi Dörfler bietet in seinen Ausführungen eine Alternative an. Dabei orientiert er sich an Ludwig Wittgenstein und dessen nüchterner Distanz zu solchen metaphysisch geprägten Sichtweisen. Es ist aber nicht nur die Suche nach Vermeidung von Widersprüchen, die Dörflers Erläuterungen bestimmt. Der Autor möchte vor allem ein Angebot liefern, das es ermöglicht, ohne Rekurs auf ein für die meisten Lernenden unerreichbar scheinendes Objekt Mathematik zu lernen.

Als Charles S. Peirce seine Überlegungen zur Verwendung von Zeichen anstellte – und dieser Prozess dauerte bis an das Ende seines Lebens –, stieß er bald auf die Notwendigkeit der Beschreibung der Entstehung neuen Wissens. Dies führte ihn zum Begriff der theorematischen Deduktion, den Martin Brunner in seinem Text zum Lernen von Mathematik in Beziehung stellt. Brunner geht dabei pragmatisch vor und eröffnet eine instrumentelle Sicht auf die theorematische Deduktion. Es sind Beispiele aus dem Mathematikunterricht, die der Autor verwendet, um diese Deduktion als Mittel der Erkenntnisgewinnung, der Wissensbegründung und der Problemlösung zu präsentieren.

Semiotik in der Praxis, das Sichtbare ordnen

Können wir diagrammatisches Schließen im Sinne der Peirceschen Semiotik lehren und lernen? Dies fragt Hermann Kautschitsch und betont, dass ein auch handwerklich zu verstehender Gebrauch von Diagrammen das Lernen von Mathematik befördern kann. Dazu zählen z. B. die Generierung von Vermutungen und das Finden von Lösungsideen bei inner- und außermathematischen Fragestellungen. Der Autor stellt dazu Lernumgebungen vor, in denen dieses Handwerk gelernt werden könnte.

Jan Schumacher und Sebastian Rezat verwenden ein Thema der Didaktik der elementaren Arithmetik, nämlich das Erlernen der Subtraktion negativer Zahlen, um diagrammatisches Schließen – ein anderer zentraler Begriff der Peirceschen Semiotik – zu untersuchen. So ist ihr Text in zweifacher Weise zu lesen: Zum einen stellt er ein Thema der Mathematik der Sekundarstufe I ins Zentrum, zum anderen gehen die Autoren über eine stoffdidaktische Analyse hinaus und untersuchen gleichzeitig ihr Untersuchungswerkzeug. Wie kann diagrammatisches Schließen rekonstruiert werden? Eine Antwort gelingt den Autoren durch die Konstruktion eines Beziehungsnetzes dieser Art des Schließens zu zwei anderen theoretischen Ansätzen, dem Argumentationsschema nach Toulmin und dem Schema-Begriff von Vergnaud.

Barbara Ott unterstreicht die Bedeutung von Darstellungen für das mathematische Verständnis. In ihrem Beitrag werden die Unterschiede zwischen Textaufgaben und grafischen Darstellungen sowie die Herausforderungen beim Wechsel zwischen diesen beiden Darstellungsformen herausgearbeitet. Anhand typischer Fallbeispiele aus dem Mathematikunterricht in der Primarschule wird rekonstruiert, wie Kinder in einem Unterricht, der grafische Darstellungen in Reflexionsgesprächen ins Zentrum rückt, in ihren selbst generierten grafischen Darstellungen und Erklärungen dafür zunehmend auf mathematische Strukturen achten.

Zeichen hören und Zeichen sehen

Ein aktuelles Problem des alltäglichen Mathematikunterrichts stellt Angel Mizzi in seinem Text vor. Es ist dies die Relation zwischen Erst- und Zweitsprache beim mehrsprachigen Lehren und Lernen. Der damit verbundene Begriff des „Translanguaging“ wird von der Vorstellung bestimmt, dass beim Lernen eine entsprechend befähigte Person mehrere Sprachen aktiviert. Neben theoretischen Überlegungen erläutert Mizzi das schwierige Verhältnis von Erstsprache, also der Muttersprache, zur Zweitsprache, die ebenfalls im Unterricht verwendet wird. An einer Fallstudie zeigt er, dass die Erstsprache tendenziell zur Darstellung konkreter Alltagssituationen und Handlungen verwendet wird, während Lernende die Zweitsprache zum formalen und meist schriftlichen Notieren von mathematischen Sachverhalten einsetzen.

Mit Blick auf den Einfluss der Wahl der Mittel bei mathematischen Erklärungen werden von Annika Wille und Christof Schreiber drei sehr unterschiedliche mediale Umsetzungen von Erklärungen unter einer semiotischen Perspektive untersucht. Die mathematischen Erklärungen wurden als Video und Audio in Lautsprache und als Video in Österreichischer Gebärdensprache realisiert. Zur Analyse der Produkte zum Thema „Haus der Vierecke“ wird das Konzept der „semiotic mediation“ nach Hasan verwendet und für die drei medial unterschiedlichen Erklärungen zum Vergleich herangezogen.

Darüber hinaus hat Annika Wille einen Text erstellt, der gezielt auf die mathematische Gebärdensprache, die in Österreich verwendet wird, einen semiotischen Blick wirft. Dies heißt, dass die bei Peirce herausgearbeiteten Begriffe Index und Ikon zu einer differenzierten Beschreibung von mathematischen Fachgebärden eingesetzt werden. So ist dieser Text ein Beitrag, um Differenzen von Laut- und Gebärdensprache beim Lernen von Mathematik einschätzen zu können.

Rose Vogel und Melanie Huth konzentrieren sich besonders auf die Schnittstellen von Handlungen und Gesten im mathematischen Lernprozess in der Primarstufe. Die Autorinnen fokussieren drei verschiedene Arten von Modusschnittstellen, nämlich funktionale, semantische und chronologische. Hierbei zeigen sie, dass Gesten und Handlungen diagrammatisch verwendet werden können, was sich besonders anhand der Schnittstellen rekonstruieren lässt.

