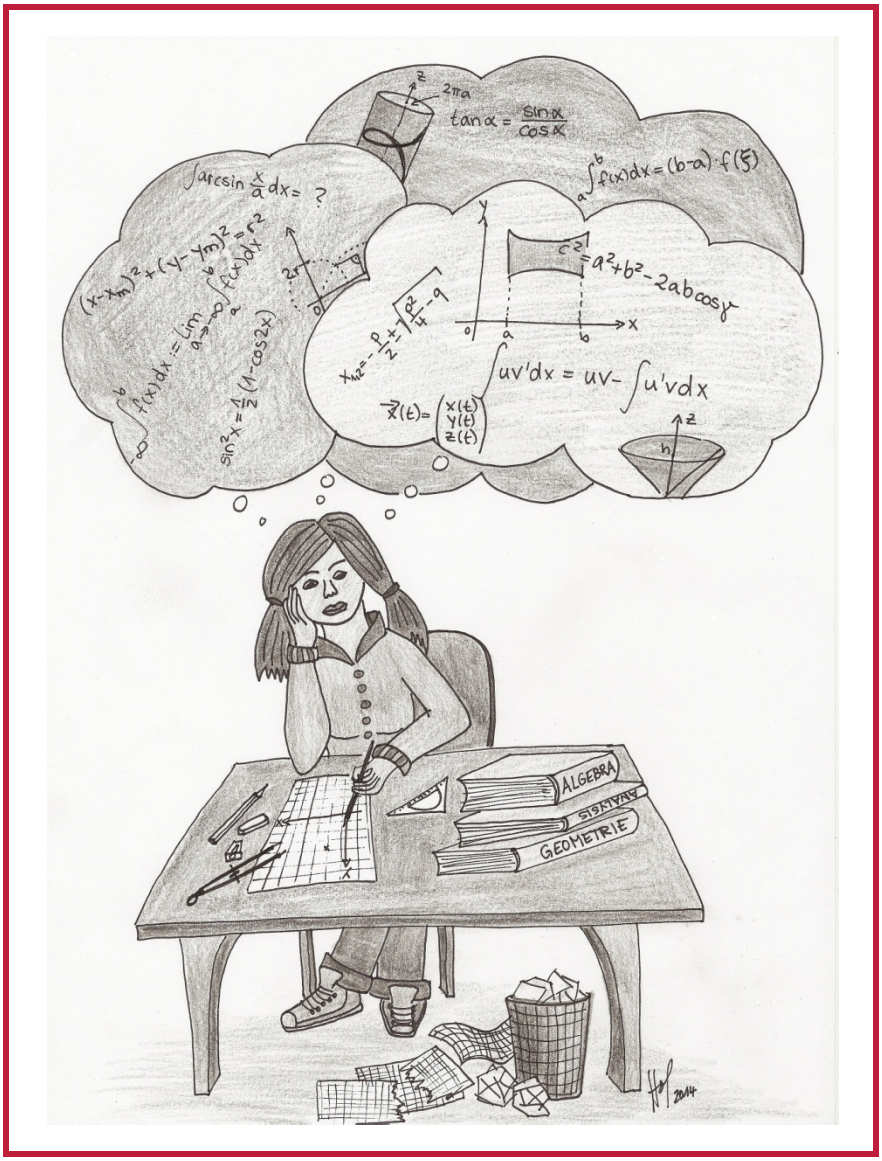
Frank Heinrich / Steffen Juskowiak
(Hrsg.)

MATHEMATISCHE PROBLEME LÖSEN LERNEN

VORTRÄGE AUF DEM GLEICHNAMIGEN SYMPOSIUM AM 27. & 28. SEPTEMBER 2013 AN DER TECHNISCHEN UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG



WTM
Verlag für wissenschaftliche Texte und Medien
Münster

Ars Inveniendi et Dejudicandi 3

Ars Inveniendi et Dejudicandi

Herausgegeben von
Torsten Fritzlar, Frank Heinrich
und Bernd Zimmermann

Band 3

FRANK HEINRICH / STEFFEN JUSKOWIAK (HRSG.)

