Isabell Bausch, Guido Pinkernell, Oliver Schmitt (Hrsg.)

Unterrichtsentwicklung und Kompetenzorientierung

Festschrift für Regina Bruder

WTM
Verlag für wissenschaftliche Texte und Medien
Münster

Festschriften der Mathematikdidaktik 1

Isabell Bausch, Guido Pinkernell, Oliver Schmitt (Hrsg.)

Unterrichtsentwicklung und Kompetenzorientierung

Festschrift für Regina Bruder

WTM
Verlag für wissenschaftliche Texte und Medien
Münster

Bibliografische Information der Deutschen Bibliothek

Die Deutsche Bibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte Informationen sind im Internet über http://dnb.ddb.de abrufbar.

Alle Rechte vorbehalten. Kein Teil des Werkes darf ohne schriftliche Einwilligung des Verlags in irgendeiner Form reproduziert oder unter Verwendung elektronischer Systeme verarbeitet, vervielfältigt oder verbreitet werden.

© WTM – Verlag für wissenschaftliche Texte und Medien, Münster 2015
ISBN 978-3-942197-48-9

Inhaltsverzeichnis

Isabell Bausch, Guido Pinkernell & Oliver Schmitt 1
Wissenschaftliches Wirken von Regina Bruder

Mathematikunterricht entwickeln

Axel Brückner 15
Zum Abstrahieren und Konkretisieren beim Lernen von Mathematik

Andreas Büchter 27
Spiralcurriculum Stochastik – von der Grundschule bis zum Abitur

Wilfried Herget & Christoph Hammer 39
Aufgaben jenseits von ‚Kochrezepten'

Katja Maaß 49
Veränderungen im Schulalltag implementieren: Beliefs sind ein Schlüssel dazu!

Michael Neubrand & Johanna Neubrand 61
Interpretieren von Aufgabenbearbeitungen: Woran kann man sich orientieren?

Sabine Ogrin & Bernhard Schmitz 69
Vermittlung selbstregulierten Lernens im Mathematikunterricht

Susanne Prediger, Stephan Hußmann, Timo Leuders & Bärbel Barzel 81
Kernprozesse – Ein Modell zur Strukturierung von Unterrichtsdesign und Unterrichtshandeln

Hans-Dieter Sill 93
Polyvalente Aufgaben

Sebastian Vogel, Werner Blum, Kay Achmetli & Janina Krawitz 105
Zum Potential von Lernstandserhebungen für die Unterrichtsentwicklung – Das Projekt VELM-8

Kompetenzen im Mathematikunterricht

Peter Borneleit 121
Auffassungen Diesterwegs zum Bilden von Urteilen und Schlüssen, Angeben von Gründen und Aufstellen von Beweisen im Rechen- und Raumformenlehreunterricht

Gilbert Greefrath 131
Lösungshilfen für Modellierungsaufgaben

Aiso Heinze & Stefan Ufer 141
Die Interaktion von Wissen mit Problemlösestrategien am Beispiel geometrischer Beweisprobleme

Hans Humenberger 151
Mathematik als Prozess durch Modellierungsaufgaben im Unterricht

Katja Lengnink 161
„Es hahrt vier Ekehn und igahrl wihruhm ihrs dret es bleibt immer kleich“ – Einblicke in den geometrischen Kompetenzerwerb bei Grundschulkindern

Jürgen Maaß 173
Kompetent Modellieren im Mathematikunterricht – eine umfassende Kompetenz

Hans-Stefan Siller 183
Mathematisches Modellieren – eine notwendige Kompetenz zum Betreiben und Anwenden von Mathematik

Katrin Vorhölter & Gabriele Kaiser 195
Metakognitive Kompetenzen in Modellierungsprozessen

Lehrerbildung

Michael Besser & Dominik Leiss 209
Professionswissen von Lehrkräften in einem kompetenzorientierten Mathematikunterricht: Lehrerfortbildungen zum formativen Assessment

Karl-Friedrich Gründer & Dirk Hölzer 221
Offene Differenzierung im MU oder „Auf den Lehrer kommt es an!“ – Ein Unterrichtsentwicklungs- und Fortbildungsprojekt an Hessischen Studienseminaren

Daniel Pittich & Ralf Tenberg 233
Kompetenzentwicklung als lernortalternierender Integrationsprozess – Aktuelle Überlegungen zu einem etablierten Grundkonzept beruflicher Didaktik

Anne Prescott & Michael Cavanagh 245
Roles of secondary mathematics mentor teachers during professional experience

Neue Medien in Schule und Hochschule

Helmut Linneweber-Lammerskitten 257
Der Einsatz mathematischer Kurzfilme als Mittel der Binnendifferenzierung

Julia F. M. Sonnberger 267
„Endlich fühle ich mich wie eine Studentin“ – Erfahrungen mit ePortfolios in der Hochschullehre

Thomas Sperlich 277
CAliMERO – Ein Rückblick aus dem Projektteam

Hans-Georg Weigand 287
Neue Werkzeuge – neues Denken!? oder Reflexionen über einen Vortrag vor 20 Jahren

Mathematikunterricht konkret

Christina Bauer geb. Collet & Evelyn Komorek 299
Invarianten im Geometrieunterricht experimentell erkunden und visualisieren

Ulrich Böhm 315
Sinnvolle Bearbeitung realitätsbezogener Aufgaben als Grundlage für eine kumulative Entwicklung von Modellierungskompetenzen

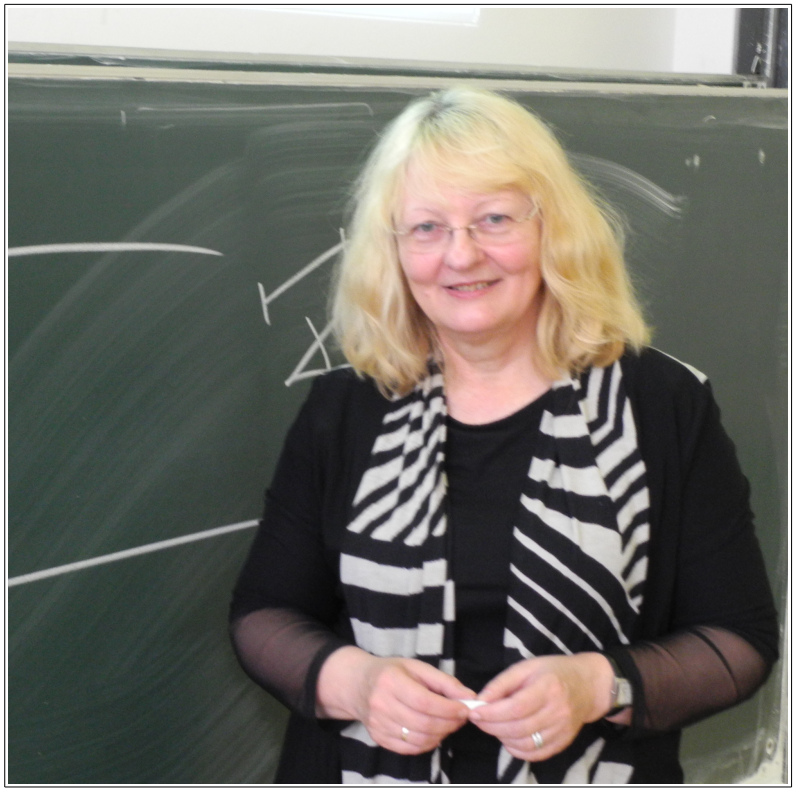
Elke Goldberg 329
Ist Frontalunterricht schlechter Unterricht?