Literatur

Bruner J (1966) Studies in cognitive growth. Wiley, Hoboke

Duval R (2000) Basic issues for research in mathematics education. Paper presented at the proceedings of the 24th conference of International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME 24), Hiroshima University, Japan

Hoffmann MHG (2005) Erkenntnisentwicklung. Vittorio Klostermann, Frankfurt a. M.

Kadunz G (Hrsg) (2010) Sprache und Zeichen Zur Verwendung von Linguistik und Semiotik in der Mathematikdidaktik. Franzbecker, Hildesheim

Kautschitsch H, Metzler W (Hrsg) (1982) Visualisierung in der Mathematik. Teubner, Wien

Kautschitsch H, Metzler W (Hrsg) (1994) Anschauliche und Experimentelle Mathematik II (Vol. 22, Schriftenreihe Didaktik). Teubner, Wien

Mühlhölzer F (2010) Braucht die Mathematik eine Grundlegung? Ein Kommentar des Teils III von Wittgensteins Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik. Vittorio Klostermann, Frankfurt a. M.

Nöth W (2000) Handbuch der Semiotik, 2. Aufl. Metzler, Stuttgart

Otte M (2018) Semiotics, epistemology, and mathematics. In: Presmeg N, Radford L, Roth W-M, Kadunz G (Hrsg) Signs of signification. Springer, Heidelberg, S 155–172

Piaget J, Inhelder B (2013) The growth of logical thinking from childhood to adolescence (Parsons A, Milgram S, Trans). New York: Routledge (Erstveröffentlichung 1958, 1955)

Presmeg NC (1986) Visualisation in high school mathematics. Learn Math 6(3):42–46

Presmeg NC (1994) The role of visually mediated processes in classroom mathematics. ZDM 26(4):114–117

Radford L (2006) The anthropology of meaning. Educ Stud Math 61:39–65

Sáenz-Ludlow A, Kadunz G (Hrsg) (2016) Semiotics as a tool for learning mathematics (Semiotic perspectives in the teaching and learning of mathematics series). Sense Publishers, Rotterdam

Vygotskii LS (1978) Mind in society. Harvard University Press, London

Teil I

Theoretische Überlegungen

Zeichen statt Metaphysik

2

Willi Dörfler

Inhaltsverzeichnis

2.1 Mathematik und ihre Objekte in der Philosophie

In der Philosophie der Mathematik (vgl. Shapiro 2000 oder Thiel 1995) kann man eine weit verbreitete Obsession mit der Frage nach der Existenz und Art mathematischer Objekte beobachten. Dabei gewinnt man den Eindruck, dass irgendeine Form mathematischer Objekte eigentlich außer Frage steht. Die Diskussion dreht sich dementsprechend vorwiegend um deren Eigenschaften und besonders um deren Existenzform sowie deren Verortung. Man kann sogar die Philosophie der Mathematik grob einteilen nach der Art und Weise der Antworten auf diese grundlegenden Fragen, wobei dann natürlich im Detail Differenzierungen vorzunehmen sind. So gibt es unterschiedlichste Schattierungen eines Realismus, eines Platonismus, eines Empirismus, eines Idealismus/Mentalismus, eines Formalismus und anderer Ismen noch darüber hinaus. Allen ist

W. Dörfler (✉)
Institut für Didaktik der Mathematik, Alpen-Adria-Universität Klagenfurt, Klagenfurt, Österreich
E-Mail: willi.doerfler@aau.at

G. Kadunz (Hrsg.), *Zeichen und Sprache im Mathematikunterricht*,
https://doi.org/10.1007/978-3-662-61194-4_2

jedoch gemein, dass ihre Grundannahme über die Mathematik darin besteht, dass mathematische Begriffe, Definitionen, Sätze, Beweise, Theorien etc. eine deskriptive Natur haben. Das heißt, die Mathematik spricht über „etwas“, beschreibt etwas, handelt von etwas, hat also einen Gegenstand, der auch als Prüfstein für ihre Gültigkeit oder Wahrheit gilt, an dem sie sich bewähren muss (siehe Thiel 1995, Kap. 1). In den meisten Formen des Empirismus sind dies die mathematischen Eigenschaften empirischer/ materieller Gegenstände, wie schon Aristoteles gedacht hat (Mathematik in der Natur, vgl. Shapiro 2000, S. 63 ff.). Bei Brouwers Intuitionismus (Shapiro 2000, Kap. 7) sind es dagegen „mentale“ Objekte, die mental „konstruiert“ werden (Mathematik im Kopf). Auch in anderen Formen des Konstruktivismus (etwa in Thiel 1995, S. 238 ff.) hat Mathematik Objekte, die sie als Wissenschaft erforscht; diese werden jedoch hier (nach unterschiedlichen Methoden) erst erzeugt und sind somit nicht wie beim Platonismus bereits vorgegeben. Selbst in radikalen philosophischen Positionen etwa des Fiktionalismus (Shapiro 2000, S. 227 ff.) gibt es mathematische Objekte, auch wenn diese jetzt nur mehr fiktiv, vorgestellt oder postuliert sind. In anderen Positionen wie den Finitismen unterschiedlichster Art werden den mathematischen Objekten diverse Einschränkungen auferlegt wie etwa die, „endlich“ zu sein. Es werden also unendliche Mengen als mathematische Objekte nicht „zugelassen“, wie man an der Alltagspraxis der Mathematik sieht, das jedoch ohne weitere Auswirkungen auf die mathematische Praxis. Zum Finitismus verweise ich auf die ausführliche Darstellung bei Welti (1986).

