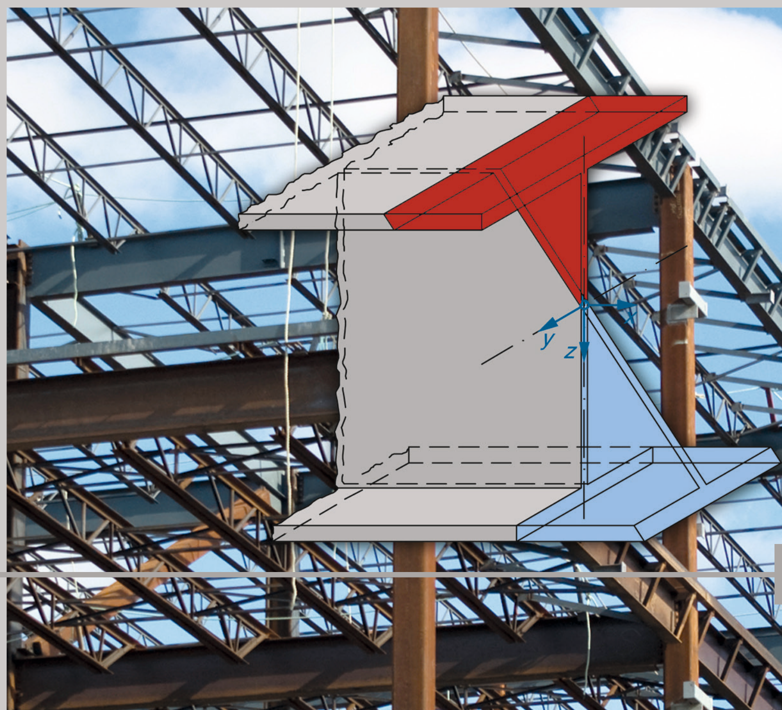
Jens J. Göttsche
Maritta Petersen

Festigkeitslehre – klipp und klar

Ein Lehr- und Übungsbuch für Studierende des Bauingenieurwesens



4., aktualisierte Auflage

HANSER

Göttsche/Petersen

Festigkeitslehre

Lehrbücher des Bauingenieurwesens

Bletzinger/Dieringer/Fisch/Philipp • *Aufgabensammlung zur Baustatik*

Dallmann • *Baustatik*

Band 1: Berechnung statisch bestimmter Tragwerke

Band 2: Berechnung statisch unbestimmter Tragwerke

Band 3: Theorie II. Ordnung und computerorientierte Methoden der Stabtragwerke

Engel/Lauer • *Einführung in die Boden- und Felsmechanik*

Engel/Al-Akel • *Einführung in den Erd-, Grund- und Dammbau*

Fouad/Zapke • *Bauwesen Taschenbuch*

Freimann • *Hydraulik für Bauingenieure*

Göttsche/Petersen • *Festigkeitslehre – klipp und klar für Studierende des Bauingenieurwesens*

Jochim/Lademann • *Planung von Bahnanlagen*

Krawietz/Heimke • *Physik im Bauwesen*

Malpricht • *Schalungsplanung*

Rjasanowa • *Mathematik für Bauingenieure*

Rjasanowa • *Mathematische Modelle im Bauingenieurwesen*

Jens Göttsche

Maritta Petersen

Festigkeitslehre - klipp und klar

Ein Lehr- und Übungsbuch für Studierende des Bauingenieurwesens

4., aktualisierte Auflage

HANSER

Autoren:
Prof. Dr.-Ing. Jens Göttsche
hochschule 21, private und staatlich anerkannte Fachhochschule, Buxtehude
Studienbereich Bauwesen
http://www.goettsche-web.de

Prof. Dr.-Ing. Maritta Petersen
hochschule 21, private und staatlich anerkannte Fachhochschule, Buxtehude
Studienbereich Bauwesen

MIX
Papier aus verantwortungsvollen Quellen
FSC® C016439
FSC www.fsc.org

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek:
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Internet: www.hanser-fachbuch.de

Lektorat: Frank Katzenmayer
Herstellung: Anne Kurth
Covergestaltung: Max Kostopoulos
Coverkonzept: Marc Müller-Bremer, www.rebranding.de, München
Satz: Jens Göttsche, Maritta Petersen, Buxtehude
Druck und Bindung: Hubert & Co. GmbH und Co. KG BuchPartner, Göttingen
Printed in Germany

Print-ISBN 978-3-446-46288-5
E-Book-ISBN 978-3-446-46356-1

Vorwort zur 4. Auflage

Dieses Lehrbuch richtet sich vorrangig an Studierende des Bauingenieurwesens im Grundstudium. Aber auch Studierenden aus anderen Ingenieurfächern kann das Buch nützlich sein. Die Festigkeitslehre ist häufig ein ungeliebtes Teilgebiet der Statik, in dem viele Studierende häufig Formeln anwenden, ohne deren Grundlagen zu kennen. Dieses Buch hat sich zum Ziel gesetzt, die Festigkeitslehre und deren grundlegende Zusammenhänge durch gründliche Aufbereitung der theoretischen Grundlagen in vielen Teilschritten zu verdeutlichen. Dabei wird klargestellt, dass die Festigkeitslehre nicht eine so exakte Wissenschaft ist wie die Mathematik, sondern auf vielen Vereinfachungen, Hypothesen und Reglementierungen basiert. Viele anschauliche Grafiken sowie zahlreiche Anwendungsbeispiele tragen zum Verständnis bei.

Das Buch gliedert sich inhaltlich in sieben Kapitel. Zunächst werden die Grundbegriffe der Festigkeitslehre und die wichtigsten mechanischen Zusammenhänge erläutert. *Kapitel 2* beschäftigt sich mit der Ermittlung von Querschnittswerten von stabförmigen Bauteilen. In den drei nachfolgenden *Kapiteln 3* bis *5* werden die grundlegenden Beanspruchungsarten des Stabes, nämlich Biegung mit und ohne Normalkraft, Querkraft und Torsion angesprochen. Dabei werden Wege zur Spannungsberechnung aufgezeigt und das zugehörige Tragverhalten von Stäben mit unterschiedlichen Querschnitten erklärt. Die Stabilität von stabförmigen Bauteilen wird in *Kapitel 6* behandelt. Dabei werden unterschiedliche Stabilitätsphänomene beschrieben und die Schnittgrößenermittlung am verformten System vorgestellt. *Kapitel 7* behandelt ergänzend Sonderprobleme der Festigkeitslehre. Begriffe wie „klaffende Fuge“, Hauptspannungen, Spannungszustände, Vergleichsspannung oder Mohrscher Spannungskreis und Festigkeitshypothesen werden eingehend erläutert.

Jedes Kapitel enthält einige praktische Übungsaufgaben, die die Studierenden zum selbstständigen Bearbeiten und Vertiefen des Lehrstoffes ermutigen sollen. Dazu werden im letzten *Kapitel 8* die Lösungen aufgezeigt. Zur weiteren Anregung und Unterstützung beim Lernen stehen unter http://www.hanser-fachbuch.de/9783446462885 einige überarbeitete Excel-Dateien zum Download bereit, mit denen typische Aufgaben der Festigkeitslehre gelöst werden können.