Herbert Henning & Mike Keune 341
Niveaustufen von Modellbildungskompetenzen

Martin Stein & Eileen Braun 351
Aufgaben mit Realitätsbezug in einer Lernumgebung zum Thema Zoo

Wolfgang Zillmer 363
Einige didaktisch-methodische Überlegungen zum Lösen von Konstruktionsaufgaben

Publikationsliste von Regina Bruder 375



Prof. Dr. Regina Bruder (2013)

Wissenschaftliches Wirken von Regina Bruder

Isabell Bausch, Technische Universität Darmstadt
Guido Pinkernell, Pädagogische Hochschule Heidelberg
Oliver Schmitt, Technische Universität Darmstadt

Jedem, der mit Regina Bruder ein Gespräch über mathematikdidaktische Theorien geführt oder ihre Grundlagenveranstaltung zur Didaktik der Mathematik an der Technischen Universität Darmstadt besucht hat, ist der Burgturm als ein Bild für didaktische Theoriebildung bekannt. Es ist lohnenswert dieses Bild im Gedächtnis zu

behalten um die Vielfältigkeit des wissenschaftlichen Werkes Regina Bruders einordnen zu können.

In einem Vorlesungsskript erklärt sie selbst: „Sich auf die Ebene von Theoriebildungen zu begeben heißt, einige Stufen zu erklimmen heraus aus der Ebene, um Überblick zu gewinnen über das, was in der Ebene ‚abläuft'. Je höher man steigt, um so mehr kann man überblicken – aber um so mehr verlieren sich auch die Details. Das Wesen des Ganzen kommt ins Blickfeld – ein zentrales Anliegen von Theoriebildung!"

Unter Verwendung dieses Gedankenbildes zieht Regina Bruder schon am Ende ihrer Habilitationsschrift das Fazit, dass es einer mathematikdidaktischen Theoriebildung darum gehen sollte, mit gemeinsamen Grundpositionen „auf den verschiedenen Ebenen aus dem Fenster blicken und begründet entscheiden zu können" (Bruder, 1988, S. 224). Konsequenterweise finden sich in ihrem wissenschaftlichem Wirken Beiträge auf allen Ebenen dieses Burgturms. Über dieses Wirken soll im einführenden Kapitel gewissermaßen von einem der oberen Stockwerke aus eine Übersicht gegeben werden.

1 Wissenschaftlicher Werdegang

Regina Bruder ist eine von wenigen Mathematikdidaktikerinnen und -didaktikern, die sowohl über tiefe Einblicke in die ostdeutsche Tradition der Mathematikmethodik als auch die westdeutsche Mathematikdidaktik verfügt. Ihre wissenschaftliche Prägung erhielt sie in der damaligen DDR, nach der Wende gelang ihr auch eine wissenschaftliche Karriere in den alten Bundesländern des vereinten Deutschlands.

Ihr wissenschaftlicher Werdegang begann 1971 mit einem Diplomfachlehrerstudium für Mathematik und Physik an der damaligen Pädagogischen Hochschule Potsdam, das sie 1975 abschloss. Darauf folgte ein Forschungsstudium am Potsdamer Lehrstuhl Methodik des Mathematikunterrichts unter Leitung von Alfred Dietz. In dieser Zeit fertigte sie ihre Dissertation zu dem Thema „Untersuchungen zur Effektivierung von Schülertätigkeiten in Aufgabenbearbeitungsprozessen beim Festigen im Mathematikunterricht der Abiturstufe" an, die sie 1979 beendete.

Bis 1991 war sie als wissenschaftliche Mitarbeiterin an der PH Potsdam beschäftigt. In dieser Zeit entstanden zahlreiche Publikationen, die vor allem aufgabentheoretisch oder heuristisch ausgerichtet waren. 1988 habilitierte sie mit einer theoretischen Arbeit über „Grundfragen mathematikmethodischer Theoriebildung unter besonderer Berücksichtigung des Arbeitens mit Aufgaben". Wie bereits für ihre Dissertation (1980), erhielt sie auch für ihre Habilitation den Forschungspreis der PH Potsdam.

Die gesamte Ausbildung zur Mathematikdidaktikerin absolvierte Regina Bruder also in der DDR. Die dortige Mathematikmethodik prägt ihre theoretischen Überzeugungen bis heute – einige Beispiele dafür sind das Theoriesystem für die Methodik des Mathematikunterrichtes ihres Doktorvaters Alfred Dietz, das Modell der typischen Unterrichtssituationen von Wolfgang Steinhöfel und anderen sowie die Arbeiten zum Beweisen im Mathematikunterricht von Werner Walsch.

Die sowjetische Psychologie und Didaktik hatte großen Einfluss auf die Mathematikmethodik, bis heute ist daher für Regina Bruder die Tätigkeitstheorie prägend

geblieben. Sie geht auf Lew Wygotski zurück und wurde unter anderen von Alexei Leontjew, Wassili Dawydow, Pjotr Galperin, Günter Pippig, Adolf Kossakowski, Hartmut Giest und Joachim Lompscher in die von Regina Bruder heute vielfach rezipierte Form gebracht. Besonders hervorzuheben sind dabei vor allem das Konzept der Orientierungsgrundlage nach Galperin sowie die Strategie des Aufsteigens vom Abstrakten zum Konkreten nach Dawydow. Neben diesen Einflüssen der sowjetisch geprägten Lernpsychologie haben auch die Didaktikvorlesungen des Potsdamer Pädagogen Lothar Klingberg Regina Bruder bis heute nachhaltig beeindruckt.

Als einen Untersuchungsschwerpunkt der Mathematikmethodik der DDR sieht Regina Bruder die „Ziele, Inhalte und Methoden der Vermittlung von theoretischen Einsichten und Erfahrungen der Mathematikdidaktik“ in Lehreraus-, -fort und -weiterbildungen. (Bruder, 1992, S. 22). Über die Lehrerbildung, die bis heute ein Schwerpunkt der Arbeit Regina Bruders geblieben ist, wird weiter unten noch ausführlicher berichtet.

Nach diesen Jahren, in denen sie sich an der PH Potsdam – um ihr eingangs zitiertes Bild vom „Turm der Theoriebildung in der Mathematikdidaktik“ zu gebrauchen – vorwiegend in den oberen Stockwerken aufgehalten hatte (abgesehen von ersten Schulerfahrungen in Potsdam und Berlin zu Zeiten ihrer Promotion), zog es sie nach der Wende 1991 mit ihrer Familie nach Hessen. Dort nahm sie im gleichen Jahr eine Tätigkeit als Lehrerin für Mathematik und Physik an der Odenwaldschule in Heppenheim auf und wirkte dort zusätzlich als Fachbereichsleiterin für Mathematik und Naturwissenschaften.

Auch in dieser Zeit veröffentlichte sie weiter, unter anderem erscheinen einige Beiträge in unterrichtspraktischen Zeitschriften, aber von Beginn an befasste sie sich in mehreren Publikationen mit dem konstruktiven Zusammenwachsen der west-deutschen Mathematikdidaktik und der ostdeutschen Mathematikmethodik. Die Verbindung von Theorie und Praxis sah sie dabei als den wesentlichen Prüfstein der künftigen Mathematikdidaktik an, die neben der deskriptiven Funktion auch eine konstruktive besitzt. „Von der Realisierung dieser konstruktiven Komponente […] wird das Ansehen der Mathematikdidaktik künftig abhängen.“ (Bruder, 1992, S. 28)

Im Jahr 1995 hielt Regina Bruder einen Vortrag im mathematikdidaktischen Kolloquium der TU Darmstadt zum Thema „Heuristische Schulung im Mathematik-unterricht. Ein Erfahrungsbericht“. Drei Jahre später übernahm sie nach der Emeritierung von Prof. Benno Artmann die Vertretungsprofessur. Einen Ruf nach Saarbrücken lehnte sie im Jahr 2000 ab, ein Jahr später wurde sie schließlich als Professorin für Didaktik der Mathematik in der Nachfolge von Gunter Stein an die TU Darmstadt berufen, wo sie seither wissenschaftlich wirkt und von wo sie sich in verschiedenen Bereichen in der gesamtdeutschen Didaktik eingebracht und etabliert hat. Bereits ab dem Jahr 2000 leitete sie gemeinsam mit Bernhard Schmitz, Professor für Psychologie an der TU Darmstadt, ein Teilprojekt im Rahmen des DFG-Schwerpunktprogramms „Bildungsqualität Schule“ BIQUA. Es folgten viele weitere Projekte mit unterschiedlichen Kooperationspartnern, die weiter unten detaillierter beschrieben werden.