Es muss allerdings schon gesagt werden, dass die Problematik mathematischer Objekte nicht überall von gleicher Dominanz oder Brisanz ist. In Arten des Formalismus (Shapiro 2000, Kap. 6) stehen formale Systeme aus Axiomen und Deduktionsregeln im Vordergrund, was aber schnell dazu verführt, diese Systeme – oder auch bloß schon die sie aufbauenden Zeichen und Symbole – als die neuen Gegenstände der Mathematik anzusehen, so etwa bei Haskil Curry (1958). Eine Ausnahme könnte auch die formale Arithmetik bei Eduard Heine und Johannes Thomae (ausführlich kritisiert von Frege in seinen „Grundgesetzen der Arithmetik“ 1893) sein, die sich auf die Spielmetapher stützt und dadurch das mathematische Tun ins Zentrum rückt. Die Fixierung auf die Frage nach den mathematischen Objekten gilt auch nicht oder nur sehr eingeschränkt für diejenigen Strömungen, die die mathematische Praxis des „working mathematician“ aus philosophischer oder soziologischer Sicht reflektieren. Eines der ersten Beispiele dafür ist „Proofs and Refutations“ von Imre Lakatos (1976), aktueller sind die Arbeiten von Paolo Mancosu (z. B. 2008). Aber dennoch möchte ich – jedenfalls für diesen Essay – bei meiner Diagnose bleiben. Ein Blick in ein relativ aktuelles Textbuch wie „Thinking about Mathematics“ von Stewart Shapiro (2000) ist ein gewisser Beleg für diese, auch wenn der Autor mit einer Variante des Strukturalismus aufwartet (in Kap. 10), in dem jetzt nicht mehr einzelne mathematische Objekte (wie etwa natürliche Zahlen) von Relevanz sind (ontologisch wie epistemologisch), sondern die von ihnen gebildeten „Strukturen“, wobei dieser Begriff zwangsweise vage bleiben muss und sich wahrscheinlich mit der Mathematik weiterentwickeln wird und muss. Aber das tiefe Verlangen danach, der Mathematik einen Gegenstand zuzuweisen, ist auch hier ungebrochen. Das hängt vielleicht auch mit der philosophischen Doktrin über Bedeutung zusammen: Bedeutung von Zeichen und Sprache resultiert daraus, dass diese auf etwas von ihnen Verschiedenes, etwas außerhalb von ihnen Liegendes verweisen, sich darauf beziehen in einer Form, die als Referenz bezeichnet wird. Gibt es diese nicht, so werden die Zeichen oder Wörter als „bedeutungslos“ angesehen. Und niemand will, dass die Mathematik bedeutungslos wird! Also braucht die Mathematik aus philosophischer (traditioneller) Sicht einen Gegenstand bzw. Objekte. Auch schon deswegen, weil ja jedermann/-frau die Aussagen der Mathematik als unzweifelhaft „wahr“ ansieht. Und auch dafür bedarf es der Gegenstände, für die die mathematischen Sätze dann eben gelten müssen, damit sie „wahr“ sein können. Fehlen die (unabhängigen) Gegenstände, dann werden die Aussagen im philosophischen Diskurs einfach als falsch angesehen, und auch das kann man nicht wollen. Meine Diagnose passt auch sehr gut zur Meinung vieler prominenter Mathematiker und Logiker (etwa Gottlob Frege, Kurt Gödel oder G.H. Hardy) wie auch (vgl. Heintz 2000, wo auch Zitate dieser Autoren zu finden sind) zu der Meinung der Mehrheit der professionellen Mathematiker (meist als „naiver Platonismus“ einzuordnen). Eine traditionelle Sicht auf Wissenschaft, auf Forschung und Erforschung, auf Begriffe wie Wahrheit, Wissen, Erkenntnis und Ähnliches erfordert fast zwangsweise eine solche Sicht auf Mathematik und ihre „Objekte“. Wissenschaft ist in einem solchen Verständnis immer „Wissenschaft von etwas“, und die Frage nach diesem „Etwas“ scheint eben das Grundthema einer Philosophie der Mathematik von Plato bis heute zu sein.

2.2 Mathematik als ganz besondere Wissenschaft

Es gibt in der Philosophie der Mathematik einen anderen Strang von Überlegungen, die sich mit der Mathematik zugeschriebenen besonderen Eigenschaften und Charakteristika beschäftigen. Dies wird von Bettina Heintz (2000) sehr ausführlich dargelegt. Derartige Untersuchungen sind oft eng mit den Positionen zur Qualität und Seinsweise der mathematischen Objekte verknüpft. Dabei gilt ganz allgemein, dass sich die verschiedenen philosophischen Sichtweisen unterschiedlich gut dazu eignen, diese Charakteristika der Mathematik zu erklären oder sie zumindest plausibel zu machen. Ein Grundzug besteht bei diesen Bemühungen darin, die an der Mathematik beobachteten Phänomene auf entsprechende Eigenschaften ihres Gegenstandes oder ihrer Objekte zurückzuführen: Die Mathematik ist so, wie sie ist, bzw. muss sogar so sein, weil ihre Objekte so und so sind. Man könnte hier natürlich den Verdacht äußern, dass die mathematischen Objekte gerade so gedacht oder postuliert werden, damit sie zu den besonderen Eigenschaften der Mathematik passen. Dabei treten jedoch zum Teil unüberwindbare Schwierigkeiten und auch Widersprüche auf, weil jede der Sichtweisen auf mathematische Objekte gewisse der sogenannten Charakteristika „erklärt“, bei anderen aber in dieser Hinsicht versagt. Meine Einschätzung ist, dass keine der im ersten Abschnitt erwähnten philosophischen Richtungen mit dem Phänomen „Mathematik“ vollständig kompatibel ist. Als Beispiel sei etwa erwähnt, dass der traditionelle

Platonismus (wenn man an ihn glaubt) sehr gut die Exaktheit und Universalität der Mathematik „erklärt“, aber hinsichtlich Anwendungen und Lernbarkeit von Mathematik in große Schwierigkeiten hineinschlittert. Mit den Anwendungen haben dagegen alle Versionen des Empirismus keine Probleme, wohl aber etwa mit der Exaktheit sowie der Nicht-Falsifizierbarkeit der Mathematik durch empirische Beobachtungen. Das mathematische Unendliche ferner ist für die Empiristen ein „Ärgernis“; Platonisten haben aber in aller Regel keine Bedenken, auch entsprechende platonische Objekte anzunehmen, wie dies beispielhaft und extrem Kurt Gödel (vgl. Shapiro 2000, S. 202 ff.) vorführt.