MATHEMATISCHE PROBLEME LÖSEN LERNEN

VORTRÄGE AUF DEM GLEICHNAMIGEN SYMPOSIUM AM 27. & 28. SEPTEMBER 2013 AN DER TECHNISCHEN UNIVERSITÄT BRAUNSCHWEIG

WTM
Verlag für wissenschaftliche Texte und Medien
Münster

Bibliografische Information der Deutschen Bibliothek

Die Deutsche Bibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte Informationen sind im Internet über http://www.dnb.de abrufbar

Titelbild:
Alexandra Heberling-Hofmeister (2014)

Alle Rechte vorbehalten. Kein Teil des Werkes darf ohne schriftliche Einwilligung des Verlags in irgendeiner Form reproduziert oder unter Verwendung elektronischer Systeme verarbeitet, vervielfältigt oder verbreitet werden.

© WTM – Verlag für wissenschaftliche Texte und Medien, Münster 2015
ISBN 978-3-942197-58-8

Inhaltsverzeichnis

Zum Geleit 3

(*Frank Heinrich* & *Steffen Juskowiak*)

(Mathematische) Probleme lösen lernen – eine Einführung in die Thematik des Symposiums 7

(*Frank Heinrich*)

Symposiumsvorträge (in gehaltener Reihenfolge):

Anregungen aus der Geschichte der Mathematik für einen am Problemlösen orientierten Mathematikunterricht 15

(*Bernd Zimmermann*)

Fachdidaktisch und lerntheoretisch begründete Modelle zum Lehren und Erlernen von Heurismen im Mathematikunterricht 31

(*Regina Bruder*)

Welchen Einfluss haben Selbstreflexionen auf mathematische Problembearbeitungsprozesse? 47

(*Steffen Juskowiak*)

Fehler beim Bearbeiten mathematischer Probleme als mögliche Ansatzpunkte zur Förderung der Problemlösefähigkeit 63

(*Frank Heinrich*)

Zum Konzept der Begabtenförderung in der Mathematischen Lernwerkstatt des IDME Braunschweig 79

(*Frank Förster* & *Hartmut Rehlich*)

Mathematische Lernräume als Lernumgebungen von Problemklassen 95

(*Martin Stein*)

Probleme lösen lernen – nicht nur für Begabte 111

(*András Ambrus*)

Problemfelder als Mittel zur Förderung des mathematischen Denkens in der Sekundarstufe I 127

(Erkki Pehkonen)

Gastvortrag:

Bericht über den Vortrag „Hochleistungen im Kopfrechnen“ am 27.09.2013 in Braunschweig 143

(*Gert Mittring*)

Die Autoren im Kurzporträt 149

Dank der Tagungsorganisatoren an die externen Sponsoren 152

Fotoimpressionen vom Tagungsgeschehen 153

Frank HEINRICH & Steffen JUSKOWIAK, Braunschweig

Zum Geleit

Dieses Buch ist anlässlich des Symposiums „*(Mathematische) Probleme lösen lernen*“ entstanden, das am 27. und 28. September 2013 am Institut für Didaktik der Mathematik und Elementarmathematik an der Technischen Universität Braunschweig stattgefunden hat. Im Zentrum der Veranstaltung standen Fragen zur Förderung der Problemlösefähigkeit, einem wichtigen Ziel von Mathematikunterricht. Die Ausführungen bezogen sich insbesondere auf den Altersbereich der Sekundarstufe I. Namhafte Mathematikdidaktiker aus dem In- und Ausland haben zu dieser Thematik vorgetragen und sich der Diskussion im Plenum gestellt. Schriftliche Ausführungen zu den Vorträgen sind in diesem Tagungsband abgedruckt.

Die Veranstaltung wurde in Kooperation mit dem Kompetenzzentrum Lehrerfortbildung Braunschweig zugleich auch als Lehrerfortbildungsveranstaltung durchgeführt.

Neben den themenbezogenen Veranstaltungen hat der mehrfache Weltmeister im Kopfrechnen, *Dr. Dr. Gert Mittring*, die Veranstaltung durch Darbietung seiner Künste bereichert. Auch darüber wird in diesem Buch berichtet.

Die Veranstalter danken allen Referentinnen und Referenten sowie Teilnehmerinnen und Teilnehmern für ihren Besuch und damit für das in großer Breite ausgedrückte Interesse am Thema der Tagung.

Unser Dank gilt ebenso den Überbringern von Grußworten,

- dem Präsidenten der TU Braunschweig, *Prof. Dr.-Ing. Dr. h. c. Jürgen Hesselbach*,
- dem Dekan der Fakultät für Geistes- und Erziehungswissenschaften der TU Braunschweig, *Prof. Dr. Thomas Scharff*,
- der 2. Vorsitzenden der GDM (Gesellschaft für Didaktik der Mathematik), *Prof. Dr. Silke Ruwisch* und
- dem Vizepräsidenten der DMV (Deutsche Mathematiker Vereinigung), *Prof. Dr. Volker Bach*.