Ebenfalls seit dem Jahr 2000 ist Regina Bruder Mitherausgeberin der Zeitschrift mathematik lehren beim Friedrich Verlag, des Weiteren wirkt sie auch als Gutachterin beim Journal für Mathematik-Didaktik und DFG-Projekten mit. Als Beraterin wirkte sie unter anderem an der Standardentwicklung für die Abiturprüfung in Deutschland und Österreich, der Curriculumsentwicklung der Oberstufe in Niedersachsen, der Konstruktion von Aufgaben zur Normierung der Bildungsstandards sowie in der Expertengruppe für den deutschen Ergänzungstest PISA 2003 mit.

Im gesamten deutschsprachigen Raum tritt sie als Vortragende auf Lehrerfortbildungen und Workshops auf, ebenso auf Tagungen mathematikdidaktischer Gruppierungen, wie etwa der International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME), der GDM und des MNU. Sie gehört den Arbeitskreisen Vergleichsuntersuchungen und Vernetzung der GDM an, ebenfalls der Gruppe ISTRON, die sich für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht einsetzt.

Zu den wichtigsten Publikationen der letzten Jahre gehört das 2008 erschienene „Praxisbuch: Mathematikunterricht entwickeln: Bausteine für kompetenzorientiertes Unterrichten“, das sie gemeinsam mit Andreas Büchter, Evelyn Komorek und Timo Leuders im Cornelsen Scriptor Verlag publizierte sowie das 2011 erschienene Buch „Scriptor Praxis: Problemlösen lernen im Mathematikunterricht“, das sie gemeinsam mit ihrer früheren Doktorandin Christina Bauer (geb. Collet) ebenfalls bei Cornelsen Scriptor veröffentlichte. Im Jahr 2014 erscheint das „Handbuch der Mathematikdidaktik“ im Springer Verlag, das erste deutschsprachige Werk dieser Art, das sie gemeinsam mit Lisa Hefendehl-Hebecker, Barbara Schmidt-Thieme und Hans-Georg Weigand veröffentlichen wird.

Auch auf internationaler Ebene tritt Regina Bruder verstärkt in Erscheinung, etwa durch den PME-Report zur deutschen empirischen Forschung und drei Artikel in internationalen Zeitschriften (Prescott, Bausch & Bruder, 2013; Bruder & Prescott, 2013; Nitsch, Fredebohm, Bruder, Kelava, Naccarella, Leuders & Wirtz, 2013).

2 Mathematikunterricht entwickeln

Theoretisch reflektiert und unterrichtspraktisch wirksam – dieses Motto sieht man nicht zuletzt in einer Vielzahl von Projekten realisiert, in denen die konkrete Weiterentwicklung von Mathematikunterricht verfolgt wird. Wir nennen hier stellvertetend für viele weitere Projekte (jeweils in Partnerschaft mit Texas Instruments und dem jeweiligen Landeskultusministerium):

- MABIKOM (2008-2012): ein Projekt zur binnendifferenzierenden Unterrichtsgestaltung in der Sekundarstufe I
- CALiMERO (2005-2010): die wissenschaftliche Begleitung des Modellversuchs des Landes Niedersachsen zum Einsatz von CAS im Mathematikunterricht
- TIM (2005-2007): ein Modellprojekt des Landes Rheinland-Pfalz zum Rechnereinsatz im Mathematikunterricht

Weitere Projekte zur Unterrichtsentwicklung haben ihren Anfang gemacht oder sind in Planung, z. B. LEMAMOP seit 2013 in Niedersachsen, MABIKOM-Oberstufe ab

2014 in Hessen, HeMaS 2014 in Rheinland-Pfalz. Wie diese Projekte für die Überzeugungen Regina Bruders stehen, lässt sich an den drei erstgenannten folgendermaßen deutlich machen:

Zunächst fällt der Einsatz von digitalen Werkzeugen in den drei Projekten ins Auge. Auch wenn die Förderung neuer Technologien im Unterricht häufig mit dem Namen Regina Bruders assoziiert wird, verfolgt sie dieses Thema doch nie bedingungslos und unreflektiert, sondern der Einsatz muss sich immer daran messen lassen, inwieweit er zu einem guten Mathematikunterricht beiträgt. Trotzdem ist der medientechnische Aspekt für die Entstehung dieser großen Projekte nicht unwichtig. Denn während die seit Ende des vergangenen Jahrtausends vielerorts auch curricular verankerte Verpflichtung des Einsatzes von GTR und CAS-Handhelds dazu veranlasste, sich wieder grundsätzliche Gedanken über die Merkmale eines guten und vor allem nachhaltigen Unterrichts zu machen, wuchs eben auch die Erwartung, die neuen technischen Möglichkeiten mit der Entwicklung und Umsetzung von durchdachten, ganzheitlichen Unterrichtskonzepten zu verbinden. Insbesondere in Niedersachsen hat man das früh erkannt: Wilhelm Weiskirch, Fachberater Mathematik für die Landesschulbehörde, wusste die Expertise Regina Bruders auf dem Gebiet der Unterrichtsentwicklung frühzeitig in die curricularen Entwicklungsvorhaben in Niedersachsen einzubinden, wo die Umsetzung der KMK-Bildungsstandards in ein Kerncurriculum mit der Verpflichtung zum Einsatz mindestens eines graphikfähigen Taschenrechners verbunden wurde.

Damit sind wir beim zweiten gemeinsamen Merkmal dieser Projekte. Im Zentrum steht immer ein Unterrichtskonzept, das mit dem Ziel eines nachhaltigen und differenzierenden Lernens einzelne methodische Elemente benennt und bezüglich Ziele, Inhalte, und Abfolge konkretisiert. Hier ist Regina Bruders wissenschaftliche Prägung durch die ostdeutsche Mathematikmethodik abermals erkennbar: Die Identifizierbarkeit „typischer Unterrichtssituationen“, so könnte man in Anlehnung an Steinhöfel formulieren, kann eine systematische, immer wiederkehrende Anwendung methodischer Rituale mit jeweils klar formulierten didaktischen Zielen begründen: Das Lernprotokoll als verfestigender Rückblick auf das einführend Gelernte, der Wissensspeicher als ein systematischer Überblick über die wichtigsten Begriffe und Verfahren, differenzierende Übungsphasen mit unterschiedlichen Aufgabentypen und Wahlmöglichkeiten, die Checkliste als Gelegenheit zur Selbstdiagnose vor wichtigen Lernkontrollen, regelmäßige Kopfübungen zum langfristigen Wachhalten grundlegenden Wissens und Könnens.

Dieses Konzept ist als ein methodischer Rahmen zu verstehen, der vor Ort und für die jeweiligen Bedürfnisse inhaltlich ausgearbeitet werden muss – wobei wir beim dritten Merkmal der Projekte sind: Am Gelingen dieser Projekte sind immer eine große Zahl von Lehrkräften beteiligt, die die methodischen Elemente je nach curricularen Vorgaben und lokalen Bedürfnissen mit Inhalten füllen und in Form umfassender Materialsammlungen ausarbeiten, z. B. MABIKOM – Mathematische binnendifferenzierende Kompetenzentwicklung im Mathematikunterricht (Bruder, Reibold & Wehrse, 2014) oder CAliMERO – Arbeitsmaterialien und methodische und didaktische Handreichungen (Bruder & Weiskirch, 2007ff.). Regina Bruders große Projekte zeigen

es: Unterrichtspraktische Wirksamkeit theoretischer Konzeptionen ist dann am ehesten zu erwarten, wenn Lehrkräfte an der Entwicklung unmittelbar beteiligt sind.