Nach dieser einleitenden Skizze sollen die wichtigsten sogenannten Charakteristika der Mathematik vorgestellt werden. Manche davon stehen weitgehend außer Diskussion und sind in diesem Sinne anerkannt: in der Mathematik, in der Philosophie und auch Soziologie der Mathematik wie zudem in der populären Alltagssicht auf die Mathematik. Andere wiederum werden heftig diskutiert und auch infrage gestellt, wie zum Beispiel die Ahistorizität der Mathematik. Generell ist es möglich, diese Charakteristika als gegebene Eigenschaften des ebenfalls fix vorliegenden Phänomens „Mathematik“ anzusehen, oder aber umgekehrt zu sagen, dass wir eben nur das zur Mathematik zählen, was weitgehend diesen Charakteristika entspricht. Im ersten Fall erhalten wir eine Beschreibung der Mathematik, im zweiten Fall eine Art Übereinkunft, was wir zur Mathematik zählen wollen. In beiden Fällen ist aber eine Begründung oder eine Rechtfertigung erforderlich, die im ersten Fall auch einer empirischen Überprüfung zugänglich sein sollte. Zu diesen Charakteristika möchte ich die folgenden Aspekte zählen (vgl. dazu etwa Heintz 2000). Für ihre besondere Bedeutung und Rolle für die Mathematik und auch für ein allgemeines Verständnis ist ein Vergleich mit den Naturwissenschaften hilfreich und informativ.

Mathematische Aussagen über mathematische Objekte sind absolut exakt und genau, sie sind eben apodiktisch. Es gibt keine Messfehler, keine Näherungswerte oder dergleichen. Mathematische Aussagen sind in diesem Sinne eindeutig.

Zu mathematischen Aussagen gibt es keine sinnvolle Alternative, eine solche ist nicht vorstellbar, jedenfalls nicht nachdem ein Beweis erfolgt ist. Was könnte denn eine irgendwie sinnvolle und vorstellbare Alternative etwa zu arithmetischen Gleichungen sein? Aber demgegenüber ist es vorstellbar, dass die Sonne oder die Erde stillstehen, dass ein Stein nach oben fällt (man denke an die Wunder in der Religion).

Mathematische Aussagen/Sätze sind unveränderlich, sie haben keine zeitliche Entwicklung, sie gelten immer, oder besser, sie sind zeitlos oder außerzeitlich. Mathematische Theorien können zwar aus der Mode kommen, aber sie werden nie ungültig oder gar falsch. Ein solches Schicksal bleibt bekanntlich vielen naturwissenschaftlichen Theorien nicht erspart. Beispiele sind die aristotelische Mechanik, Phlogiston, die Vortex-Theorie von Descartes, ja selbst die Newtonsche Mechanik! Aber unsere Arithmetik oder die (euklidische) Geometrie sind seit Jahrtausenden im Wesentlichen unverändert. Das zeigt sich auch in der üblichen Formulierung mathematischer Sätze, die immer im Präsens erfolgt und keinerlei Angabe über einen Zeitpunkt der Formulierung enthält. Die Zuschreibung zu einem Mathematiker ist hier vollkommen unwesentlich für das Verständnis des Satzes.

Mathematik ist unabhängig von sozialen, politischen, ökonomischen und historischen Bedingungen und Umständen, jedenfalls was die Gültigkeit ihrer Aussagen betrifft. Das hat sogar Karl Mannheim, der Begründer der Wissenssoziologie, mit Bedauern festgestellt, nachzulesen bei Heintz (2000). Natürlich ist es von gesellschaftlichen und kulturellen Bedingungen abhängig, ob überhaupt Mathematik betrieben wird und zu welchen Zwecken. In den Naturwissenschaften lässt sich demgegenüber ein gewisser Einfluss solcher Bedingungen auch auf die Inhalte und die Form der Theorien nachvollziehen, ja selbst Religion wirkt(e) auf das naturwissenschaftliche Denken ein, siehe etwa die bekannten Bücher von Kuhn (1978) oder Feyerabend (1986).

Mathematische Sätze – wenn einmal bewiesen – sind unveränderlich „wahr", noch nie wurde ein solcher Satz falsifiziert im Sinne etwa von Karl Popper, wie das für die Naturwissenschaften dagegen fast zu einem konstitutiven Merkmal wurde. Dieses Phänomen darf nicht mit Fehlern oder Irrtümern in Beweisen verwechselt werden, die es natürlich (in großer Zahl) gibt. Es wird auch von Autoren wie Putnam oder Quine (vgl. dazu Shapiro 2000, S. 212 ff.) infrage gestellt, die eher nur einen graduellen Unterschied zwischen Mathematik (und Logik) und Naturwissenschaften machen (etwa hinsichtlich Allgemeinheit), aber nicht einen kategoriellen, wie wir ihn bei Wittgenstein finden werden. Hier liegt ein anderer Aspekt der Unzeitlichkeit oder Außerzeitlichkeit der Mathematik vor.

Es gibt keine konkurrierenden mathematischen Theorien wie in der Physik oder besonders in den Sozialwissenschaften. Selbst intuitionistische und klassische Mathematik leben friedlich nebeneinander und es werden etwa die Gemeinsamkeiten und Unterschiede mathematisch untersucht. Ähnlich ist das Phänomen, dass es keinen mathematischen Streit gibt, der nicht relativ leicht „mathematisch" beigelegt werden kann, worauf auch schon Wittgenstein hingewiesen hat. Davon zu unterscheiden sind natürlich Diskussionen darüber, welche Theorie die „schönere" oder „elegantere" ist. Man hat sich auch daran gewöhnt, dass Euklidische und Nicht-euklidische Geometrien mathematisch gleichberechtigt sind und ihre Anwendbarkeit auf physikalische Phänomene keine mathematische Frage sein kann. „Konkurrenz" zwischen mathematischen Theorien besteht also vielleicht hinsichtlich Anwendbarkeit oder „Schönheit", aber nicht hinsichtlich Gültigkeit.