Bestärkt durch die zahlreichen und dankbar aufgenommenen Zuschriften unserer Leser haben wir die inhaltliche Schwerpunktsetzung, das Layout und die Struktur der vorherigen Auflagen beibehalten. Aufmerksame Leser haben uns auf kleinere Fehler hingewiesen, die wir gerne korrigiert haben. Uns ist bewusst, dass bestimmte Themengebiete wie z.B. die Wölbkrafttorsion mit Blick auf die Zielsetzung dieses Buches nur knapp behandelt werden können. Für den interessierten Leser verbleibt hier nur der Hinweis auf weiterführende Literatur.

Buxtehude, im Oktober 2019 *Jens Göttsche* *Maritta Petersen*

Inhalt

1 Einführung . . . 9

1.1 Warum Festigkeitslehre? . . . 9
1.2 Modellbildung . . . 12
1.3 Einwirkungen, Beanspruchungen . . . 14
1.4 Schnittgrößen, Spannungen . . . 16
1.5 Verzerrungen, Verformungen . . . 20
1.6 Werkstoffverhalten . . . 25

2 Querschnittskennwerte . . . 33

2.1 Vorbemerkung . . . 33
2.2 Flächenmomente . . . 33
2.3 Transformation auf ein gedrehtes Achsensystem . . . 41
2.4 Hauptträgheitsmomente, Hauptachsen . . . 43
2.5 Widerstandsmomente . . . 46
2.6 Trägheitsradien . . . 47

3 Balkenbiegung . . . 50

3.1 Allgemeines . . . 50
3.2 Symmetrische Querschnitte mit einachsiger Biegung . . . 52
3.3 Symmetrische Querschnitte mit zweiachsiger Biegung . . . 58
3.4 Beliebige Querschnitte mit zweiachsiger Biegung . . . 62
3.5 Biegung mit Normalkraft . . . 64
3.6 Biegelinie . . . 70

4 Querkraft . . . 74

4.1 Allgemeines . . . 74
4.2 Schub in einfach symmetrischen, dünnwandigen offenen Querschnitten . . . 77
4.3 Schub in geschlossenen symmetrischen Querschnitten . . . 89
4.4 Schubmittelpunkt . . . 90

5 Torsion . . . 93

5.1 Allgemeines . . . 93
5.2 St.-Venantsche Torsion . . . 97
5.3 Wölbkrafttorsion . . . 109

6 **Stabilitätsprobleme** **111**

6.1 Allgemeine Betrachtungen 111
6.2 Elastisches Knicken gerader Stäbe 118
6.3 Biegeknicken im plastischen Bereich 127
6.4 Weitere Versagensfälle durch Instabilität 132

7 **Ergänzende Themen** **135**

7.1 Ausfall der Zugzone 135
7.2 Spannungszustände, Hauptspannungen 142
7.3 Verzerrungszustände, Elastizitätsgesetz 152
7.4 Festigkeitshypothesen 161
7.5 Sicherheitskonzept 165

8 **Lösungen** **170**

8.1 Lösungen zu Aufgaben in Kapitel 1 170
8.2 Lösungen zu Aufgaben in Kapitel 2 174
8.3 Lösungen zu Aufgaben in Kapitel 3 182
8.4 Lösungen zu Aufgaben in Kapitel 4 187
8.5 Lösungen zu Aufgaben in Kapitel 5 188
8.6 Lösungen zu Aufgaben in Kapitel 6 190
8.7 Lösungen zu Aufgaben in Kapitel 7 196

Literaturverzeichnis **202**

Index **203**

1 Einführung

1.1 Warum Festigkeitslehre?

Die Festigkeitslehre ist ein Grundlagenfach in allen Ingenieurwissenschaften. Sie stellt den planenden Ingenieuren Methoden zur Verfügung, mit denen sie dauerhafte und gebrauchstaugliche Tragwerke mit einer ausreichenden Tragsicherheit entwerfen, berechnen und bemessen können.

Studierende, die sich erstmalig mit der Festigkeitslehre befassen, müssen Grundkenntnisse in der Baustofflehre und der Mathematik besitzen. Sie sollten wissen, was Schnittgrößen sind und wie man sie an einfachen Tragsystemen ermittelt.

Im Bereich des Bauwesens ist die Festigkeitslehre ein Grundlagenfach in der Statik, auf dem alle konstruktiven Fächer wie beispielsweise Stahlbetonbau, Stahlbau, Holzbau, Mauerwerksbau oder Geotechnik aufbauen. Mithilfe der Festigkeitslehre gelingt es,

- die Beanspruchungen im Inneren eines Bauteils infolge der einwirkenden Lasten zu bestimmen,
- die Abmessungen der Bauteile eines Tragwerks unter Beachtung der Festigkeit der verwendeten Werkstoffe und einer angemessenen Sicherheit festzulegen,
- die Beanspruchbarkeit bestehender Bauteile oder Tragwerke bei gegebener Geometrie und bekannten Werkstoffparametern zu ermitteln,
- und die Verformungen des Tragwerks bzw. seiner Bauteile aufgrund der Beanspruchungen zu berechnen und gegebenenfalls durch Änderung von Bauteilgeometrie und/oder Werkstoffen zu begrenzen.

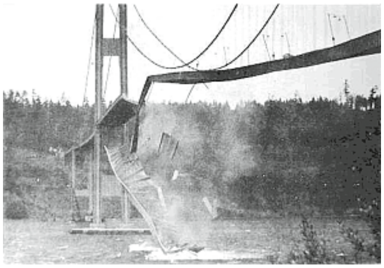


Bild 1.1 „So etwas sollte vermieden werden!" – Tacoma-Narrows-Bridge, 1940.

Die Festigkeitslehre darf nicht als isoliertes Lehrfach begriffen werden. Sie steht im Wechselspiel mit der Statik und liefert wichtige Grundlagen für Statiker und Tragwerksplaner.

Bild 1.2 zeigt die Bedeutung der Festigkeitslehre während des Planungsprozesses eines Bauwerks. Bei allen an der Planung, Bemessung und Konstruktion von Bauwerken Beteiligten wird ein umfassendes Verständnis über das Tragverhalten von Bauwerken vorausgesetzt. Eigenschaften und Grenzen der verwendeten Baustoffe müssen bekannt und die mechanischen Zusammenhänge zwischen den Lasten, die auf ein Tragwerk einwirken, und den Reaktionen des Tragwerks darauf wie z.B. Verformungen, Materialversagen oder Stabilitätsversagen (Knicken, Kippen) verstanden sein.

Unter einem Tragwerk versteht man die planmäßige Anordnung miteinander verbundener tragender und aussteifender Bauteile (z. B. Fundamente, Stützen, Decken oder Wände), die so entworfen sind, dass sie ein bestimmtes Maß an Beanspruchbarkeit (Tragwiderstand) aufweisen.

Im Zuge der Tragwerksplanung werden mehrere Planungsphasen durchlaufen, in denen die Festigkeitslehre entscheidende Beiträge liefert. Bei der Modellierung des Tragsystems müssen idealisierende, jedoch geeignete und mechanisch sinnvolle Annahmen hinsichtlich des Werkstoffs, der Geometrie des Tragwerks sowie der Abmessungen und des Zusammenwirkens seiner Bauteile getroffen werden. Das dabei entstehende Tragwerksmodell ist die Grundlage der statischen Berechnung und anschließenden Bemessung und verlangt den Tragwerksplanern – neben praktischen Erfahrungen – fundierte Kenntnisse der Festigkeitslehre ab.