Das Symposium hat nachhaltige und wirksame Unterstützung erfahren. Ein großes Dankeschön ergeht an die *Volkswagen Aktiengesellschaft*, an den *Stifterverband für die Deutsche Wissenschaft*, an das *Bildungshaus Schulbuchverlage Braunschweig* (dabei insbesondere an die Verlage Schroedel, Westermann und Schöningh), an den *Ernst Klett Verlag*, an den *Verlag für wissenschaftliche Texte und Medien Münster (WTM)* und an die *TU Braunschweig* selbst.

Rückblickend gebührt uns als Tagungsleiter (*Frank Heinrich*) und als Organisationsleiter (*Steffen Juskowiak*) des Symposiums die Ehre, allen an der Vorbereitung und Durchführung der Tagung Beteiligten herzlich für ihren engagierten und aufmerksamen Einsatz zu danken! Jede noch so gut durchdachte organisatorische Vorbereitung einer Veranstaltung nützt zudem wenig, wenn nicht ein Team zur Verfügung steht, das sie ebenso gut in die Tat umsetzen kann.

Im Einzelnen bedanken wir uns bei

- *Rosemarie Köhler* und *Norbert Möhle* vom Kompetenzzentrum Lehrerfortbildung Braunschweig, die uns in allen Planungsphasen wirksam unterstützt haben,
- *Maria Beyerl* als Mitarbeiterin im Tagungsbüro,
- *Rebecca Binder* als Mitarbeiterin im Tagungsbüro,
- *Anika Jerke* als Moderatorin zu den Vorträgen,
- *Julia Lüddecke* als Mitarbeiterin im Tagungsbüro,
- *Seraphine Nickel* für die Zusammenstellung von Tagungsmaterialien,
- *Lara-Denise Schuck* als Moderatorin zu den Vorträgen,
- *Johannes Betke* für die Unterstützung beim Auf- und Abbau von Mobiliar für das Symposium sowie als helfende Hand im Tagungsbüro,
- *Jan Block* für die Unterstützung bei der Vorbereitung der Tagung, besonders beim Besorgen der Präsente für die Referenten,
- *Frank Förster* als Kontaktmann zum Rechenweltmeister Gert Mittring,
- *Tobias Kuhls* als Betreuer unserer ausländischen Referenten,
- *Jan-Sascha Meixner* als Fotograph und
- *Hartmut Rehlich* für die Homepagegestaltung zum Symposium

Als sehr zuverlässig und angenehm hat sich überdies die Zusammenarbeit mit *Steffen Markgraf* und *Danja Simon* vom *Studentenwerk Ostniedersachsen* erwiesen, die maßgeblich zum kulinarischen Gelingen des Symposiums beigetragen haben.

Jeder, der einmal mit der Organisation einer solchen Veranstaltung befasst war, weiß verständnisvolle MitarbeiterInnen aus der Universitätsverwaltung und deren daraus resultierende pragmatische Vorgehensweisen bei der Lösung von zunächst unüberwindbar scheinenden Hindernissen zu schätzen. Auch an sie sei ein herzlicher Dank gerichtet.

Durch das Engagement der hier genannten Personen ist eine Veranstaltung zustande gekommen, an die sich alle Beteiligten sicherlich mit Freude erinnern werden.

Im Nachgang zu diesem Symposium ist der vorliegende Tagungsband erstellt worden. In diesem Zusammenhang möchten wir *Kim-Alena Nordmann* für die umfangreiche redaktionelle Aufbereitung der Tagungsbeiträge danken.

Darüber hinaus hat uns *Bernd Zimmermann* bei der redaktionellen Bearbeitung ausgewählter Beiträge ganz wesentlich unterstützt. Vielen Dank auch dafür.

Alexandra Heberling-Hofmeister hat das Titelbild für den Tagungsband angefertigt und zur Verwendung freigegeben. Wir freuen uns und sagen danke.