Mathematischen Aussagen kommt zeitliche und geografische Universalität zu, sie gelten unabhängig von Zeit und Ort; sie können ohne große Schwierigkeiten in verschiedenste Kulturen transportiert werden. Ein überzeugendes Beispiel dafür ist das erfolgreiche und historisch gut dokumentierte Zusammentragen mathematischer Ergebnisse und Methoden aus den verschiedensten Quellen in der arabisch-muslimischen Kultur vom 8. bis ins 15. Jahrhundert sowie deren Vertiefung und Weiterführung dort (etwa Dezimalzahlen, Algebra bei al-Khwarizmi, siehe z. B. Katz 2014, Kap. 9).

Zum Teil in einem scheinbaren Widerspruch oder zumindest einem Spannungsverhältnis zu den bisherigen Aspekten steht die notorische Anwendbarkeit der Mathematik in den Naturwissenschaften und natürlich weit darüber hinaus. Dies schon allein dadurch, dass, wie mehrfach angemerkt, diese Wissenschaften teilweise zur Mathematik konträre Charakteristika aufweisen.

Diese Liste kann man auch noch weiter fortführen und die Leserin wird dafür auf das Buch von Bettina Heintz (2000) verwiesen. Insgesamt ergibt sich, zumindest wenn man diese Zuschreibungen ernst nimmt, ein Bild von Mathematik, in dem diese einen Sonderstatus gegenüber allen anderen Wissenschaften besitzt, weil zumindest einige dieser Charakteristika auf selbige nicht zutreffen. Man sollte vielleicht noch auf das Faktum verweisen, dass in der Mathematik das Beweisen in seinen vielfältigsten Formen als die einzige legitime Methode zur Sicherung von Ergebnissen akzeptiert wird. Wittgenstein betont immer wieder, dass es in der Mathematik keine Experimente im Sinne der Physik gibt, und verweist auf den essenziellen Unterschied zwischen Experiment und Beweis. So sagt er etwa, dass ein Film oder ein Foto eines Experimentes kein Experiment ist, wohingegen ein Film/Foto von einem Beweis sehr wohl ein Beweis ist (oder als solcher verwendet werden kann).

Diese weithin anerkannte Sonderstellung der Mathematik (bei Wittgenstein: die Härte des logischen Muss, vgl. Kroß 2008) verlangt natürlich nach einer Aufklärung oder Legitimierung. Worin begründet sich die Sonderstellung, was kann sie plausibel machen? Dies hat meines Erachtens auch didaktische Relevanz, weil die Mathematik durch die ihr so zugeschriebenen Eigenschaften einen eigenartigen mystischen und unwirklichen Charakter erhält, der Ehrfurcht, aber eventuell auch Angst einflößen kann. Vor allem die Unausweichlichkeit mathematischer Ergebnisse, der Zwang, der von der Mathematik auszugehen scheint, die Wittgensteinsche „Unerbittlichkeit" sind vielleicht für viele/manche Lernende abschreckend und schwierig zu akzeptieren. Das heute im Mathematikunterricht und besonders auch bei Prüfungsthemen oft zu beobachtende Ausweichen in diverse Anwendungen mit Entscheidungsspielräumen und Diskussionsbedarf ist leider nur eine Notlösung oder eigentlich gar keine Lösung des damit nur verdeckten Problems. Mathematik lässt sich eben nicht auf die Anwendungen reduzieren und auch nicht auf sie begründen. Auch eine Reduktion des Mathematiklernens auf mathematische Techniken ist nicht hilfreich, weil im Prinzip für diese dieselben Phänomene gelten. Eine Möglichkeit bestünde darin zu sagen, dass diese Charakterisierungen der Mathematik gar nicht zutreffend sind oder höchstens eingeschränkt und graduell gelten. Quine (nach Shapiro 2000, S. 212 ff.) etwa versucht, die Mathematik und die Logik in ein Kontinuum mit den Naturwissenschaften zu stellen, was aber erwartungsgemäß beim Begriff des Unendlichen (transfinite Mengen bei Cantor) auf unüberwindliche Schwierigkeiten oder sehr artifizielle Kunstgriffe führt. Etwas vergröbert kann man sagen, dass alle eingangs genannten philosophischen Positionen an einer auch nur halbwegs vollständigen Aufklärung der skizzierten Sonderstellung der Mathematik scheitern. Dies ließe sich im Detail nachvollziehen, doch liegt der Hauptzweck dieses Beitrages nicht in den negativen Analysen, sondern eben im dem positiven Versuch, ausgehend von Wittgensteinschen Gedanken eine positive Analyse anzubieten. Auch kann gesagt werden, dass die genannten philosophischen Ansätze alle einen starken metaphysischen Anteil oder Aspekt haben, der hochgradig spekulativ ist und eigentlich das, was erklärt werden soll, als Erklärung einsetzt. So wird die Zeitlosigkeit oder Außerzeitlichkeit der Mathematik als Begründung für die entsprechenden Eigenschaften der mathematischen Objekte angeführt, als deren Beschreibung die Mathematik in Versionen des Platonismus angesehen wird. Kurz – und sicher auch verkürzt – möchte ich behaupten, dass alle Philosophien der Mathematik, die einer Vorstellung von mathematischen Objekten anhängen, welche in irgendeiner Weise der Mathematik vorgängig sind, keine befriedigenden Lösungen für die hier diskutierte Problematik anbieten können. Unabhängig davon, wo die mathematischen Objekte „verortet" werden (als platonische Ideen, in der Natur, im Geist, in der Gesellschaft oder Kultur etc.): Es treten stets ziemlich künstliche Annahmen auf, die es dann erst ermöglichen, von den Objekten auf die Eigenschaften der Mathematik zu „schließen".