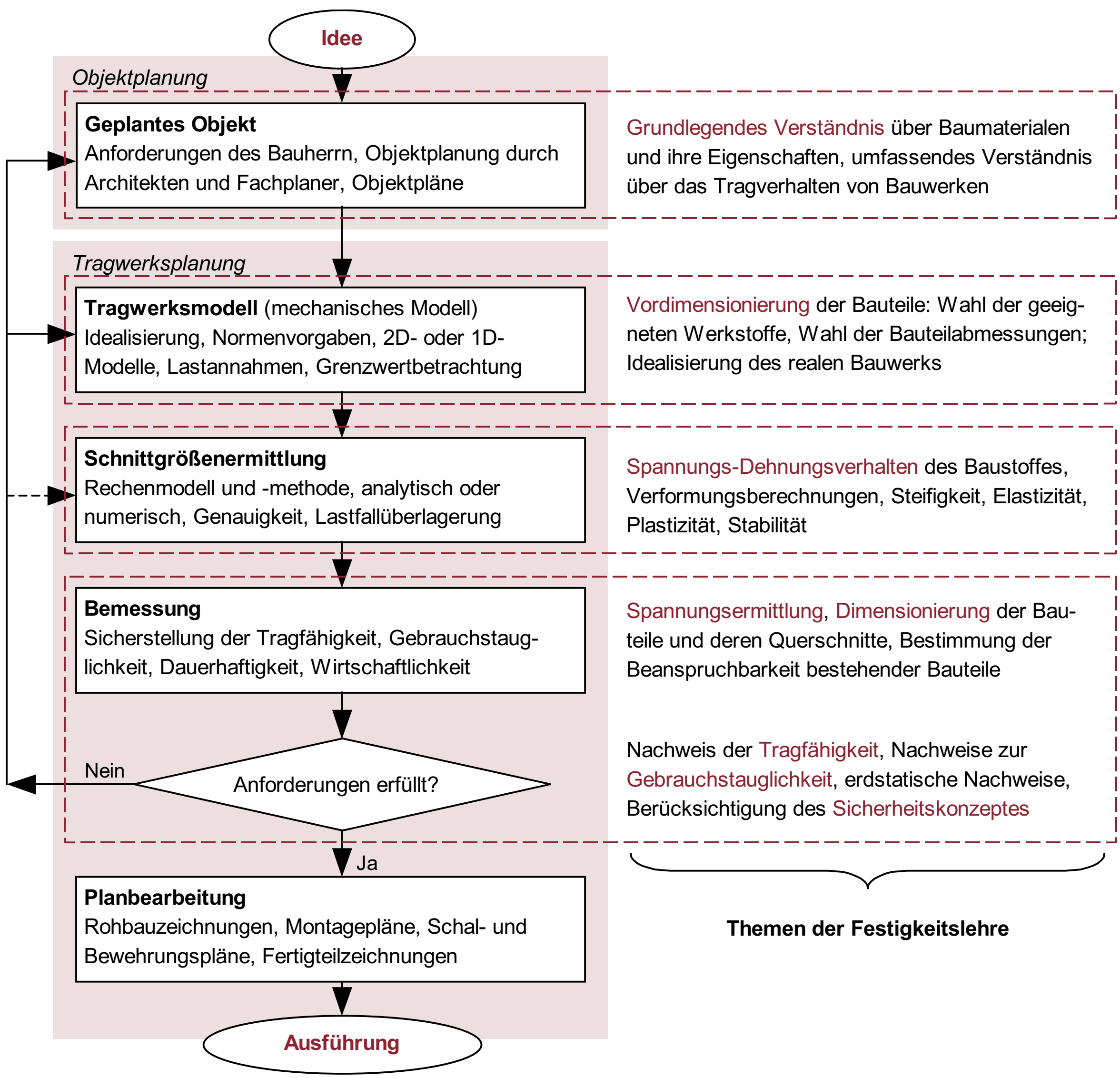
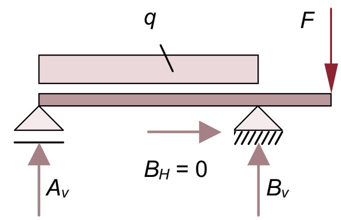


Bild 1.2 Bedeutung der Festigkeitslehre während des Planungsprozesses

Bei der statischen Berechnung werden Auflagerreaktionen und Schnittgrößen ermittelt. Bei statisch bestimmten Tragsystemen reichen die allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen aus, um die Schnittgrößen in jedem Punkt des Systems zu bestimmen. Dabei wird das Tragwerk als starres System betrachtet. Diese Idealisierung muss bei statisch unbestimmten Tragsystemen aufgegeben werden. Die Schnittgrößen können in diesem Fall nur dann korrekt ermittelt werden, wenn das Verformungsverhalten des Tragwerks zutreffend beschrieben werden kann. Dazu müssen Statiker die genauen Abmessungen der Tragwerksteile und die maßgebenden Werkstoffparameter kennen und der statischen Berechnung zugrunde legen.

Aufgabe 1.1: Die Schnittgrößen eines vertikal belasteten Trägers lassen sich mithilfe der Gleichgewichtsbedingungen $\Sigma V = 0$ und $\Sigma M = 0$ ermitteln. Stimmt das wirklich? Wenn ja, unter welchen Bedingungen?



Die Schnittgrößen allein lassen jedoch keine Aussage über die Beanspruchbarkeit (Tragwiderstand) des Bauteils oder des Tragwerks insgesamt zu. So wird ein typischer Holzsparren bei einer anderen Beanspruchung versagen als ein Doppel-T-Träger aus hochwertigem Stahl. Im Zuge der Bemessung muss also in jedem Ort des Tragwerks geprüft werden, ob die Beanspruchungen sicher und schadensfrei aufgenommen werden können. Es wird der Nachweis der Tragfähigkeit geführt.

Neben den Beanspruchungen sind die Verformungen (Deformationen) von großer praktischer Bedeutung. Ein Tragwerk und seine Bauteile sind zwar feste, aber keine starren Gebilde. Man spricht allgemein von deformierbaren Körpern. Manchmal wird im Zusammenhang mit der Festigkeitslehre auch von der „Statik deformierbarer Körper“ gesprochen. Reagiert der Körper aufgrund seiner Werkstoffeigenschaften elastisch (wie z. B. eine Uhrfeder), so wird die Festigkeitslehre auch mit dem Begriff „Elastostatik“ gleichgesetzt. Die Tragwerksplaner haben somit auch den Nachweis zu führen, dass die Verformungen bestimmte, durch Baunormen oder Bauherren vorgegebene Grenzwerte nicht überschreiten. Es wird auf diese Weise sichergestellt, dass die Gebrauchstauglichkeit gegeben ist.