Frank HEINRICH, Braunschweig

(Mathematische) Probleme lösen lernen – eine Einführung in die Thematik des Symposiums

In vielen Bereichen wird unter einem *Problem* eine (auf ein Individuum bezogene) Anforderung verstanden, deren Lösung zum gegenwärtigen Zeitpunkt mit Schwierigkeiten verbunden ist. Diese Sichtweise hat sich auch weitgehend in der Mathematikdidaktik durchgesetzt, wenngleich Probleme nicht selten „als Aufgabenstellungen schlechthin“, als Bezeichnung für „textlich eingekleidete Anforderungen“, als „offene Aufgaben“ oder als „(schwierige) Anforderungen in realen fächerübergreifenden Situationen“ (PISA-Sicht) angesehen werden. Dieser Fakt erschwert die Diskussion um Problemlösen, um das es auf diesem Symposium geht. Gemäß der zuerst eingenommenen Sichtweise bezeichnet *Problemlösen* den Prozess, bei dem die bestehenden Schwierigkeiten überwunden werden und eine Lösung zustande kommt. Die weiteren Ausführungen sind von dieser Vorstellung geleitet.

Als Mathematikdidaktiker sind wir daran interessiert, dass Schülerinnen und Schüler lernen, mathematische Probleme zu lösen. Neben der Tatsache, dass für viele Mathematiker Problemlösen die prinzipielle Arbeitsweise ihrer Wissenschaft darstellt (vgl. z. B. MASON / BURTON & STACEY 1992) und damit im Mathematikunterricht entsprechende Aufmerksamkeit erfahren sollte, lassen sich u.a. auch lernpsychologische, pädagogische, philosophische und gesellschaftliche Gründe anführen (vgl. z. B. ZIMMERMANN 2003), welche

die Förderung der Problemlösefähigkeit (Problemlösekompetenz) als ein wichtiges Ziel von Mathematikunterricht legitimieren.
Wenn man bekannt gewordene Förderansätze der vergangenen vier Jahrzehnte betrachtet, dann sind sie insbesondere durch zwei Fragen(komplexe) ausgezeichnet.

I. **Was** soll [„in erwünschter Weise"] gefördert werden? **Wo** ist der Hebel anzusetzen? Das sind Fragen nach **Komponenten**, die den Verlauf und das Ergebnis von Problembearbeitungsprozessen bestimmen und daher als Ansatzpunkte für Fördermaßnahmen angesehen werden können.

II. **Wie** soll gefördert werden? Diese Frage bezieht sich auf geeignete **Fördermethoden** bzw. **–maßnahmen**.

In der Mathematikdidaktik wurden anknüpfend an denkpsychologischen Arbeiten hinsichtlich (I.) die folgenden Komponenten herausgearbeitet (vgl. z. B. KIEßWETTER 1983, SCHOENFELD 1985, GEERING 1992, HEINRICH / BRUDER & BAUER 2014), deren „Entwicklungs- und Ausführungsqualität" Problemlösen beeinflusst:

- Kognitionen (fachliches Wissen und Können)
  - Bereichswissen (Sätze, Definitionen, algorithmische Verfahren …)
  - Heuristiken (heuristische Verfahren, heuristische Hilfsmittel)
- Metakognitionen („Management")
  - Wissen über (mathematisches) Denken
  - Kontroll- und Steuerungsprozesse bei der Bearbeitung des Problems

- Einstellungen bzw. Grundhaltungen (zum aktuellen Problem, zur Mathematik, …)
- Sonstiges (z. B. Rahmenbedingungen des Problemlösens).

Dem Ausbau der heuristischen Komponente in Form des Erlernens nützlicher Heuristiken wurde im Rahmen von Förderbemühungen dabei bislang die größte Aufmerksamkeit geschenkt. Die Begründung dafür ist bereits in der Annahme über die kognitive Struktur beim Problemlösen enthalten (DÖRNER 1976). Problemlösen zeichnet sich gegenüber (Routine-)Aufgabenlösen ja gerade dadurch aus, dass eine Wissensstruktur (epistemische Struktur) zum Problemlösen allein nicht ausreicht, sondern heuristische Denkweisen erforderlich werden.

Während weitgehend Konsens über die oben genannten Ansatzpunkte besteht, ist die Frage nach dem WIE des Förderns (also hinsichtlich II.) ein weites Feld und didaktisch strittig. Zentral ist dabei die Diskussion über die Art und Weise heuristischer Bildung bzw. Schulung. Hier kann man zwischen direkten und indirekten Fördermaßnahmen unterscheiden. Bei direkter Förderung geht es im Kern um Vermittlung, nachfolgendes Üben und Reflektieren von heuristischen Vorgehensweisen an speziell hierfür ausgewählten Problemen. Indirektes Fördern betont eher die Gestaltung der Situation, und zwar so, dass Denken und damit Lernen angeregt werden, ohne in der Regel die Strategien explizit zu benennen. Grundsätzlich müssen direkte und indirekte Förderansätze aber einander nicht ausschließen.