Irgendwie ist dieses fast verkrampfte Festhalten am Konzept der mathematischen Objekte durchaus verständlich. Mathematische Texte und ihre Sätze verwenden ja eine Sprache, in der es nur so von „Objekten" wie Zahlen, Funktionen, Figuren, Räumen etc. wimmelt. Mathematische Sätze haben stets die grammatische Form einer Aussage über solche Objekte und deren Eigenschaften, sodass sie formal etwa von empirischen Sätzen nicht unterscheidbar sind. Also: Mathematik hat prima facie Objekte, und sie handelt von diesen. In dieser Situation hilft nur ein radikales Umdenken, und ein solches kann man, wenn man dies will, in den Erörterungen über Mathematik bei Wittgenstein finden (vgl. Wittgenstein 1984a). Dem möchte ich mich nun zuwenden.

2.3 Sprachspiele, Regeln und ihre Objekte

Die nachfolgenden Überlegungen wurden durch die Lektüre verschiedener Texte von Wittgenstein selbst („Bemerkungen zu den Grundlagen der Mathematik", „Philosophische Untersuchungen" u. a.) bzw. von Arbeiten über seine Philosophie, insbesondere die der Mathematik (etwa bei Mühlhölzer 2010), angeregt. Sie stellen meine Interpretation der Äußerungen von Wittgenstein über die Mathematik dar und ich beanspruche nicht, damit eine authentische Sichtweise einer Position Wittgensteins zu bieten (falls es eine solche in eindeutiger Form überhaupt gibt). Jedoch muss ich zugestehen, dass ich ohne das Nachdenken über Wittgensteins Anmerkungen und insbesondere seine Fragen nicht zu der nun zu präsentierenden Sichtweise gekommen wäre. Im Folgenden werden auch Kenntnisse über Wittgensteins Philosophieren vorausgesetzt, weil es unmöglich ist, hier eine halbwegs ausreichende Darlegung dessen vorzunehmen. Aber ich verweise dafür auf die Bücher im Literaturverzeichnis sowie auf meine eigenen Arbeiten (Dörfler 2013a, b, 2014, 2016).

Jedoch möchte ich durch eine kleine Auswahl von Zitaten versuchen, eine groben Eindruck von Wittgensteins Art des Philosophierens zu geben – und damit auch einen Hintergrund, aber sicher keine „Belege" für die anschließenden Überlegungen liefern. Die Zitate sind mit einer Ausnahme aus den „Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik" entnommen und es werden in Klammern immer Teil und Paragraf angegeben.

> Was ist das Kriterium dafür, wie die Formel gemeint ist? Doch wohl die Art und Weise, wie wir sie ständig gebrauchen, wie uns gelehrt wurde, sie zu gebrauchen. (I, § 2)
>
> Worin liegt dann aber die eigentümliche Unerbittlichkeit der Mathematik? […] Zählen (und das heißt: so zählen) ist eine Technik, die täglich in den mannigfachsten Verrichtungen unseres Lebens verwendet wird. Und darum lernen wir zählen, wie wir es lernen: mit endlosem Üben, mit erbarmungsloser Genauigkeit. (I, § 4)
>
> Wenn wir sagen: „dieser Satz folgt aus jenem", so ist hier „folgen" wieder unzeitlich gebraucht. (Und das zeigt, daß dieser Satz nicht das Resultat eines Experiments ausspricht.) (I, § 104)
>
> Die Schritte, welche man nicht in Frage zieht, sind logische Schlüsse. Aber man zieht sie nicht darum nicht in Frage, weil sie „sicher der Wahrheit entsprechen" – oder dergl. –, sondern dies ist es eben, was man „Denken", „Sprechen", „Schließen", „Argumentieren" nennt. (I, § 156)
>
> In welchem Verhältnis steht er [der mathematische Satz, W. D.] zu diesen Erfahrungssätzen? Der mathematische Satz hat die Würde einer Regel. (I, § 165)
>
> Sie [die Mathematik, W. D.] schafft immer neue Regeln: baut immer neue Straßen des Verkehrs; indem sie das Netz der alten weiterbaut. (I, § 166)
>
> Der Mathematiker ist ein Erfinder, kein Entdecker. (I, § 168)
>
> Wir beschreiben mit Hilfe der Regel. Wozu? Warum? Das ist eine andere Frage. / Der mathematische Satz bestimmt einen Weg; er legt für uns einen Weg fest. / Es ist kein Widerspruch, daß er eine Regel ist und nicht einfach festgelegt, sondern nach Regeln erzeugt. (IV, § 8)
>
> Mit anderen Worten: Wer an die mathematischen Gegenstände glaubt, und ihre seltsamen Eigenschaften, kann der nicht doch Mathematik betreiben? Oder: treibt der nicht auch Mathematik? / Idealer Gegenstand. „Das Zeichen ‚a' bezeichnet einen idealen Gegenstand" soll offenbar etwas über die Bedeutung, also den Gebrauch von „a" aussagen. Und es heißt natürlich, daß dieser Gebrauch ähnlich ist dem eines Zeichens, das einen Gegenstand hat, und daß es keinen Gegenstand bezeichnet. Es ist interessant, was der Ausdruck „idealer Gegenstand" aus diesem Faktum macht. (V, § 5)
>
> […] als unterschiede sich der mathematische Satz von einem Erfahrungssatz insbesondere darin, daß wo die Wahrheit des Erfahrungssatzes schwankend und ungefähr ist, der mathematische Satz sein Objekt exakt und unbedingt wahr beschreibt. Als wäre eben die „mathematische Kugel" eine Kugel. (V, § 4)
>
> Ist schon das mathematische Alchemie, daß die mathematischen Sätze als Aussagen über mathematische Gegenstände betrachtet werden, also die Mathematik als die Erforschung dieser Gegenstände? (V, § 16)
>
> Die Regel ist als Regel losgelöst, steht, sozusagen, selbstherrlich da; obschon, was ihr Wichtigkeit gibt, die Tatsachen der täglichen Erfahrung sind. (VII, § 3)
>
> Man kann es so auffassen – will ich sagen –, daß die Schlußregeln den Zeichen ihre Bedeutung geben, weil sie Regeln der Verwendung dieser Zeichen sind. Daß die Schlußregeln zur Bedeutung der Zeichen gehören. In diesem Sinne können die Schlußregeln nicht falsch oder richtig sein. (VII, § 30)
>
> Warum rede ich immer vom Zwang durch die Regel; warum nicht davon, daß ich ihr folgen wollen kann? Denn das ist ja ebenso wichtig. Aber ich will auch nicht sagen, die Regel zwinge mich so zu handeln, sondern sie mache es mir möglich, mich an ihr anzuhalten und von ihr zwingen zu lassen. (VII, § 66)