Größere Verformungen können darüber hinaus das Tragverhalten eines stabilitätsgefährdeten Tragwerks nachteilig beeinflussen und die Tragsicherheit herabsetzen. In einem solchen Fall müssen die Schnittgrößen nicht mehr am unverformten, sondern am verformten System neu ermittelt und die Bemessung entsprechend angepasst werden.

Die Tragfähigkeit ist die Fähigkeit des Tragwerks und seiner tragenden Teile, allen auftretenden Einwirkungen zu widerstehen, denen es während der Errichtungs- und Nutzungsdauer planmäßig standhalten soll.

Werden die Anforderungen an die Tragfähigkeit und die Gebrauchstauglichkeit im ersten Ansatz des Planungsprozesses nicht erfüllt, so sind gegebenenfalls Konstruktionsänderungen (z. B. bei den Bauteilabmessungen oder Werkstoffparametern) vorzunehmen (*Bild 1.2*). In manchen Fällen gelingt es, durch Verfeinerungen am Tragwerksmodell oder durch Auswahl eines genaueren Berechnungsverfahrens bei der Schnittgrößenermittlung, die Bemessung erfolgreich abzuschließen und damit alle Vorgaben für die Planbearbeitung bereitzustellen.

Die Gebrauchstauglichkeit ist die Fähigkeit des Tragwerks und seiner Bestandteile, die planmäßige Nutzung entsprechend festgelegter Bedingungen zu ermöglichen.

Fassen wir zusammen: Die Festigkeitslehre vermittelt wichtige Kenntnisse zur Bewältigung der oben geschilderten Aufgaben. Sie beschäftigt sich mit deformierbaren, festen Körpern mit dem Ziel, ein Versagen eines beanspruchten Systems und seiner Teile durch Bruch, zu große Verformungen oder Instabilität zu vermeiden.

1.2 Modellbildung

Ausgangspunkt für jeden Planungs- und Konstruktionsprozess ist das Tragwerksmodell. Es ist die gedankliche Umsetzung des realen Bauwerks in ein berechenbares Modell, für das Annahmen getroffen werden im Hinblick auf

- einwirkende Lasten bzw. Lastkombinationen,
- das statische System und dessen Auflagerbedingungen,
- das Tragverhalten
- und das Werkstoffverhalten.

Das Erstellen eines Tragwerksmodells ist eine der entscheidenden und anspruchsvollen Aufgaben der konstruktiv gestaltenden Ingenieure. Die Meinung, auch diese Aufgabe dem Computer alleine zu überlassen, führt in die Irre.

Auch wenn es heute computergestützte Rechenmethoden gibt, mit denen die stets dreidimensionalen Bauteile auch als dreidimensionale Körpermodelle aufwändig berechnet werden können, so werden in der Tragwerksplanung überwiegend zwei- und eindimensionale Tragwerksmodelle (2D- bzw. 1D-Modelle) gewählt. Mit ihnen lässt sich bei vertretbarem Aufwand eine gute Abbildung der Wirklichkeit darstellen. In *Bild 1.3* werden typische Tragwerksmodelle gezeigt. Sie zeichnen sich durch einen einfachen geometrischen Aufbau aus.

Für besonders massive oder dickwandige Tragwerke, deren Abmessungen in allen drei Dimensionen vergleichbare Größenordnungen erreichen, sind aufwändige Körpermodelle notwendig. Für flächige Tragwerke, bei denen die Längenabmessungen die Dicke weit übersteigen, werden zweidimensionale Modelle mit geringer Wandstärke eingesetzt. Typische Flächentragwerke sind Platten, Scheiben und Faltwerke sowie – in gekrümmter Form – die Schalen. Für diese Modelltypen werden wegen der geringen Wandstärke Näherungsvoraussetzungen getroffen. Sie ermöglichen eine sinnvoll vereinfachte, aber dennoch ausreichend genaue Berechnung sowie eine anschauliche Ergebnisinterpretation.

Bei der Einführung in die Grundlagen der Festigkeitslehre werden vorzugsweise eindimensionale Tragwerksmodelle behandelt wie

- der Zug- bzw. Druckstab,
- der Biegebalken,
- der Torsionsstab
- und der Knickstab.

Eindimensionale Tragwerksmodelle, bei denen die Längenausdehnung die Querabmessungen um ein Vielfaches übertrifft, werden auch als Linientragwerke bezeichnet. Typische Modelltypen sind in dieser Gruppe die Stabtragwerke (Druck- oder Zugstab, Biegeträger, Torsionsstab). Bei komplexeren Tragwerken müssen die vorgestellten Modelle kombiniert werden. Ein Beispiel ist der Rahmen, der sich aus biegebeanspruchten Riegeln und

Stützen zusammensetzt. Durch die Dimensionsreduktion bei 2D- bzw. 1D-Modellen entstehen die spezifischen Scheiben-, oder Plattentheorien bzw. Stab- und Balkentheorien, die in der Statik näher behandelt werden. Durch diese Reduktion wird das Tragverhalten durch charakterisierende Begriffe wie Dehnung, Biegung, Torsion, Schub, Verwölbung oder Knicken beschreibbar.

Fassen wir zusammen: Tragwerksplaner müssen Tragwerksmodelle entwickeln, um die Realität berechenbar zu machen. Dabei sind Annahmen zu treffen und Vereinfachungen in Kauf zu nehmen. Typische Tragwerksmodelle sind Flächen- und Stabmodelle. Die Analyse des Tragverhaltens dieser Modelle erfolgt heute mithilfe des Computers.