Im Folgenden sind häufig genannte Maßnahmen zur Förderung der Problemlösefähigkeit, wie man sie z. B. bei KILPATRICK (1985), BRUDER (1992), HEINRICH (1992), ZECH (1996), TIETZE & FÖRSTER (2000) oder LEUDERS (2003) findet, aufgeführt. Es ist davon auszugehen, dass alle diese Maßnahmen gewisse Vor- und Nachteile haben, und daher auf Ausgewogenheit in ihrer Anwendung zu achten ist (vgl. auch ZECH ebenda):

- (implizites Lernen durch) individuelles Lösen zahlreicher und verschiedenartiger Probleme
- systematisches Wiederholen und Üben von elementaren mathematischen Grundlagen
- Kennenlernen, Ausbilden und Üben von Teilhandlungen des Problemlösens
- heuristische Vorgehensweisen lehren und vielseitig anwenden lassen
- Reflexion der eigenen Problemlösetätigkeiten
- metakognitive Strategien lehren und anwenden lassen
- automatisierte Gedankenabläufe stören, ein konstruktives Verhältnis zu Denkfehlern schaffen
- Lernen durch Nachahmen von Experten
- Lernen durch kooperatives Arbeiten in Gruppen
- eine positive Lernatmosphäre schaffen
- geeignete (problemorientierte) Lernumgebungen bereitstellen

TIMSS hat nachdrücklich auf Defizite deutscher Schülerinnen und Schüler im Bereich Problemlösen aufmerksam gemacht. Seither sind Fragen der Förderung der Problemlösefähigkeit (wieder) stär-

ker in das Zentrum mathematikdidaktischer Diskussion gerückt und man kann zwei grundlegende Zugänge ausmachen, die Problemlösefähigkeit „besser als bisher“ zu fördern. Zum einen geht es darum, bislang vorliegende Erkenntnisse stärker in der Breite umzusetzen und zum anderen sind die Bemühungen darauf gerichtet, vorliegendes Wissen durch Forschung, Entwicklung und Erprobung anzureichern und so neue bzw. ergänzende Anregungen für eine Förderung zu erhalten (vgl. BLK 1997). In diesem Kontext lassen sich folgende Trends in der deutschsprachigen Mathematikdidaktik ausmachen (vgl. auch HEINRICH / BRUDER & BAUER 2014):

- umfangreiche Lernangebots- und Materialkonstruktion für unterrichtliches Problemlösen
- stärkeres Einbeziehen von Problemfindungsprozessen
- stärkere Verzahnung von (anerkannten) Einzelmaßnahmen zu komplexeren Förderansätzen (z. B. von heuristischer Schulung mit metakognitiver Schulung)
- stärkere Berücksichtigung von Problemlösen (und Problemfinden) im Mathematikunterricht in der Grundschule
- verstärkte Zuwendung zur Transferproblematik
- Suche nach „ergänzenden Ansatzpunkten“ (z. B. Wechselvorgänge und -situationen beim Problemlösen, Fehleraspekte beim Problemlösen)
- mehr Investitionen in Lehrerfort- und Weiterbildung

Trotz der vielfältigen Bemühungen gibt es aber noch viele offene Fragen, was die Befähigung von Schülerinnen und Schülern zum Lösen mathematischer Probleme betrifft (vgl. z. B. VÁSÁRHELYI & ZIMMERMANN 2010). Einige dieser Fragen werden in den Tagungs-

vorträgen (und damit auch in den Tagungsbandbeiträgen) aufgegriffen. Im Einzelnen geht es um Folgendes.

BERND ZIMMERMANN zeigt auf, wie durch Anregungen aus der Geschichte der Mathematik klassisch-inhaltliche Lernziele besser unterstützt und wie problemlösendes Denken von Schülerinnen und Schülern besser gefördert werden kann.

REGINA BRUDER stellt ein empirisch geprüftes, tätigkeitstheoretisch begründetes Unterrichtskonzept zum langfristigen Kompetenzaufbau im mathematischen Problemlösen unter Einbezug von Unterrichtsbeispielen in den Mittelpunkt ihrer Ausführungen.

Über eine empirische Erkundungsstudie mit Elftklässler(innen) zum Einfluss von Selbstreflexionen auf die Bearbeitung mathematischer Probleme berichtet STEFFEN JUSKOWIAK.