3 Kompetenzen im Mathematikunterricht

Unterrichtsentwicklung heißt immer, das Ziel der Kompetenzentwicklung mitzudenken. Seit der Definition durch Weinert im Jahr 2001 haben die KMK-Bildungsstandards den Begriff der Kompetenz für das Schulfach Mathematik geprägt: Wir meinen das Argumentieren, das Kommunizieren, das Darstellen, das Modellieren usw. wenn wir heutzutage von (allgemeinen) mathematischen Kompetenzen sprechen. Auch diesbezüglich wird man bei Regina Bruder fündig – aktuell etwa im oben schon erwähnten Projekt LEMAMOP, das mit dem Argumentieren, Modellieren und Problemlösen wohl die drei zentralen Prozesskompetenzen in den Blick nimmt.

Unter den genannten Kompetenzen ist das Problemlösen wohl die „allgemeine Kompetenz“, die vor allen anderen mit dem Namen Regina Bruder verbunden ist. Und zwar seit Langem. Einer der Autoren hatte während seines Referendariats in den Neunziger Jahren während der Vorbereitung einer Seminarsitzung zu dem Thema „Problemlösen“ seine Erstbegegnung mit dieser zentralen Kompetenz gleich in Form eines Aufsatzes von Regina Bruder: „Problemlösen lernen – aber wie?“ Bemerkenswert ist hier wieder der unmittelbare unterrichtspraktische Impetus. Später folgt der Aufsatz „Lernen, geeignete Fragen zu stellen“, bemerkenswert ist hier darüber hinaus, dass die unterrichtspraktische Bedeutung nicht zuerst im Erfassen und Vermitteln von einzelnen heuristischen Strategien daher kommt, sondern in einer Form, die wohl zu den schwierigsten, aber für Lehrkräfte wohl auch naheliegendsten gehört: dem Stellen zielführender Fragen. Gewissermaßen „Back to the Roots“, denn Polya hat in seinem maßgebenden Werk die Kompetenz des Problemlösens im Prinzip nicht anders charakterisiert: Es geht darum, Fragen stellen zu können, die in Problemlösesituationen weiterhelfen; Heurismen sind dann erst im zweiten Schritt eine handlungsleitende Systematik der Lösungsansätze, die durch Fragen angeregt wurden. Wie dies im Unterricht umsetzbar sein kann, ist in der Monographie „Problemlösen lernen im Mathematikunterricht“ dargestellt. Die Mitautorin Christina Bauer (geb. Collet) hatte bereits vorher in ihrer Dissertation die Wirksamkeit dieses Ansatzes empirisch nachgewiesen. Diese unterrichtspraktischen Anregungen werden ergänzt durch die Forschungsarbeit an einem Kompetenzmodell für das mathematische Problemlösen im Umgang mit fundamentalen Darstellungsformen von mathematischen Funktionen, insbesondere im Rahmen des DFG-Schwerpunktprogramms „Kompetenzmodelle zur Erfassung individueller Lernergebnisse und zur Blianzierung von Bildungsprozessen“ geförderten Projekts HEUREKO (2007-2013), an dem auch Timo Leuders und Markus Wirtz von der Pädagogischen Hochschule Freiburg beteiligt sind.

Auch für die anderen Prozesskompetenzen hat Regina Bruder wichtige Impulse gegeben. Sie veröffentlichte zum Thema Modellieren u. A. mehrfach in den Bänden der ISTRON-Gruppe für die Förderung von Realitätsbezügen im Mathematikunterricht und richtete in 2008 auch eine Tagung dieser Gruppe in Darmstadt aus. Insbesondere

betreute sie die Dissertation von Ulrich Böhm mit dem Thema „Modellierungskompetenzen langfristig und kumulativ fördern“ (Böhm, 2013). Und die Kompetenz des Argumentierens – in schärferer Ausprägung als das Beweisen die zentrale Kompetenz des Fachmathematikers – ist ebenfalls als Schwerpunkt in Forschungs- und Entwicklungsarbeit Regina Bruders auszumachen. Schon 1983 hat sie zusammen mit Horst Müller einen Artikel zu Begründungs- und Beweisaufgaben im Mathematikunterricht veröffentlicht (Bruder & Müller, 1983). Stellvertretend für viele andere Veröffentlichungen und Vorträge zum Thema sei hier auch die Herausgeberschaft des Themenhefts „Argumentieren“ der Zeitschrift mathematik lehren genannt (Bruder & Pinkernell, 2011)

Bei der sinnvollen Forderung nach „Kompetenzorientierung im Mathematikunterricht“ wird häufig zuerst an die Prozesskompetenzen gedacht, aber auf eine sichere Verfügbarkeit von grundlegendem Wissen und Können kommt es ebenfalls an. Denn während die Prozesskompetenzen häufig das Handeln mit den mathematischen Gegenständen beschreibt, gerät dieses dann zum inhaltlich leeren Werkeln, wenn den Schülerinnen und Schülern das Verständnis der wichtigen Begriffe und Verfahren fehlt. Das ist nicht neu, aber im Zusammenhang mit der weiteren Verbreitung digitaler Werkzeuge im Unterricht ein Feld, das immer mehr in das Blickfeld mathematikdidaktischer Forschung und Entwicklung gerät. In diesem Zusammenhang verweisen wir auf das methodische Element der „regelmäßigen Kopfübungen“ im Unterrichtskonzept Regina Bruders, dessen Wirksamkeit im Rahmen des Projekts CAliMERO wiederholt nachgewiesen werden konnte (z. B. Pinkernell & Bruder, 2013). Nicht zuletzt – weil das Fehlen grundlegenden Wissens und Könnens seit Langem ein Problem ist, das am Übergang von der Schule zu Universitäten und Hochschulen wahrgenommen wird – ist hier auch hervorzuheben, dass Regina Bruder zusammen mit Wilhelm Weiskirch die Initiatorin für die Bildung der Mathematik-Kommission Übergang Schule-Hochschule war, die als gemeinsamer Ansprechpartner des MNU, der GDM und des DMV für Belange von Schnittstellenthemen gebildet wurde (www.mathematik-schule-hochschule.de).

4 Lehrerbildung

Auch die Aus- und Weiterbildung von Mathematiklehrkräften steht im Zentrum des wissenschaftlichen Wirkens von Regina Bruder.

Mit der online Fortbildungsplattform Prolehre (www.prolehre.de) hat Regina Bruder eine Möglichkeit geschaffen, mathematikdidaktische Forschungsergebnisse in die Klassenzimmer zu übermitteln. Diese online-Lehrerfortbildungen haben das Ziel, den Lehrkräften neue Anregungen zur Unterrichtsgestaltung vorzustellen und eine direkte Umsetzung im eigenen Unterricht zu ermöglichen. Zurzeit werden folgende Kurse angeboten:

- Kompetenzdiagnose im Mathematikunterricht
- Basics: Vermittlung und Wachhalten von elementarem Grundkönnen im Mathematikunterricht

- Problemlösen und Selbstregulation
- Binnendifferenzierung im Mathematikunterricht
- Tabellenkalkulation (Excel) im Mathematikunterricht
- Langfristiger Kompetenzaufbau mit Aufgaben im Mathematikunterricht und Empfehlungen zum Schreiben eines Schulcurriculums für Mathematik

Um Lehrkräften nicht nur neue Möglichkeiten zur Unterrichtsgestaltung aufzuzeigen, sondern auch innovative Aufgabenformate bereitzustellen, entwickelte Regina Bruder die Aufgabendatenbank MADABA. Mithilfe dieser Aufgabendatenbank können Mathematiklehrkräfte gezielt Aufgaben nach Kompetenzen, Schwierigkeiten, Inhalten und Klassenstufen zusammenstellen. Dies ist nicht das einzige Materialangebot, das Regina Bruder entwickelt hat. Unter www.amustud.tu-darmstadt.de werden studentische Projekte zum anwendungsorientierten Mathematikunterricht zur Verfügung gestellt, die direkt im Mathematikunterricht eingesetzt werden können.