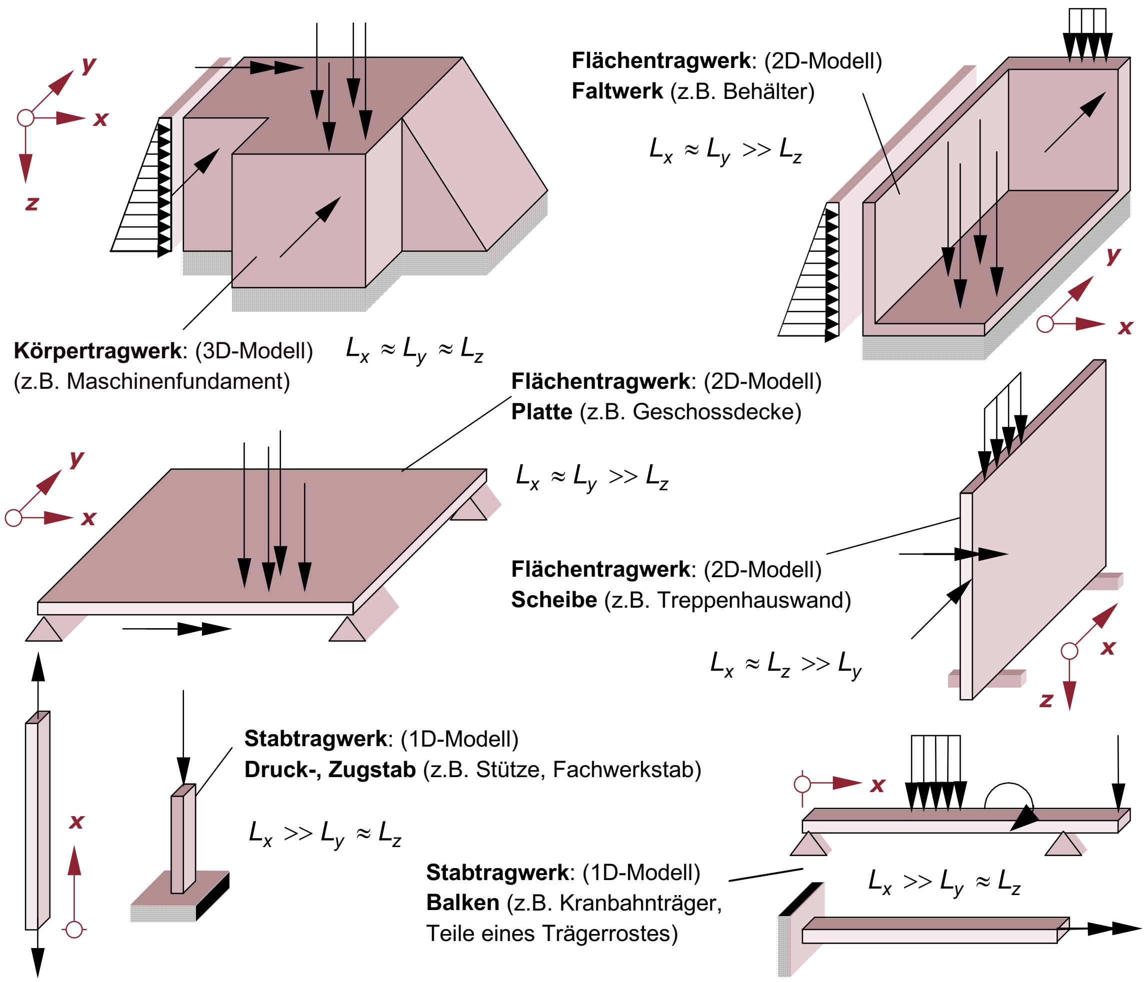


Bild 1.3 Typische Tragwerksmodelle

1.3 Einwirkungen, Beanspruchungen

Aus der Statik ist der Begriff Einwirkung bekannt. Es handelt sich hierbei meist um eine auf das Tragwerk einwirkende Last (Kraftgröße), die auch als direkte Einwirkung bezeichnet wird. Daneben gibt es indirekte Einwirkungen, die dem Tragwerk eine Verformung (Verdrehung oder Verschiebung) aufzwingen (*Bild 1.4*).

Typische indirekte Einwirkungen sind Temperaturänderungen, Temperaturdifferenzen zwischen Unter- und Oberseite eines Bauteils oder ungleiche Setzungen an den Auflagern. Bei statisch unbestimmten Tragsystemen entstehen aufgrund der Verformungsbehinderungen so genannte Zwangsschnittgrößen, die mit der gleichen Wertigkeit wie die Schnittgrößen aus direkt einwirkenden Lasten behandelt werden müssen. *Bild 1.4* zeigt – nach der Ursache unterteilt – verschiedene Einwirkungen.

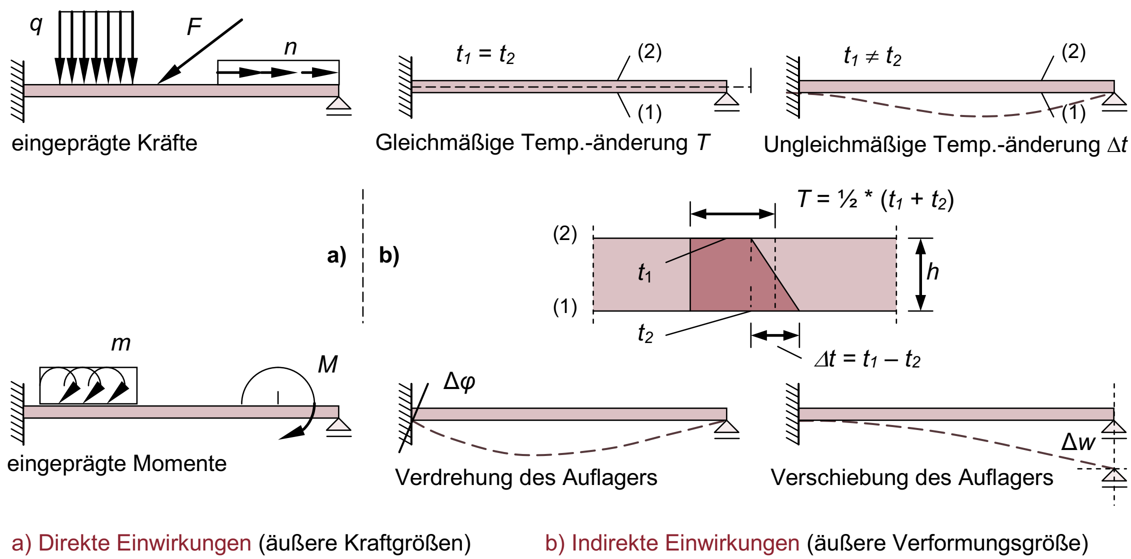


Bild 1.4 Ursachen für verschiedene Einwirkungen

Als indirekte Einwirkungen werden auch das Kriechen (Formänderung des Materials mit dem Ziel, sich einer dauerhaft wirkenden Beanspruchung zu entziehen) und das Schwinden (Schrumpfung durch Austrocknung) angesehen.

Bei Einwirkungen unterscheidet man neben der Ursache auch nach der Art der Wirkung. So ist eine vorwiegend ruhende Einwirkung eine Einwirkung, die keine (wesentlichen) Beschleunigungen des Tragwerks oder des Bauteils hervorruft. Typische Einwirkungen dieser Art sind:

- ständige oder zeitlich unveränderliche Einwirkungen wie Eigengewicht, Erddruck oder Vorspannung,

- zeitlich veränderliche Einwirkungen wie Nutzlasten aus Verkehr und Lagerung, Schnee- oder Windlasten. Obwohl zeitlich veränderlich, so werden diese Einwirkungen für die Tragwerksplanung dennoch als vorwiegend ruhende Einwirkungen angesehen.

Bei dynamischen Einwirkungen handelt es sich um stoßende oder sich häufig wiederholende Belastungen, die wesentliche Beschleunigungen hervorrufen wie z.B. Kranbahnlasten.

Eine Einwirkung kann allein oder gleichzeitig in Kombination mit anderen, von ihr unabhängigen Einwirkungen auftreten. Man spricht dann von einer Einwirkungskombination. Als Folge der gleichzeitig zu betrachtenden Einwirkungen bzw. einer Einwirkungskombination ergibt sich die Beanspruchung des Tragwerks oder seiner Teile oder die Beanspruchung an einem betrachteten Ort (Querschnitt) des Tragwerks.

Ein für die Bemessung maßgebender Wert einer Beanspruchung lässt sich mithilfe der ungünstigsten Einwirkungskombination bestimmen. Diese muss den Kombinationsregeln der einschlägigen Baunormen gehorchen. In *Bild 1.5* wird dieser Hergang exemplarisch an einem Biegeträger gezeigt, allerdings ohne auf weiterführende Regeln des Sicherheitskonzepts nach DIN EN 1990:2012-12 im Hinblick auf die Bemessung einzugehen.

