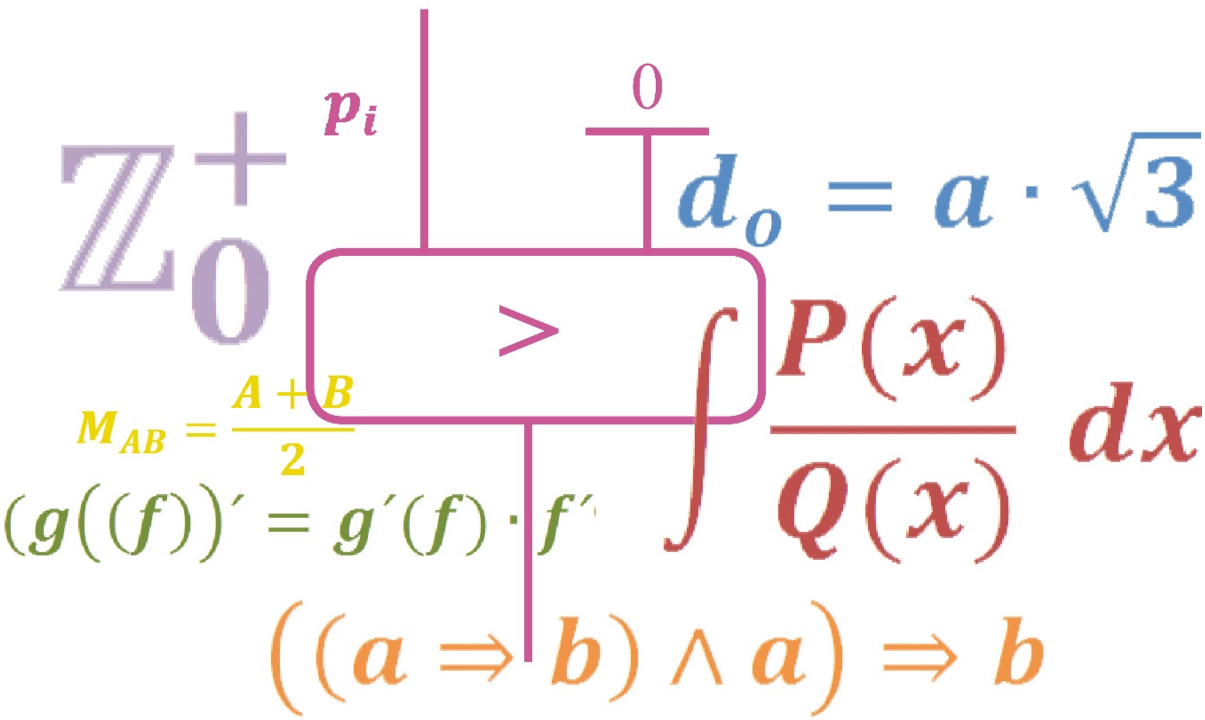
Karl Josef Fuchs & Simon Plangg

Computer Algebra Systeme in der Lehrer(innen)bildung



WTM
Verlag für wissenschaftliche Texte und Medien
Münster

scripta didactica mathematica 5

scripta didactica mathematica

Herausgegeben von
Gilbert Greefrath und Martin Stein

Band 5

Karl Josef Fuchs & Simon Plangg

Computer Algebra Systeme in der Lehrer(innen)bildung

WTM
Verlag für wissenschaftliche Texte und Medien
Münster

Bibliografische Information der Deutschen Bibliothek

Die Deutsche Bibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte Informationen sind im Internet über http://dnb.ddb.de abrufbar

Druck durch:
winterwork
04451 Borsdorf
http://www.winterwork.de/

ISBN 978-3-95987-085-6

Vorwort

Das Buch basiert auf den Lehrveranstaltungen *Computeralgebra im Mathematikunterricht* und *Methoden des Mathematikunterrichts* an der Paris Lodron-Universität Salzburg sowie *Methoden des Informatikunterrichts* an der Leopold-Franzens-Universität Innsbruck. Die Lehrveranstaltungen an den genannten Institutionen sind Pflichtlehrveranstaltungen für Studierende im Lehramt für Höhere Schulen bzw. für das Lehramt im Sekundarbereich.

Mit diesem Buch wenden wir uns an Lehrende in der Ausbildung für das Lehramt im Sekundarbereich sowie an Lehrende in der Fort- und Weiterbildung an Universitäten und Pädagogischen Hochschulen. Mit dem Text richten wir uns aber auch an Lehrkräfte, die Computer Algebra Systeme bereits einsetzen und an einer methodisch-didaktischen Einbettung derartiger Software in ihren Unterricht interessiert sind oder den Einsatz dieser Systeme in der Lehre erst planen.