Dass Regina Bruder ihre Konzepte auch erfolgreich in der universitären Lehrerausbildung einsetzt, zeigt der Preis für gute Lehre, den sie im Jahr 2011 von der „Vereinigung von Freunden der Technischen Universität zu Darmstadt e. V." nach einem Vorschlag durch den Fachbereich Mathematik verliehen bekommen hat.

Dieser Praxisbezug zeigt sich auch in den folgenden Forschungsprojekten zur Aus- und Fortbildung von Mathematiklehrkräften.

Im Rahmen des DFG-Schwerpunktprogramms „Bildungsqualität Schule" BIQUA wurde ein Ausbildungsprogramm für Lehrkräfte zur Förderung von fachspezifischen und selbstregulativen Kompetenzen im MU der SI konzipiert, durchgeführt und längsschnittlich evaluiert (2000-2006). Dieses Projekt leitete Regina Bruder gemeinsam mit Bernhard Schmitz. Die Ergebnisse dieses Projekts sind Teil der Dissertationen von Evelyn Komorek (2006) und Christina Bauer (geb. Collet) (2009) und sind im online-Fortbildungskurs „Problemlösen und Selbstregulation" implementiert.

Zur Untersuchung von Effekten in der Lehrerausbildung wurden die Projekte „Diagnostische Kompetenz von Lehramtsstudierenden der Mathematik" (DisKoLaMa) und „Teacher Education Lesson Plan Survey" (TELPS) an der TU Darmstadt unter der Leitung von Regina Bruder durchgeführt. DisKoLaMa ist ein vom BMBF gefördertes Projekt zur Messung von diagnostischer Kompetenz angehender Lehrkräfte. Heiko Fey entwickelte im Rahmen dieses Projekts ein Messinstrument, das zum Ziel hat individuelles diagnostische Wissen und Können von Studierenden und Referendaren zu beschreiben und Entwicklungsfortschritte sichtbar zu machen (Fey & Bruder, 2011). TELPS ist ein Instrument zur Erfassung und Förderung von mathematikdidaktischem Wissen in Bezug auf die Planung und Gestaltung von Mathematiklehrkräften. Dieses Instrument wurde von Isabell Bausch im Rahmen ihrer Promotion entwickelt und sowohl an der TU Darmstadt als auch an der University of Technology Sydney eingesetzt, um das mathematikdidaktische Wissen der dortigen Lehramtsstudierenden zu evaluieren. Der länderübergreifende Einsatz von TELPS wurde hierbei durch Anne Prescott von der University of Technology Sydney ermöglicht (Prescott, Bausch & Bruder, 2013).

Zur Unterstützung des Kompetenzerwerbs im Studium hat Regina Bruder im Jahr 2010 das „Digitale Kompetenzportfolio für Studierende (Dikopost)“ an der TU Darmstadt eingeführt. In diesem Projekt geht es um die Entwicklung und Erprobung eines studienbegleitenden digitalen Kompetenzportfolios. Hierbei sollen in dem Projekt Best-Practice-Bespiele identifiziert werden, um die Durchführung von Portfolioarbeit in der universitären Lehre zu unterstützen und voran zu bringen. (Menhard, Scholz & Bruder, 2012). Die Grundlagen für dieses fachbereichsübergreifende Projekt wurden im Rahmen von ELKOPOS (elektronisches Kompetenzportfolio für Studierende) entwickelt und innerhalb von Dikopost professionell universitätsweit implementiert.

5 E-Learning rund um den Mathematikunterricht

Dass E-Learning und der Einsatz von neuen Medien im Mathematikunterricht eine wichtige Rolle in der Arbeit von Regina Bruder spielen, wird nicht nur an den Online-Fortbildungen oder den Forschungsprojekten CALIMERO oder MABIKOM deutlich, sondern auch an folgenden innovativen Konzepten.

Im Rahmen des Forums für interdisziplinäre Forschung (FiF) wurde ein didaktisch und lerntheoretisch fundiertes Einsatzszenario für eine Lern- und Diagnoseumgebung mit spielerischen Elementen entwickelt. Laut Projektbeschreibung auf den Internetseiten der Arbeitsgruppe Mathematikdidaktik der TU Darmstadt wurde es „für den Mathematikunterricht in der Sekundarstufe I im Bereich „Darstellungsformen funktionaler Zusammenhänge“ entwickelt. Von zentraler Bedeutung sind dabei die Fragen der Abbildbarkeit von Kompetenzmodellen in digitalen Lernumgebungen und die Integration offener Frage- und Antwortformate in computergestützte Lernumgebungen. Außerdem wird untersucht, inwiefern spielerische Elemente motivationsfördernd sein und Lernprozesse unterstützen können. Schließlich wird untersucht welche Methoden und Konzepte geeignet sind, um Effekte des Einsatzes von digitalen Diagnose- und Lernumgebungen mit spielerischen Elementen zu untersuchen.“ Als erstes Produkt dieses Projekt ist der Mathekrimi „Der Wechsel“ (Autorin: Britta Will) entstanden.

Auch in der Mitarbeit im Projekt VEMINT (Virtuelles Eingangstutorium für MINT-Fächer) zeigt Regina Bruder ihr Interesse für innovative Lernkonzepte. Seit Oktober 2004 werden Lernmaterialien für Vor- und Brückenkurse in Kooperation mit den Universitäten Kassel, Paderborn und Lüneburg entwickelt. Hierbei werden die Lerninhalte mithilfe eines interaktiven Buchs modularisiert dargestellt und durch eine neue Navigations- und Wissensstruktur werden unterschiedliche Nutzungsweisen z. B. zur Erarbeitung und zur Wiederholung oder als Nachschlagewerk besser unterstützt. Seit dem Wintersemester 2007/2008 wird der Mathematikvorkurs an der TU Darmstadt online über die Lernplattform Moodle angeboten. Zunächst nahmen Studienanfänger des Fachbereichs Mathematik teil. Seit dem Wintersemester 2009/2010 wird der Vorkurs zusätzlich den Studienanfängern der Fachbereiche Bauingenieurwesen, Informatik und Maschinenbau angeboten. Im Durchschnitt nehmen ca. 800 Studienanfänger an dem online Mathematikvorkurs teil (Bausch, Fischer & Oesterhaus, 2013).

Dass es für Regina Bruder auch immer um die Qualitätssicherung der Lernangebote geht, zeigt das Projekt zur Entwicklung eines Gütesiegels für e-learning Angebote. Die Arbeitsgruppe E-Learning der TU Darmstadt hebt auf ihrer Website heraus: „Bei den vielfältigen existierenden Produktentwicklungen zum Lehren und Lernen mit computergestützten Medien – von Lernsoftware über online-Fortbildungskurse bis zu verschiedenen Formen telemedialer Lernangebote an den Universitäten – stellt sich die Frage nach den zugrundegelegten Qualitätskriterien und nach einem Gütesiegel für solche Produkte. Die TU Darmstadt bietet in diesem Zusammenhang ein eigenes Gütesiegel für computergestützte Lernangebote (CBTs, WBTs, Blended Learning) an.“ Hier möchte das TU-Gütesiegel qualitativ hochwertige computergestütze Lernangebote kennzeichnen und das E-Learning-Angebot verbessern. Die Entwicklung dieses Gütesiegels dokumentiert die Dissertation von Julia F. M. Sonnberger (2008).