Aufgabe 1.2: Wie müssen die Lastfälle in *Bild 1.5* kombiniert werden, um die maßgebende Auflagerkraft des rechten Lagers zu erhalten?

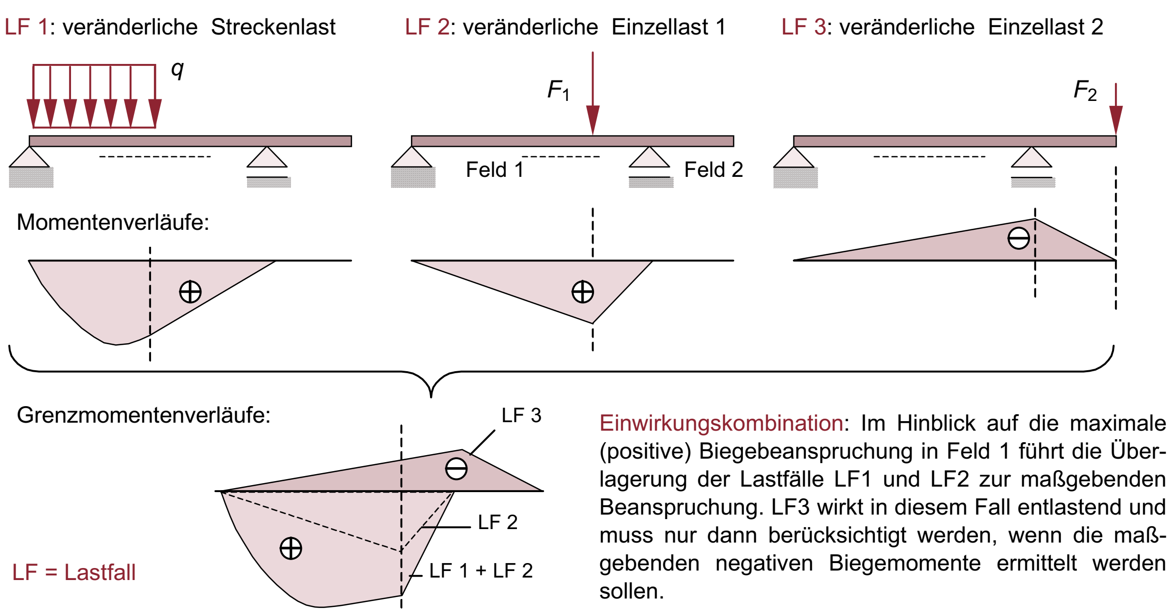


Bild 1.5 Ermittlung der maßgebenden Beanspruchung durch Lastfallkombinationen

1.4 Schnittgrößen, Spannungen

Ein Maß für die Beanspruchung auf der Ebene des Tragwerkmodells sind die Schnittgrößen. Bei Stabtragwerken sind es im allgemeinen Fall die Längs- oder Normalkraft N, die Querkräfte V_y und V_z sowie das Torsionsmoment M_x um die Längsachse des Stabes und die beiden Biegemomente M_y und M_z (vgl. *Bild 1.6*). Wirkt eine besondere Belastung in einer Ebene bzw. in einer Richtung, so ergeben sich bestimmte Schnittgrößen zu null.

Aufgabe 1.3: In *Bild 1.3* sind einige Stabtragwerke (also 1D-Modelle) unter besonderen Beanspruchungen dargestellt. Welche Schnittgrößen ergeben sich bei diesen Systemen zu null und müssen nicht weiter beachtet werden?

Die Festlegung, was positive oder negative Schnittgrößen sind, erfolgt mithilfe eines am Tragwerk ausgerichteten Koordinatensystems und der Positivdefinition der Schnittufer. Schnittgrößen sind dann positiv, wenn sie am positiven Schnittufer im positiven Sinne des Koordinatensystems wirken. Das positive Schnittufer einer Schnittstelle ist jenes, welches man vom Ursprung ausgehend zuerst erreicht. Die Einführung von Schnittstellen ist eine Methode der Statik (Schnittprinzip), um Beanspruchungen an einer beliebigen Stelle des Tragwerkmodells „sichtbar" und damit berechenbar zu machen.

Alle Schnittgrößen beziehen sich bei Stabtragwerken auf die Stabachse, die eine Idealisierung des dreidimensionalen Bauteils darstellt. Die Schnittgrößen werden auch als innere Kräfte bezeichnet und stehen mit den äußeren Kräften (einwirkende Lasten und Auflagerreaktionen) im Gleichgewicht. Sie wirken auf die gesamte Schnittfläche und verteilen sich nach mechanischen Gesetzmäßigkeiten in Abhängigkeit von der Querschnittsgeometrie und den Werkstoffparametern.

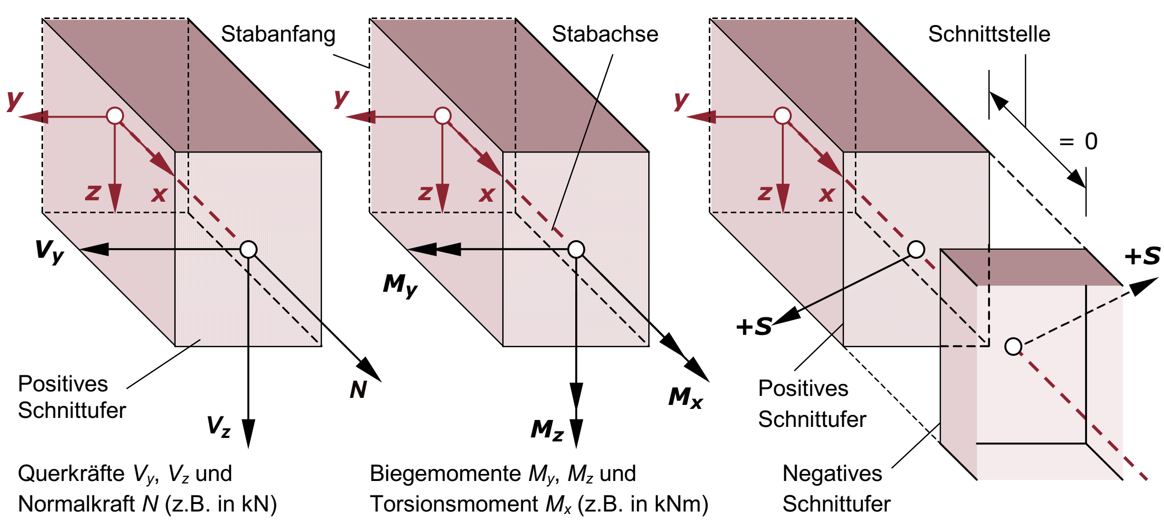


Bild 1.6 Definition positiver Schnittgrößen am Stabtragwerk

Der je Flächeneinheit wirkende Kraftanteil dieser Schnittgrößen wird als Spannung bezeichnet und ist ein Maß für die Beanspruchung im Körperinneren des (realen) Tragwerks.

$$\text{Spannung} = \frac{\text{Kraftanteil}}{\text{Flächeneinheit}} \quad \left(\frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}; \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}; \frac{\text{MN}}{\text{m}^2}\right)$$

Die Flächeneinheit kann sich aus einer endlichen Querschnittsfläche, einer Teilfläche im Schnitt oder aus einer infinitesimal kleinen Schnittfläche bilden. Mathematisch korrekt wird deshalb die Spannung als Differentialquotient aus innerer Kraft dF und zugehöriger Fläche dA beschrieben; es gilt:

Spannungen mit positivem Vorzeichen nennt man Zugspannungen. Sie dehnen das Material. Negative Spannungen sind Druckspannungen, die das Material zusammenpressen.

$$\text{Spannung} = \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}A}$$

Die Spannung ist ebenso wie die Kraft ein Vektor. Sie ist eindeutig durch die Wirkungslinie, den Betrag und ihren Richtungssinn definiert. Stellt man derartige Spannungsvektoren für verschiedene Schnitte und Querschnittspunkte zeichnerisch zusammen, so wird der innere Kraftfluss in einem Tragwerk deutlich. *Bild 1.7* zeigt einen solchen Zustand für einen durch zwei Einzellasten beanspruchten Einfeldträger.