Die Beispiele, in unserem Buch prototypische Aufgaben bzw. Problemstellungen genannt, haben wir sämtlichen Themenbereichen der Mathematik bzw. einzelnen Themenbereichen der Informatik, nämlich jenen, die eine besondere Nähe zur Mathematik besitzen, entnommen. Die Inhalte stammen daher aus den Grundlagen der Mathematik, der Algebra, der Geometrie, der Analysis, der Stochastik sowie der Praktischen Informatik im Fall der Programmierung.

Für die Implementierungen werden abwechselnd die Computer Algebra Systeme MAXIMA, GeoGebra-CAS, TI-Nspire und Casio Classpad II verwendet. Die Auswahl der Software haben wir unter Berücksichtigung der Häufigkeit der Nutzung der Software in den Schulen getroffen.

Wir wünschen viel Freude beim Durcharbeiten des Textes und hoffen, dass wir Ihnen einige Anregungen für Ihren Unterricht mit Computer Algebra Systemen vermitteln können.

Karl Josef Fuchs & Simon Plangg Salzburg, im Februar 2018

Inhaltsverzeichnis

1. Computer Algebra Systeme

Computer Algebra Systeme (kurz: CAS) sind fachspezifische Anwenderprogramme, die Mitte des vergangenen Jahrhunderts für den Einsatz in der Forschung entwickelt wurden. Im Mittelpunkt dieser Systeme steht das symbolische Rechnen. Bernhard Kutzler, Franz Lichtenberger und Franz Winkler benennen mit dem Titel ihres Buchs *Softwaresysteme zur Formelmanipulation* (1990) sehr treffend *algebraische Umformungen* als ‚Herzstück' von CAS. In seinem Beitrag (Pavelle 1984, S. 4ff) führt Richard Pavelle acht Gründe für die Nützlichkeit von CAS (am Beispiel MACSYMA) durch die Möglichkeit algebraischer Umformungen an:

- Ergebnisse von CAS sind exakt und daher zuverlässiger. Ihnen kann mehr als den Ergebnissen numerischer Berechnungen vertraut werden.
- Pavelle prognostiziert, dass in wenigen Jahren billige Computer bzw. Notebooks zur Verfügung stehen werden, die die symbolischen, numerischen und grafischen Fähigkeiten eines CAS besitzen werden.
- MACSYMA, d.h. das CAS, wird damit in Zukunft immer häufiger für einfache, aber auch komplexe, algebraische Umformungen eingesetzt werden.
- Der Anwender hat Zugriff auf mathematische Techniken. Er muss die Techniken, die das CAS benützt, nicht notwendig verstehen (vgl. Kapitel 2.5 *Black Box-Prinzip*).
- Mit CAS können Vermutungen sehr einfach überprüft werden (vgl. Kapitel 3.2 *Entdeckendes Lernen*).
- MACSYMA, d.h. das CAS, kann sehr rasch genutzt werden.
- MACSYMA, d.h. das CAS, übernimmt Routinetätigkeiten. Die Fehleranfälligkeit beim Lösen von Problemen durch ‚Flüchtigkeitsfehler' wird minimiert.
- MACSYMA, d.h. das CAS, leistet aufgrund seiner algebraischen Fähigkeiten einen großen Beitrag zur Theoriebildung in der Mathematik.

Als Beispiele für einen nutzbringenden Einsatz von CAS führt Richard Pavelle unter anderem die folgenden Themen an:

- Vereinfachen von komplexen Ausdrücken (**Simplification**)

  z. B. $\frac{(\sqrt{R^2+A^2}+A)\cdot(\sqrt{R^2+B^2}+B)}{R^2} - \frac{\sqrt{R^2+B^2}+\sqrt{R^2+A^2}+B+A}{\sqrt{R^2+B^2}+\sqrt{R^2+A^2}-B-A}$

(%i1) (sqrt(R^2+A^2)+A)·(sqrt(R^2+B^2)+B)/R^2;

(%o1) $$\frac{(\sqrt{R^2+A^2}+A)\,(\sqrt{R^2+B^2}+B)}{R^2}$$

(%i4) %o1−(sqrt(R^2+B^2)+sqrt(R^2+A^2)+B+A)/
(sqrt(R^2+B^2)+sqrt(R^2+A^2)−B−A),ratsimp;

(%o4) 0

- Differenzieren eines Ausdrucks (**Differential Calculus**)
  z. B. $(x^x)'$

(%i3) diff(x^x,x);

(%o3) $x^x\,(\log(x)+1)$

James Harold Davenport (Davenport 1984) nennt neben der Integration gebrochen rationaler Funktionen (vgl. Kapitel 2.4 – *Division mit Rest*) auch das folgende Thema für einen nutzbringenden Einsatz von CAS:

- Lösen von Differentialgleichungen des Typs $y' + f \cdot y = g$ mit f und g als algebraische Funktionen, z.B. Polynomfunktionen
  z. B. $y' + (x^3 + a \cdot x^2 - x - 2) \cdot y = x^2 + x + 1$

(%i1) dgl:'diff(y,x)+x^3+a·x^2−x−2=x^2+b·x+1;

(dgl) $$\frac{d}{d\,x}\,y+x^3+a\,x^2-x-2=x^2+b\,x+1$$

(%i2) ode2(dgl,y,x);

(%o2) $$y=-\frac{x^4}{4}+\frac{(1-a)\,x^3}{3}+\frac{(b+1)\,x^2}{2}+3\,x+\%c$$

In den Beiträgen *Das Microcomputer-Algebra System DERIVE* von Bernhard Kutzler und *Das Computer-Algebra System MACSYMA* von Franz Winkler (in Kutzler, Lichtenberger & Winkler 1990, S. 97 & 100-101 sowie S. 66-68 & 72) finden wir als Beispiele für einen nutzbringenden Einsatz von CAS:

- Auffinden geschlossener Formeln für Summen und Produkte
  z. B. $\sum_{k=0}^{n} k^3$

$$\sum_{k=0}^{n}\left(k^3\right) \qquad \frac{n^2\cdot(n+1)^2}{4}$$ [1]

[1] Zur Vermittlung eines authentischen Eindrucks von der Nutzung von Hand Held Technologie, wurden sämtliche Outputs des TI-Nspire sowie Casio ClassPad II im Originalzustand belassen.

bzw. $\prod_{k=1}^{n} 2 \cdot k$

$$\prod_{k=1}^{n} (2 \cdot k) \qquad n! \cdot 2^n$$

- Lösen von algebraischen Gleichungen, d.h. Gleichungen mit Formvariablen
  z. B. $a \cdot x^2 - 3 \cdot a \cdot b \cdot x + b^2 = 0$

$$\operatorname{solve}\left(a \cdot x^2 - 3 \cdot a \cdot b \cdot x + b^2 = 0, x\right)$$
$$x = \frac{\left(\sqrt{a \cdot (9 \cdot a - 4)} + 3 \cdot a\right) \cdot b}{2 \cdot a} \text{ or } x = \frac{-\left(\sqrt{a \cdot (9 \cdot a - 4)} - 3 \cdot a\right) \cdot b}{2 \cdot a}$$

Zudem nennt auch Franz Winkler (in Kutzler, Lichtenberger & Winkler 1990, S. 4) die Integration gebrochen rationaler Funktionen (vgl. Kapitel 2.4 – *Division mit Rest*) als Thema für einen nutzbringenden Einsatz von CAS.

Eine Version des CAS MACSYMA wurde vor ca. dreißig Jahren für verschiedene Betriebssysteme weiter entwickelt und steht als Applikation *wxMaxima* kostenlos zur Verfügung. *WxMaxima* wird in diesem Buch auch in einzelnen Kapiteln bei der Problemlösung verwendet. Weitere CAS sind die Systeme REDUCE, MAPLE und MATHEMATICA.

Einzug in die Mathematik in der Schule hielten CAS gegen Ende der 80er Jahre des vergangenen Jahrhunderts. Nahezu zeitgleich mit diesem Einzug hat sich auch die fachdidaktische Forschung für den Einsatz von CAS in der Schule zu interessieren begonnen.

Zu Beginn dieser Forschung stehen vor allem die beiden internationalen Konferenzen *Teaching Mathematics with DERIVE* (Böhm 1992) und *DERIVE in Education-opportunities and strategies* (Heugl & Kutzler 1994) in Krems an der Donau, auf der überwiegend erste Modelle zum Einsatz des CAS DERIVE vorgestellt wurden.

In den alljährlich stattfindenden Konferenzen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik (GDM) wuchs ebenfalls die Anzahl der Beiträge zum Thema CAS im Mathematikunterricht stetig. Die überwiegende Zahl der Beiträge hatten dabei das CAS DERIVE bzw. *Hand Held* TI-92/TI-Nspire zum Inhalt. Es gab aber auch Veröffentlichungen zum CAS MAPLE bzw. *Hand Held Casio ClassPad II* (Braun 1995; Sávári, C. 2004; Siller, Fuchs & Vásárhelyi 2008; Greefrath & Riess 2010; Hausmann & Kamps 2016), zu CAS MuPAD (Nevel, Postel & Schwarz

1995; Lindner 2001), zu GeoGebra-CAS (Stepancik & Hohenwarter 2011; Elschenbroich 2016) sowie zur Eingabeoberfläche CATO für die CAS MAPLE, MATHEMATICA, MAXIMA, Mu-PAD (Janetzko 2014).