Dass Regina Bruder auch selbst in ihren Lehrveranstaltungen diese Kriterien beachtet zeigt die Verleihung des „Best E-Teaching-Award der Carlo und Karin Giersch-Stiftung“ im Jahr 2007. „Regina Bruder gelang es, mit dem intensiven Einsatz der Lernplattform Moodle, eine moderne Aufgabenkultur mit einer entsprechenden Kompetenzentwicklung der künftigen Lehrkräfte für *Mathematik* zu entwickeln. Die Studierenden lernten, online Aufgaben zu analysieren, zu lösen und multimedial schülerorientiert zu dokumentieren. Die didaktisch ausgefeilte Kombination von Präsenz und Online-Lehre und die intensive Betreuung durch Frau Prof. Bruder und die Tutoren aktivierten die Studierenden zur aktiven Teilnahme und Online-Kommunikation“ (E-Learning-Arbeitsgruppe, 2007).

6 Ausblick auf das Buch

Zum Anlass des 60. Geburtstags von Regina Bruder möchten die Herausgeber und Autoren des vorliegenden Buches dieses vielfältige wissenschaftliche Werk würdigen. Die Gliederung der Beiträge orientiert sich an der bereits in diesem Vorwort vorgenommenen Einteilung der Schaffensbereiche, die Perspektive der Artikel deckt dabei – um das zu Beginn zitierte Gedankenbild des Burgturms der Theoriebildung aufzugreifen – passend zum Werk Regina Bruders die verschiedensten Ebenen der Betrachtung von Mathematikunterricht ab. Die Herausgeber bedanken sich bei allen, die zur Entstehung dieser Festschrift beigetragen haben und wünschen den Lesern eine anregende Lektüre, vor allem aber Regina einen herzlichen Glückwunsch zum Geburtstag.

Literatur

Bausch, I., Fischer, P. R. & Oesterhaus, J. (2013). Facetten von Blended Learning Szenarien für das interaktive Lernmaterial VEMINT – Design und Evaluationsergebnisse an den Partneruniversitäten Kassel, Darmstadt und Paderborn. In I. Bausch, R. Biehler, R. Bruder, P. R. Fischer, R. Hochmuth, W. Koepf et al. (Hrsg.), Mathematische Vor- und Brückenkurse: Konzepte, Probleme und Perspektiven. Heidelberg: Springer.

Böhm, U. (2013): Modellierungskompetenzen langfristig und kumulativ fördern. Tätigkeitstheoretische Analyse des mathematischen Modellierens in der Sekundarstufe I. Wiesbaden: Springer Spektrum.

Bruder, R. (1988). Grundfragen mathematikdidaktischer Theoriebildung unter besonderer Berücksichtigung des Arbeitens mit Aufgaben. Diss. B., Potsdam.

Bruder, R. (1992). Einige Gedanken zum Stand der Theorieentwicklung in der Mathematikdidaktik der DDR. ZDM, 24, 22–29.

Bruder, R. & Müller, H. (1983). Zur Entwicklung des Könnens im Lösen von Begründungs- und Beweisaufgaben im Mathematikunterricht. Mathematik in der Schule, 21(12), 886–894.

Bruder, R. & Weiskirch, W. (2007ff.) CAliMERO: Arbeitsmaterialien für Schülerinnen und Schüler sowie methodische und didaktische Handreichungen für Lehrkräfte. Westfälische Wilhelms-Universität Münster, Zentrum für Lehrerbildung.

Bruder, R. & Pinkernell, G. (Hrsg.) (2011). Themenheft „Argumentieren“. mathematik lehren, Heft 168.

Bruder, R. & Pinkernell, G. (2013). Teaching Methods and Mathematics Achievement in German Computer Aided Classroom Teaching. In A. Lindmeier, A. Heinze (Hrsg.), Proceedings of the 37th Conference of the International Group for the PME (Vol. 4). Kiel.

Bruder, R. & Prescott, A. (2013). Research evidence on the benefits of IBL. ZDM, 45, 811–822.

Bruder, R., Reibold, J. & Wehrse, T. (Hrsg.) (2014). Binnendifferenziertes Aufgabenmaterial für den Mathematikunterricht der Sek I. Braunschweig: Schroedel.

Collet, C. (2009). Förderung von Problemlösekompetenzen in Verbindung mit Selbstregulation. Wirkungsanalysen von Lehrerfortbildungen (Empirische Studien zur Didaktik der Mathematik, Bd. 2). Münster: Waxmann.

E-Learning-Arbeitsgruppe des HRZ. (2007). Der „Best E-Teaching-Award der Carlo und Karin Giersch-Stiftung“. Zugriff am 06.11.2013. Verfügbar unter http://www.e-learning.tu-darmstadt.de/elearning/foerderung/e_teachingaward/archiv_eteachingaward/2007/index.de.jsp.

Fey, H. & Bruder, R. (2011). Messung diagnostischer Kompetenz in der Lehramtsausbildung Mathematik. In R. Haug & L. Holzäpfel (Hrsg.), Beiträge zum Mathematikunterricht 2011 (S. 247–250). Münster: WTM-Verlag.

Komorek, E. (2006). Mit Hausaufgaben Problemlösen und eigenverantwortliches Lernen in der Sekundarstufe I fördern. Entwicklung und Evaluation eines Ausbildungsprogramms für Mathematiklehrkräfte. Berlin: Logos-Verlag.

Menhard, I. Scholz, N. & Bruder, R. (2012). E-Portfolios in der Hochschullehre. Mögliche Umsetzung und Einsatzszenarien. In C. Bremer & D. Krömker (Hrsg.), E-Learning zwischen Vision und Alltag (S. 407–412). Münster: Waxmann.

Nitsch, R., Fredebohm, A., Bruder, R., Kelava, T., Naccarella, D., Leuders, T. & Wirtz, M. (2013, im Druck). Students‘ Competencies in Working with Functions in Secondary Mathematics Education – Empirical Examination of a Competence Structure Model. International Journal of Science and Mathematics Education.

Prescott, A., Bausch, I. & Bruder, R. (2013). TELPS: A method for analysing mathematics pre-service teachers' Pedagogical Content Knowledge. Teaching and Teacher Education, 35, 43–50.

Sonnberger, J. F. M. (2008). Das „E-learning-Label“ an der TU Darmstadt. Entwicklung, Einführung und Auswertung eines Modells zur Qualitätssicherung und Qualitätsentwicklung von E-learning-Veranstaltungen. Berlin: Logos-Verlag.

Mathematikunterricht entwickeln

Zum Abstrahieren und Konkretisieren beim Lernen von Mathematik

Axel Brückner, Universität Potsdam

Die Abstraktion – als geistiger Prozess und als dessen Resultat – ist eng mit der (Entstehung von) Mathematik und mit dem Lernen von Mathematik verbunden. Ohne zu fragen, ob diese Verbindung enger ist als zu anderen Wissenschaften, soll das Abstrahieren näher untersucht werden, soll geklärt werden, was dabei auf geistiger Ebene ablaufen „muss“. Angestrebt wird ein möglichst einfaches theoretisches Modell, aus dem sich erste Konsequenzen für die Initiierung und Gestaltung von mathematischen Lernprozessen ableiten lassen.

Bei der Beschäftigung mit dem Thema wird man nicht umhinkönnen, Allgemeinplätze[1] anzulaufen und/oder von ihnen auszugehen. Nun bieten Allgemeinplätze mehr als den Touch des Trivialen. Zum einen kann – ihrem Wesen entsprechend – eine weite Verbreitung vorausgesetzt werden, zum anderen kann erwartet werden, dass sie weitgehend akzeptiert sind. D. h., sie stellen günstige Ausgangspositionen für einen gedanklichen Exkurs dar. Wie geeignet sie sind, wird sich zeigen.

Eine selbst auferlegte Regel soll darin bestehen, minimalistisch vorzugehen, also nur das vorauszusetzen oder zu fordern, was unverzichtbar ist.