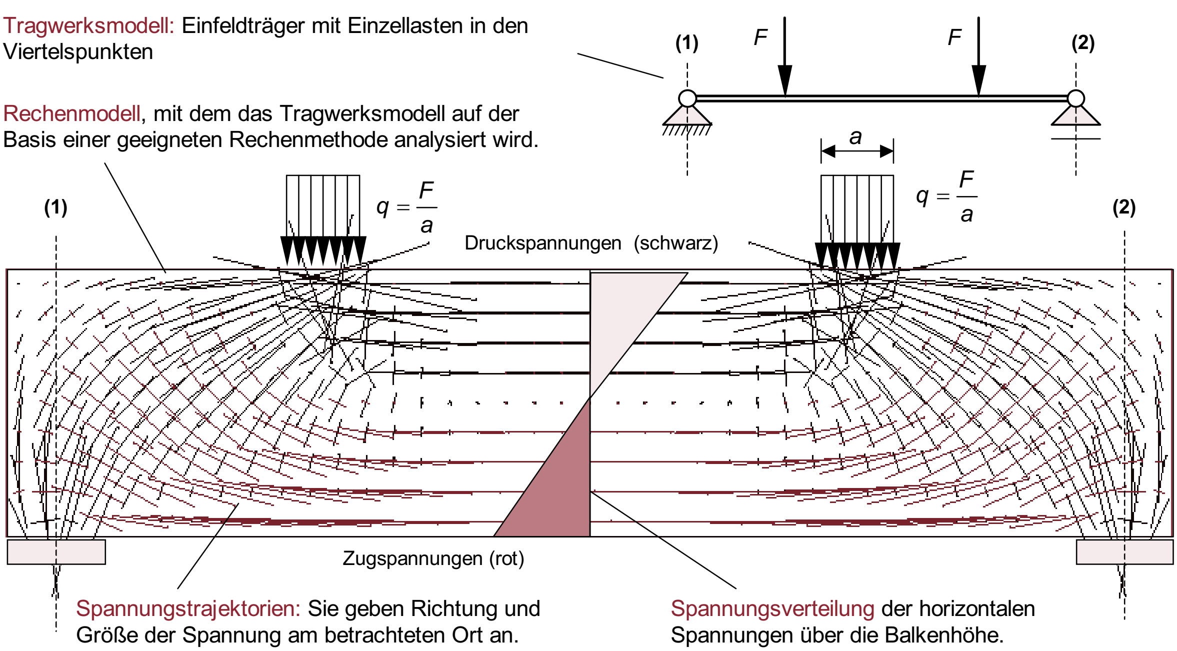


Bild 1.7 Innerer Kraftfluss in einem Einfeldträger unter Querkraftbiegung, berechnet mit einem Scheibenmodell

Für die weitere Betrachtung der Spannungen ist es üblich, den Spannungsvektor in seine Komponenten zu zerlegen. Die Komponente, die senkrecht (normal) zur Schnittfläche steht, wird als Normalspannung σ, die in der Schnittfläche liegende Komponente als Tangentialspannung τ (auch als Schubspannung oder Scherspannung) bezeichnet (*Bild 1.8*). Die Tangentialspannung τ wird darüber hinaus in zwei senkrecht zueinander stehende Komponenten τ_v und τ_h zerlegt, wenn das Bezugskoordinatensystem dieses erfordert.

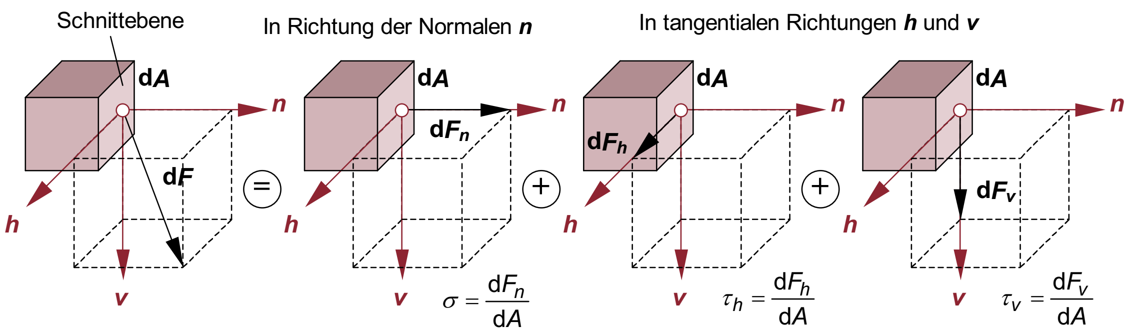


Bild 1.8 Zerlegung des Spannungsvektors in drei orthogonale Spannungskomponenten

Wird aus einem allgemein beanspruchten Körper ein Würfel mit infinitesimalem Volumen und beliebiger Raumorientierung herausgeschnitten, so ergeben sich in jeder Schnittfläche eine Normalspannung und zwei Tangentialspannungen. Zur Unterscheidung ihrer Wirkungsrichtung erhalten die Normalspannungen die Richtungsindizes *x*, *y* und *z*.

Die Tangentialspannungen werden, da sie paarweise pro Schnittfläche vorliegen, doppelt indiziert. Der 1. Index gibt die Richtung der Flächennormalen, der 2. Index die Richtung der jeweiligen τ-Spannung an (*Bild 1.9*).

Aufgabe 1.4: Durch die perspektivische Darstellung in *Bild 1.9* sind die negativen Schnittufer nicht zu sehen. Stellen Sie alle neun positiven Spannungskomponenten an allen negativen Schnittufern in einer eigenen Skizze dar.

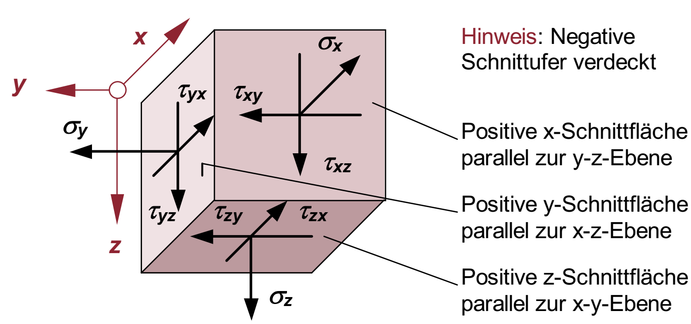


Bild 1.9 Positive Spannungskomponenten am Volumenelement

Die Festlegung der Vorzeichendefinition ergibt sich aus der Lage der Schnittufer in Bezug auf das Koordinatensystem und den Richtungssinn der Spannungskomponenten. Spannungen sind dann positiv, wenn sie am positiven Schnittufer in Richtung der positiven Koordinatenachsen des Bezugssystems wirken. Am negativen Schnittufer weisen positive Spannungen in entgegengesetzte Richtungen.