CAS-spezifische internationale Tagungen sind die *International Conference on Technology in Mathematics Teaching* (ICTMT) und die *Conference on Computer Algebra- and Dynamic Geometry Systems in Mathematics Education* (CADGME).

Eine Entwicklung, die stark vom Einzug des CAS in die Schule initiiert und befördert wurde, ist die sogenannte *Hand Held Philosophie.* In der Schule werden der TI-Nspire und der Casio ClassPad II als Rechner eingesetzt. Das CAS beider Rechner wird in diesem Buch wiederholt genutzt.

Für die Möglichkeiten, welche die *Hand Held Philosophie* eröffnet, greifen wir auf die Statements von Gary Asp und Barry McCrae sowie Linda Maree Ball, Kaye Stacey und David Leigh-Lancaster zurück:

„*... hand-held CAS allows teachers and students alike to explore algebraic functions in ways that was once unavailable at the secondary levels. The device permits teachers to introduce and instruct mathematics in many different ways ...*" (Asp & McCrae 2000).

"... hand-held CAS also allows students to observe patterns and explore concepts that promote understanding of mathematical procedures …" (Ball, Stacey & Leigh-Lancaster 2001).

Der Wissenschaftler Robyn Una Pierce und die Wissenschaftlerin Kaye Stacey von der Universität Melbourne postulieren als wesentliche Outcomes der *Hand Held Philosophie*:

„ … *(a) learning the technology and*

(b) learning of mathematics.

To obtain the student learning objectives, the teacher must ensure that students learn how to operate the device with a minimum of difficulty and have a positive attitude towards the operation of hand-held CAS …" (Pierce & Stacey 2001).

‚Ins selbe Horn' stößt Joe Garofaldo:

„ … *the integration of hand-held CAS technology into classroom instruction gives students the opportunity to explore many mathematical concepts graphically, algebraically, and symbolically* … (vgl. *das EIS-Prinzip/die Mehrfenstertechnik* – Kapitel 2.5)" (Garofaldo, J. et al 2000)

Abschließen wollen wir den Reigen der Statements zu CAS und zur *Hand Held Philosophie* mit einer ‚Zusammenfassung' von Sue Garner und Robyn Pierce (2005) sowie Mary Ann Connors und Kathleen G. Snook (2001). Demnach beeinflusst die *Hand Held Philosophie* den Mathematikunterricht in folgender Weise:

- Sie steigert die Freude der Schüler(innen) an der Beschäftigung mit Mathematik.
- Sie unterstützt die Schüler(innen) bei der Entwicklung mathematischer Begriffe.
- Sie ermöglicht es den Schüler(inne)n, ‚herausfordernde' Probleme rasch und korrekt zu lösen.
- Sie fördert die Idee des *Funktionalen Denkens* durch die Verwendung von Funktionen bei der Problemlösung mit dem CAS (vgl. Kapitel 2.1, 2.2 sowie 2.5).

Abschließend wollen wir nun noch die Ausgabeproblematik bei der Nutzung von CAS diskutieren.

Äquivalente Ausdrücke

Zur Darstellung des Problems greifen wir noch einmal auf ein Beispiel aus dem Buch von Bernhard Kutzler, Franz Lichtenberger und Franz Winkler (1990, S. 8) zurück. Wieder einmal geht es um die Integration einer gebrochen rationalen Funktion $r = \frac{P}{Q}$. Die Polynomfunktion P bzw. Q lautet: $P: x \mapsto 3 \cdot x + 2$ bzw. $Q: x \mapsto (x^2 + 1)^2$.

Den Ausdruck für P zerlegen wir nun in folgender Weise in einen dazu *äquivalenten Ausdruck*: $3 \cdot x + 2 = 2 \cdot (x^2 + 1) + (-x + \frac{3}{2}) \cdot 2x$

Für die *Äquivalenzprüfung* verwenden wir das CAS Maxima.

```
(%i1)   expand(2·(x^2+1)+(−x+3/2)·2·x);
(%o1)   3 x +2
```

Setzen wir diesen *äquivalenten* Ausdruck nun in den Ausdruck für unsere Funktion r ein, so erhalten wir:

$$\frac{P}{Q}: x \mapsto \frac{2 \cdot (x^2 + 1) + (-x + \frac{3}{2}) \cdot 2 \cdot x}{(x^2 + 1)^2}$$

Wenn wir beachten, dass $\int f + g = \int f + \int g$ für zwei integrierbare Funktionen f und g gilt, so können wir das Integral wie folgt berechnen:

$$\int r(x) dx = \int \frac{P(x)}{q(x)} dx = \int \frac{2}{x^2 + 1} dx + \int \frac{\left(-x + \frac{3}{2}\right) \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} dx$$