1 Reale Welt und geistige Welt

Dem Philosphen Thomas Hobbes zufolge stehen dem menschlichen Geiste „die materiellen Körper und ihre Bewegungen“ als „das einzig Wirkliche in der räumlichen Welt“ gegenüber (Störig, 1992, S.350). Und eine Verbindung zwischen diesen beiden Bereichen sind unsere Sinne. „Der einzige Weg, auf dem dieses Wirkliche auf den Geist des Menschen einwirkt, ist die physische Berührung mit den Sinnesorganen.“ (Störig, 1992, S. 350). Eine Diskussion darüber, ob die Prozesse im menschlichen Gehirn als dem Ort des Geistes oder der menschliche Geist selbst zur wirklichen Welt zuzurechnen sind oder ihr unvereinbar gegenüberstehen, ist für die Erkundung der Prozesse selbst (zumindest) zunächst belanglos. Zu dem Verhältnis von Geist und Wirklichkeit siehe auch Günther (1966), insbesondere seine Überlegungen zum denkenden Ich und zum gedachten Ich.

- Durch die Sinne entstehen Abbilder von der Wirklichkeit im Geiste. Die Abbilder sind der Anfangspunkt für eine zweite Welt, eine zur realen Welt parallelen Welt, auch bezeichnet als ideelle Welt oder Welt des menschlichen Geistes.
- In der realen Welt gibt es eine gewisse Stabilität und Regelhaftigkeit. Das Wirkliche in seiner Existenz unterliegt steten Veränderungen. Die Veränderungen

1 Darunter werden hier Auffassungen, Sichtweisen bzw. Ideen im weltanschaulichen Sinne verstanden, von denen eine gewisse Popularität erwartet werden kann.. Eventuell mit dem Wort verbundene Bedeutungen wie Binsenweisheit, Überholtes oder Klischeehaftes sind nicht gemeint.

vollziehen sich nicht total chaotisch, sondern im Rahmen von Bedingungsgefügen, die gewisse Gesetzmäßigkeiten bewirken.

- Der menschliche Geist besitzt die Eigenschaft, nicht nur Abbilder von Erscheinungen und Prozessen, die in der realen Welt existieren, zu erzeugen, sondern er ist in der Lage, auf geistiger Ebene Prozesse zu initiieren, die die Verläufe realer Prozesse vorwegnehmen, insbesondere deren Ergebnisse antizipieren.
- Der Mensch in seiner körperlichen Beschaffenheit ist selbst Teil der Wirklichkeit. Sein aktives Verhalten in der Wirklichkeit vollzieht sich in Form von Handlungen. Intendiertes Verhalten geschieht auch in der ideellen Welt.

Zu den zentralen Gedanken seiner Arbeiten über die Entwicklung des menschlichen Erkennens rechnet Piaget die Feststellung, dass das „menschliche Denken […] nie vorausbestimmt oder vorgeformt ist, und dies weder in der Objektwelt noch im Subjekt. Vielmehr enthält es immer ein Element der Konstruktion und der Neuschöpfung, die aus den Wechselwirkungen – man könnte von einer Art Dialektik sprechen – zwischen dem Subjekt und den Objekten hervorgeht. Die Erkenntnis der Objektwelt […] besteht in der Tat nie aus bloßen Registrierungen der beobachtbaren Züge, die schon vor dieser objektiv existiert haben: Sie fügt vielmehr immer Beziehungen hinzu, welche aus der Aktivität des Subjektes hervorgehen“ (Piaget, 1975, S. 6). „Der zweite allgemeine Gedanke […] besagt, dass dieses Aufeinanderpassen des Denkens und der Wirklichkeit kein bloßes äußeres Ereignis von tastenden Versuchen und Korrekturen von Handlungen darstellt: Das Aufeinanderpassen reicht tiefer, und seine Ursachen müssen im Bereich der biologischen Organisation gesucht werden […] Nun ist der lebendige Organismus zwar der Ursprung des ‚Subjekts‘, im übrigen aber stellt er ein physisches Objekt unter anderen dar und ist als solcher mit der gesamten Wirklichkeit verwandt. Man kann daher sagen, dass das Aufeinanderpassen von Objektwelt und Subjekt im Inneren des Organismus gegeben ist“ (Piaget, 1975, S. 7). Auf Erklärungen für dieses treffliche „Aufeinanderpassen des Denkens und der Wirklichkeit“ soll später noch einmal eingegangen werde.

Über die Sinne präsentiert sich die wirkliche Welt dem menschlichen Geist jeweils als ganzheitliches Bild im Sinne einer optischen oder akustischen oder taktilen oder … Momentaufnahme. Diese Bilder taugen nicht, um eine Orientierung zu geben für intendiertes Verhalten. Die Sinneseindrücke müssen verarbeitet werden zu geistigen Elementen, die eine Basis bilden für „erfolgreiche“[2] Regulationsprozesse. Erst durch sie ist gerichtetes Verhalten möglich. Was im Einzelnen dabei geschieht, liegt immer noch weitgehend im Verborgenen. Es kann aber überlegt werden, was dabei geschehen „muss“.

- Die ganzheitlichen Bilder werden in Teile zerlegt, in sinnvolle Einheiten, die für den weiteren Gebrauch tauglich sind. Tauglich sind jene, die „erfolgreiches“ Handeln ermöglichen. Diesbezügliche Entscheidungen fallen über Rück-

2 Hierbei handelt es sich um eine fundamentale Kategorie. Sie soll als Grundbegriff verwendet werden. Es wird davon ausgegangen, dass die individuellen Deutungen des Begriffes „erfolgreich“ hinreichende Übereinstimmungen aufweisen.

kopplungen, auch in Form von Selbstbeobachtungen beim Handeln. Sie sind Teil des Erfahrungslernens.

Wie stark die ganzheitlichen Bilder zweckmäßig zergliedert werden, ist ebenso Teil der Erfahrungen. Durch die Wechselwirkungen zwischen der geistigen und der realen Welt zeigt sich, welcher Grad der Aufgliederung und Diskriminierung sich als geeignet erweist. Wie solche Rückkopplungen und damit verbundene Wertungen ablaufen, muss gesondert betrachtet und untersucht werden.

- Die Einheiten können in Beziehung gebracht werden - vielleicht zu verstehen als gleichzeitige Präsenz in einem Arbeitsspeicher.
- Für die Einheiten können Übereinstimmungen und Unterschiede festgestellt werden.

Piaget spricht z. B. von „einer Eigenschaft, die sich dem Subjekt durch die Wahrnehmung der Objekte aufdrängt“ (Piaget, 1975, S. 75). Am Beispiel der weißen Farbe erläutert er, dass es sich um Erscheinungen handelt, die „als solche schon vor dieser Abstraktion bei jedem Objekt erkennbar“ (Piaget, 1975, S. 75) waren. Den Begriff „weiß“ als Bild in der ideellen Welt bezeichnet er als Ergebnis einer Abstraktion auf der Grundlage der Wahrnehmung von physikalischen Eigenschaften. Vorausgegangen sein muss aber eine Zerlegung der Bilder von Objekten in Komponenten, das In-Beziehung-Setzen der Komponenten, das Feststellen von Übereinstimmung und die Verschmelzung der übereinstimmenden Komponenten zu einem neuen Bild, zum Begriff „weiß“.

- Einheiten können zu einer neuen Einheit zusammengefügt werden.

D. h., auf der Grundlage von Diskrimination, Gegenüberstellung, Vergleich und Vereinigung entstehen Begriffe in der geistigen Welt, die eine Verdichtung von Wahrnehmungsinhalten darstellen.[3] Hält man sich vor Augen, dass es in der wirklichen Welt nichts wirklich Übereinstimmendes gibt, dass alles, was wahrgenommen wird, sich in irgendeiner Weise von allem anderen – sowohl in der Realität selbst als auch in seinen Wahrnehmungsbildern – unterscheidet, so wird deutlich, welche außergewöhnliche Leistung diese einfache Abstraktion bereits darstellt. Es gibt dafür in der wirklichen Welt keine „Vorlage“. Das Ergebnis ist nicht ein Eins-zu-Eins-Bild, sondern eine reduzierende und verdichtende Widerspiegelung. Piaget nennt den Prozess auch „Abstraktion von Objekten, wie sie bei der Bildung eines Begriffs vorkommt, der aus einer äußeren Erfahrung herstammt“ (Piaget, 1975, S. 74).