> Die Mathematik bildet ein Netz von Normen. (VII, § 67)
>
> Ist aber nicht bei uns das Verhältnis der Längen des Meters und des Fußes experimentell bestimmt worden? Doch; aber das Ergebnis wurde zu einer Regel gestempelt. (VII, § 69)
>
> In der Mathematik ist alles Algorithmus, nichts Bedeutung; auch dort, wo es so scheint, weil wir mit Worten über die mathematischen Dinge zu sprechen scheinen. Vielmehr bilden wir dann eben mit diesen Worten einen Algorithmus. (siehe Wittgenstein 1984b, S. 468)

Auch sei vorweg festgehalten, dass es ausschließlich um die Mathematik als sogenannte „reine" Mathematik geht, um deren Sonderstellung und um die teilweise fast mystischen Eigenschaften, die ihr zugeschrieben werden (wie oben ja ausgeführt). Wittgenstein ist vielfach bemüht, das „Mathematische" an der Mathematik zu klären, was dann auch eine Klärung der „Sonderstellung" ermöglichen würde. Er versucht den qualitativen und konstitutiven Unterschied zwischen Mathematik und empirischen Wissenschaften, insbesondere den Naturwissenschaften, herauszustellen. Dabei steht immer wieder im Fokus, dass Letztere beschreibend sind, dass sie von Sachverhalten handeln, an denen sie sich bewähren müssen, und dass es dort Experimente sind, die zur Prüfung von Aussagen verwendet werden. All dies, so interpretiere ich Wittgenstein, trifft auf die Mathematik und ihre Aussagen nicht zu; insbesondere gibt es keine mathematischen Sachverhalte, die sozusagen erst durch die Mathematik aufgeklärt oder durch ihre Aussagen beschrieben werden. Damit sind wir aber noch nicht viel weiter, als ohnedies durch die Sichtweise der Sonderstellung schon vorliegt, sondern diese wird nur noch erweitert oder vertieft.

Unser Klärungsversuch wird jedoch weitergeführt, wenn man sich zu einer Kernthese Wittgensteins wendet: Will man erfahren, was ein Zeichen, ein Wort, ein Satz, ein Beweis etc. „bedeutet", so muss man nachsehen, wie sie verwendet werden. Bedeutung in ihrer traditionellen Form der Beziehung auf „etwas" als den Träger der Bedeutung wird damit durch den Gebrauch ersetzt. Für Wittgenstein ist auch die übliche Referenz ein Aspekt des Gebrauchs der Zeichen. Dieser Gebrauch der Zeichen jeder Art erfolgt jedoch nicht isoliert, sondern organisiert in der Form von Zeichenspielen oder Sprachspielen, für die Wittgenstein viele, auch artifizielle Beispiele gibt. Wenn wir eine Sprache sprechen, so sprechen oder „spielen" wir viele verschiedene, aber auch miteinander verwobene Sprachspiele, in denen die Wörter und Zeichen durch ihren Gebrauch im Sprachspiel Bedeutung erhalten oder einfach haben. Analoges gilt für die Zeichenspiele in der Mathematik: das Rechnen in der Arithmetik, das Zeichnen in der Geometrie, das Beweisen in der Analysis etc. Wichtig ist dabei der Gedanke Wittgensteins, dass das Zeichenhandeln im Zeichenspiel durch Regeln geleitet (aber nicht determiniert) wird, die sowohl explizit als auch implizit sein können. Wittgenstein verwendet wie schon andere vor ihm (u. a. J. Thomae, siehe Shapiro 2000, S. 141 ff.) dabei die Analogie insbesondere zum Schachspiel. Ob und wie ein Zeichen etwas bezeichnet, wird also durch das jeweilige Zeichenspiel festgelegt, durch gewisse Regeln des Zeichengebrauchs (im krassen Gegensatz zur klassischen Sicht, dass das Bezeichnete den Gebrauch der Zeichen steuert und kontrolliert). Nach solchen Regeln kann etwa ein Hauptwort so verwendet werden, als ob es für einen Gegenstand stünde, obwohl es für keinen Gegenstand steht. Nach meiner Meinung denkt Wittgenstein dabei insbesondere an Zahlnamen oder Zahlzeichen.

Diese Verschiebung zum Gebrauch und zur Verwendung von Zeichen jeglicher Art ermöglicht nun auch einen Ansatz zur Klärung des „Mathematischen“ an der Mathematik und ihren Aussagen, etwa im Unterschied zu den Naturwissenschaften. Dieses „Mathematische“ muss sich demgemäß im Gebrauch zeigen (und nicht an irgendeiner äußerlichen Form etwa mathematischer Sätze). Wittgenstein bietet hier verschiedene Konzepte an, die sich aber auf einen gemeinsamen Nenner bringen lassen: Mathematische Sätze werden in der mathematischen Praxis, und zwar in Theorie und Anwendung, als Regeln verwendet. Gleich vorweg: Damit sind andere, dann eben nicht mathematische Verwendungsformen aber nicht ausgeschlossen. Wittgenstein verweist mehrfach auf den Vorgang, wobei empirische Sätze – wie er sagt – zur Regel verhärtet werden (vgl. dazu Ramharter und Weiberg 2006).