Wie aus *Bild 1.9* ersichtlich, ergeben sich insgesamt neun Spannungskomponenten. Durch Gleichgewichtsbetrachtungen lässt sich belegen, dass zwei aufeinander zulaufende Tangentialspannungen an benachbarten Schnittufern gleichen Vorzeichens gleich groß sind. *Bild 1.10* zeigt dies für die *x*-*z*-Ebene. Es gilt generell:

$$\tau_{ij} = \tau_{ji} \tag{1.1}$$

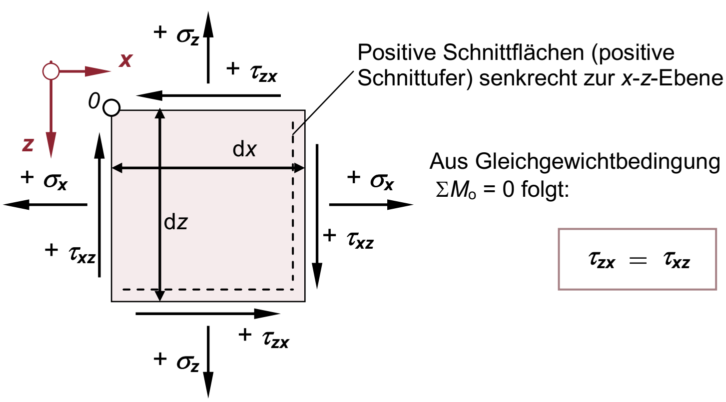


Bild 1.10 Gleichheit zugeordneter Tangentialspannungen

Ein allgemeiner dreiachsiger (räumlicher) Spannungszustand lässt sich somit durch sechs voneinander unabhängige Spannungskomponenten beschreiben:

$$\vec{\sigma} = \left[\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}\right]^T \tag{1.2}$$

Sind in besonderen Fällen zwei gegenüberliegende Schnittufer spannungsfrei (*Bild 1.11*), so spricht man von einem zweiachsigen (ebenen) Spannungszustand. Ein solcher Spannungszustand ist typisch für eine Scheibe, die nur in ihrer Ebene Lasten aufzunehmen hat. Quer zur Scheibenebene wirken weder Lasten, noch liegen hier Verformungsbehinderungen vor. Ein einachsiger Spannungszustand ist typisch für einen Stab unter einer Zug- oder Druckbeanspruchung. Hier tritt nur in der Schnittfläche normal zur Stabachse eine von null verschiedene σ-Spannung auf (*Bild 1.11*). Gleiches trifft auch für einen Balken unter reiner Biegung zu.

Durch die Verwendung der Buchstaben σ und τ wird der Eindruck erweckt, als ob es sich um verschiedenartige Spannungen handelt. Normal- und Tangentialspannungen sind gleichartige Komponenten einer resultierenden Spannung. Die Zerlegung in σ- und τ-Spannungen ist lediglich eine Frage der Schnittführung.

In *Abschn. 7.2* werden die Spannungen ein weiteres Mal eine besondere Rolle spielen. Wir werden die Spannungen unter anderen Schnittwinkeln betrachten und auf andere Bezugskoordinatensysteme transformieren. Dabei werden wir auch die sogenannten Hauptspannungen kennen lernen.

Aufgabe 1.5: In *Bild 1.7* ist der innere Kraftfluss eines Einfeldbalkens unter zwei Einzellasten in den Viertelspunkten dargestellt. Gibt es bei diesem Balken Bereiche, in denen ein einachsiger Spannungszustand vorherrscht?

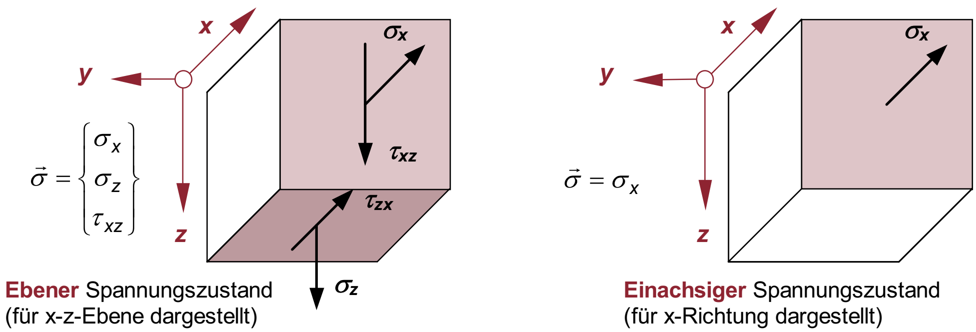


Bild 1.11 Zweiachsiger und einachsiger Spannungszustand

Fassen wir zusammen: Spannungen sind ein Maß für die Beanspruchungen im Körperinneren. Sie werden nach Maßgabe der Schnittführung je Schnittfläche unterteilt in eine Normalspannungs- und zwei Tangentialspannungskomponenten. Schnittgrößen sind ein Maß für die Beanspruchungen auf der Ebene des Tragwerkmodells. Sie repräsentieren den Spannungszustand der Querschnittsfläche in Form von Spannungsresultierenden.

1.5 Verzerrungen, Verformungen

Last- und Temperatureinwirkungen führen zu einer Formänderung des Tragwerks und seiner Bauteile. Formänderungen werden z.B. sichtbar als Durchbiegung eines Balkens, als eine Verdrehung eines Trägers an einem gelenkigen Auflager oder als eine Längenänderung eines Zugstabes. Sie sind das Resultat von Verzerrungen, die sich an jedem Ort im Inneren des Tragwerks in Abhängigkeit vom jeweils herrschenden Spannungszustand einstellen.

Eine Druckbeanspruchung führt zu einer Verkürzung des Körpers. Die Dehnung ist negativ und wird als Stauchung bezeichnet.

Verzerrungen sind Formänderungen eines infinitesimalen Körpers und eine Reaktion auf die Spannungen, die auf ihn wirken. Verzerrungen werden nach Dehnung ε und Gleitung γ unterschieden. Als Dehnung wird das Verhältnis zwischen der Längenänderung des Körpers in Richtung einer Normalspannung und seiner ursprünglichen Länge im spannungsfreien Zustand bezeichnet (relative Längenänderung; *Bild 1.12*). Von einer Gleitung spricht man, wenn sich der Körper infolge einer Tangentialspannung rautenartig deformiert (relative Winkeländerung; *Bild 1.13*).

Betrachten wir zunächst die Dehnung. Sie lässt sich an einem Zugstab mit konstantem Querschnitt unter zentrischer und gleichbleibender Normalkraft anschaulich herleiten. Unter der Normalkraftbeanspruchung längt sich der