Um Hemmnisse, Defizite und Fehler beim Bearbeiten mathematischer Probleme geht es im Beitrag von FRANK HEINRICH, der Problembearbeitungsprozesse dahingehend analysiert hat.

FRANK FÖRSTER und HARTMUT REHLICH berichten über die Förderung mathematisch begabter Kinder des dritten bis sechsten Schuljahres mit dem Schwerpunkt der Anregung und Pflege mathematiktypischer Denkprozess beim Lösen von Problemen.

MARTIN STEIN befasst sich in seinem Vortrag mit Lernumgebungen bei der Bearbeitung von Problemklassen und charakterisiert diese durch den (neuen) Begriff „mathematische Lernräume“.

Deutlich zu machen, dass Problemelösenlernen nicht nur ein Ziel für die Arbeit mit begabten Kindern darstellt, ist das Hauptanliegen des Beitrags von ANDRÁS AMBRUS.

ERKKI PEHKONEN gibt einen Überblick über die weltweite Situation von Problemlöseunterricht und geht insbesondere auf Problemfelder und deren zunehmender Verwendung im Mathematikunterricht ein.

Literatur

Becker, G. (1990). *Problemlösen unter Bedingungen der Selbstbeobachtung*. Unveröffentlichtes Manuskript.

BLK (1997). *Gutachten zur Vorbereitung des Programms „Steigerung der Effizienz des mathematisch – naturwissenschaftlichen Unterrichts“*. Heft 60 der Materialien zur Bildungsplanung und zur Forschungsförderung.

Bruder, R. (1992). Problemlösen lernen – aber wie? In: *mathematik lehren*, 52, S. 6 – 12.

Dörner, D. (1976). *Problemlösen als Informationsverarbeitung*. Stuttgart: Kohlhammer.

Geering, P. (1992). Eigenständig Mathematik lernen. Auszug aus dem *Schlussbericht des Projekts „Eigenständige Lerner“.* Pädagogische Hochschule St. Gallen, S. 1 – 7.

Heinrich, F. (1992). *Zur Entwicklung des Könnens der Schüler im Lösen von Komplexaufgaben*. Dissertation. FSU Jena.

Heinrich, F. (2004). *Strategische Flexibilität beim Lösen mathematischer Probleme*. Hamburg: Dr. Kovac.

Heinrich, F. / Bruder, R. & Bauer, C. (2014). Problemlösen lernen. In: *Handbuch der Mathematikdidaktik*. Springer, Spektrum: Berlin.

Kießwetter, K. (1983). Modellierung von Problemlöseprozessen. In: *MU - Der Mathematikunterricht*, 3, S. 71 – 101.

Kilpatrick, J. (1985). A Retrospective Account of the Past 25 Years on Teaching Mathematical Problem Solving. In: Silver, E.A. (Ed.): *Teaching and Learning Mathematical Problem Solving: Multiple Research Perspectives*. Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates, p. 1 – 15.

Leuders, T. (2003). Problemlösen. In: T. Leuders (Hrsg.): *Mathematik-Didaktik. Praxishandbuch für die Sekundarstufe I und II*, S. 119 – 134. Berlin. Cornelsen Verlag Scriptor.

Mason, J. / Burton, L. & Stacey, K. (1992). *Hexeneinmaleins – kreativ mathematisch denken*. 3. Auflage. München: Oldenbourg.

Rott, B. (2013). *Mathematisches Problemlösen. Ergebnisse einer empirischen Studie*. Münster: WTM-Verlag.

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical Problem Solving*. Orlando: Academic Press.

Tietze, U.-P. & Förster, F. (2000). Fachdidaktische Grundfragen. In: U.-P. Tietze, / M. Klika / H. Wolpers (Hrsg.). *Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II*. Band 1: Fachdidaktische Grundfragen - Didaktik der Analysis, S. 1 – 177. 2. durchgesehene Auflage. Braunschweig, Wiesbaden: Vieweg.

Vásárhelyi, E. & Zimmermann, B. (2010). György Pólya (1887 – 1985) – zum Menschen, Mathematiker und Mathematikdidaktiker. In: *MU – Der Mathematikunterricht*, Heft 2, Jahrgang 56, S. 4 – 12.

Zech, F. (1996). *Grundkurs Mathematikdidaktik* (8. Auflage). Weinheim und Basel: Beltz.

Zimmermann, B. (2003). Mathematisches Problemlösen und Heuristik in einem Schulbuch. In: *MU - Der Mathematikunterricht*, Heft 1, Jahrgang 49, S. 42-57.