Diese weit reichende Sichtweise bedarf aber jetzt der Erläuterung. Jede arithmetische Gleichung ist eine solche Regel, die wir dann auch zur Prüfung empirischer Sachverhalte verwenden können oder zur Prüfung der Korrektheit einer Rechnung. Ihre Verwendung in der Mathematik besteht eben gerade nicht in der Beschreibung eines „arithmetischen Sachverhalts“ (als einer Eigenschaft von oder einer Beziehung zwischen Zahlen). Eine solche Auffassung ist vielleicht eine der großen „Schwächen“ vieler Philosophien der Arithmetik, indem sie genau von dieser Prämisse ausgehen und dann nach der Qualität der Zahlen fragen. Aber auch in dem, was Wittgenstein die „Prosa“ zur Mathematik nennt, dominiert eine solche eher metaphysische Sichtweise, also in der umgangssprachlichen Deutung mathematischer Ergebnisse als Aussagen über eine Art von mathematischer Realität. Dies wird durch die äußere Form mathematischer Sätze suggeriert, die ja im Allgemeinen als Aussagen über Eigenschaften von Objekten und Beziehungen zwischen solchen formuliert sind, in sprachlicher Analogie zu empirischen Aussagen. Dies erfolgt meist in einer Subjekt-Prädikat-Form, was zu einer der von Wittgenstein aufgezeigten „Täuschungen“ durch die Sprache führt, an denen nach ihm die Philosophie leidet (vgl. Wittgenstein 1989). Auch dieses Phänomen bedarf natürlich der Aufklärung: Wieso sind mathematische Sätze prima facie Aussagen über „Sachverhalte“? Und wie ist dies mit der These vereinbar, dass mathematische Sätze gerade nicht deskriptiv sind, oder noch schärfer formuliert, dass mathematische Sachverhalte nicht unabhängig von den mathematischen Zeichenspielen „existieren“ bzw. die Rede von ihnen außerhalb der Zeichenspiele (also von mathematischen „Theorien“) nicht sinnvoll ist? Ich meine, dass auch dies durch die Interpretation von mathematischen Sätzen als Regeln in einem Zeichen- und Sprachspiel geleistet werden kann.

2.4 Hinweise auf den Regelcharakter

Kehren wir also zur Kernthese zurück: Mathematische Sätze werden in der Mathematik als Regeln verwendet, haben in der Mathematik Regelcharakter. Ich möchte dies noch dadurch erweitern, dass selbst wenn mathematische Sätze in irgendeinem metaphysischen Sinne (wahre) Beschreibungen von Eigenschaften ebenso metaphysischer Objekte sein sollten, dies in der mathematischen Tätigkeit etwa des Beweisens keine wie auch immer geartete Rolle spielt. Ein nüchterner Blick auf Beweise zeigt nämlich, dass die Objekte, für die Zeichen gegebenenfalls stehen könnten, dort in keiner Weise auftreten. Was wir vorfinden, sind eben nur die Zeichen, die nach bereits etablierten Regeln verwendet und manipuliert werden. Es werden ausschließlich Definitionen und bereits bewiesene Sätze verwendet, der eher mystische Bezug auf von den Zeichen verschiedene Objekte findet nicht die geringste Verwendung (wie sollte das auch erfolgen?). Die Sätze sind in dieser Weise ein System von Regeln zum Gebrauch, zur Verwendung der Zeichen, Terme und auch Fachausdrücke. Das Regelsystem legt fest, wie mit den diversen Zeichen operiert werden kann oder soll, welche Zeichen gebildet werden können, wie sie sich kombinieren lassen etc. Gewisse Zeichen spielen dabei die Rolle von Indizes, indem sie im Zeichenspiel die Rolle der Referenz auf Objekte übernehmen, wobei diese Rolle ausschließlich durch die Regeln des jeweiligen Zeichenspiels festgelegt bzw. konstituiert wird. Im Zeichenspiel der Arithmetik werden die Zahlzeichen zu Zeichen für Zahlen. Was die Zahlen „sind", ist aber ausschließlich durch die arithmetischen Regeln festgelegt – in Analogie dazu, dass beim Schach durch die Spielregeln festgelegt ist, was etwa ein Bauer „ist". Es gibt also gar keine sinnvolle Möglichkeit, außerhalb der Arithmetik sozusagen vorab festzulegen, was Zahlen sind. Wir haben also nach dieser These (die eigentlich bloß der Vorschlag für eine mögliche Sichtweise auf die Mathematik ist) in der Mathematik ein System von Zeichen-/Sprachspielen, in denen Regeln für den Gebrauch von Zeichen verschiedenster Art entworfen und entwickelt werden.

Als ein Beispiel erwähne ich noch unendliche Mengen. Deren mathematische Definition legt meines Erachtens fest, wie in der Mathematik das Wort (oder vielleicht der Begriff) „unendliche Menge" verwendet werden, wie mit ihm operiert werden soll. Aus einer solchen Festlegung (durch Axiome) werden dann mannigfaltige Konsequenzen wieder nach festgelegten Regeln abgeleitet. In dieser Sichtweise ist es verwirrend, von einer „Theorie transfiniter Mengen" zu sprechen, was ja eine Verwandtschaft mit naturwissenschaftlichen Theorien suggeriert. Besser wäre: Theorie des mathematischen Sprechens über das Unendliche (auch wenn es dieses gar nicht gibt). Das lässt die Möglichkeit verschiedener solcher „Sprechweisen" offen, was man ja in den unterschiedlichen Mengentheorien realisiert findet. Überhaupt kann man feststellen, dass diese Wittgensteinsche Sichtweise ein klare Realisierung oder Entsprechung in Form der formalen axiomatischen Theorien gefunden hat, in denen durch die Axiome ein Regelsystem zur Handhabung der für die Theorie vereinbarten Zeichen festgelegt wird. Formale axiomatische Theorien (wie etwa die Gruppentheorie) haben im Allgemeinen viele verschiedene nichtisomorphe „Modelle", was meines Erachtens schon zeigt, dass diese Theorien nicht als deskriptiv aufgefasst werden können, d. h. nicht als Beschreibungen von Sachverhalten. Konsistenter erscheint mir die Interpretation solcher Theorien als ein System von Regeln zur Beschreibung, als ein Paradigma, wie es Wittgenstein nennt, für Beschreibungen. Die Regeln des Systems (die Axiome und Sätze) bestimmen, wie eine Beschreibung mittels dieses Systems auszusehen hat und welche Regeln eben dort gelten müssen. Das Regelsystem kontrolliert