Eine denkbare Variation für das Entstehen von neuen geistigen Bildern kann darin bestehen:

- In einer Gesamtheit werden bestimmte Elemente durch andere ersetzt.

D. h., in der geistigen Welt kann ein Element, das durch Wahrnehmung und Zergliederung entstanden ist, durch ein anderes ersetzt werden. Dadurch lassen sich im Geiste Bilder[4] erzeugen, für die es in der wirklichen Welt nicht unbedingt Entsprechungen geben muss.

3 Wie diese Prozesse im Einzelnen ablaufen, wie die Begriffe gespeichert, neu aufgerufen, wie sie „transportiert“ oder auf „Tauglichkeit“ geprüft werden, kann an dieser Stelle nicht näher untersucht werden.

2 Geistige Handlungen

Es soll nun näher auf das intendierte Verhalten, auch Handeln genannt, vor allem auf geistiger Ebene eingegangen werden. Einige Überlegungen lassen sich auch problemlos auf das physische Handeln in der wirklichen Welt übertragen. Der Kern des Handels wird charakterisiert durch seinen Typus, als der Art und Weise des Handelns, und durch den Gegenstand, also dadurch, woran bzw. womit die Handlung ausgeführt wird. Bruder unterscheidet neben den genannten noch die Komponenten Handlungsziel und Handlungsbedingungen (vgl. u. a. Bruder, 1985, S. 69).

Für das Handeln an geistigen Bildern wurden mit (5) bis (9) bereits Typen charakterisiert. Sie sollen als elementar angesehen werden. Eine weitere Zerlegung und „Aufspaltung" ist durchaus denkbar, soll aber an dieser Stelle nicht verfolgt werden. In Bruder & Brückner (1988) werden die Typen als „geistige Elementaroperationen" und „Grundbausteine des Denkens" bezeichnet. Die Gegenstände für die Elementaroperationen werden in genannter Quelle mit Teil-Ganzes und Objekt-Eigenschaft beschrieben. Die Separation der Beziehung Objekt-Eigenschaft ist bereits der Ansatz einer Ausdifferenzierung der Handlungsgegenstände. Ein Objekt kann sehr wohl als strukturierte Gesamtheit von Eigenschaften aufgefasst werden. Die Struktur versteht sich wiederum als Ensemble von Eigenschaften. Mit dieser Betrachtungsweise lässt sich die Beziehung Objekt-Eigenschaft als spezielle Ausprägung der allgemeineren Teil-Ganzes-Beziehung auffassen.

Wendet man auf die Inhalte der Widerspiegelung und des Denkens ein sehr grobes Kategorisierungsraster an, so lassen sich im Wesentlichen zwei Bereiche unterscheiden. Es sind einmal die Bilder an sich. Das seien (zumindest für eine gewisse Zeit) feststehende, unveränderliche Elemente, d.h. statische geistige Inhalte im Sinne von Begriffen, Zuständen oder Situationen. Unter der zweiten Kategorie sind Verbindungen oder Übergänge zwischen diesen Elementen also geistige Brücken zu verstehen, die in irgendeiner Weise von einem Element (Begriff, Zustand, Situation) zu einem anderen hinführen oder die ein gegebenes Element verändern. Es geht also um Verbindungen im Sinne von Zusammenhängen bzw. um Veränderungen im Sinne von Prozessen oder Verfahren. Zusammenhänge und Prozesse als Gegenstände des Denkens haben trotz vieler Besonderheiten eine weitgehend übereinstimmende Struktur. Durch sie gelangt der Denkende von einem geistigen Inhalt zu einem anderen. Zusammenhänge und Prozesse können (und sollen hier) aufgefasst werden als die „beweglichen" Bestandteile des Denkens.

Zusammenhänge und Prozesse in der Wirklichkeit werden wahrgenommen. Die durch Widerspiegelung entstandenen Bilder „verarbeitet" und durch das Herauslösen und Zusammenfügen von Übereinstimmendem, also auf dem Wege des generalisierenden Abstrahierens, werden neue allgemeinere Bilder von den Prozessen und Zusammenhängen gewonnen.

---

4 Manchmal wird unter Denken auch innere Sprache verstanden. Durch die Sprache werden Denkinhalte nur bezeichnet, sie erhalten Namen. Denken ist nicht an Sprache gebunden. Ohne Zweifel besteht ein Zusammenhang zwischen der Sprache und dem Denken. Sprache kann Denken prägen und unterstützen, aber in erster Linie dient sie der Kommunikation. (vgl. Winter, 2012, S. 2).

Dadurch wird es möglich, Zusammenhänge und Prozessen im Geiste „zu simulieren“. Wird z. B. eine Situation beobachtet (oder nur angenommen) und weist die Situation gewisse Übereinstimmungen mit der Anfangssituation eines „gespeicherten Prozesses“ auf, so kann die (vermeintliche) Veränderung der Situation, ihr Verlauf und ihr Resultat, geistig antizipiert werden. Man sagt vorher auf der Grundlage von Erfahrungen.

Stimmen Komponenten einer Situation mit den Bedingungen eines bereits im Geiste angelegten Bedingung-Bedingtes-Zusammenhangs überein, so kann im Geiste auf das Bedingte geschlossen werden. Es ergibt sich „zwingend“ aus den Bedingungen und dem Zusammenhang.

Setzt man voraus, dass in der wirklichen Welt Wirkzusammenhänge existieren, die den Entwicklungsverlauf der Welt determinieren, d. h., dass die Evolution alles Wirklichen bestimmten Gesetzmäßigkeiten unterliegt, so wird der Zusammenhang Bedingung-Bedingtes zu einem zentralen Beschreibungsmuster. Die Existenz oder Veränderung einer Erscheinung (das Bedingte) ist abhängig von der Existenz oder Veränderung einer (anderen) Erscheinung (das Bedingende). Es handelt sich um eine grundsätzliche Annahme, etwa im Sinne von Holbachs, einem „ganz radikalen Vertreter des Aufklärungsgedankens. Für ihn ist die Welt, »allenthalben nichts als Materie und Bewegung«, »eine unendliche, ununterbrochene Kette von Ursachen und Wirkungen[5]«“ (Störig, 1992, S. 362).

Nun ist die wirkliche Welt in ihrer Komplexität und Weite und in ihren Veränderungen nicht durch einzelne elementare Bedingungsgefüge zu beschreiben. So zitiert Günther Goethe: „in der lebendigen Natur geschieht nichts, was nicht in einer Verbindung mit dem Ganzen stehe, und wenn uns die Erfahrungen nur isoliert erscheinen, wenn wir die Versuche nur als isolierte Fakta anzusehen haben, so wird dadurch nicht gesagt, dass sie isoliert seien“, (Günther, 1966, S. 2). Die allgegenwärtigen Verbindungen zum Ganzen sollen hier außer Acht gelassen werden, nicht weil sie geleugnet werden, sondern aus methodologischen Gründen. Es geht hier „lediglich“ darum, nach Grundbausteinen des Denkens zu fragen.

Setzt man Wirkzusammenhänge als Existenzformen des Seins und der Entwicklung der Welt hypothetisch voraus, muss es im menschlichen Denken Entsprechungen geben, sonst wären die unter (1) bis (3) festgelegten Grundsätze hinfällig.

Im Geistigen haben Bedingungsgefüge im Sinne von elementaren Übergängen die Struktur von Implikationen. Das Eintreten einer Bedingung (kann) hat das Eintreten des Bedingten zur Folge (haben). Die Implikation, wie sie aus der klassischen Logik bekannt ist, genügt nicht, um die beschriebenen Übergänge zu modellieren.[6] Begriffe und Situationen sind mehr als Aussagen. Sie besitzen eine gewisse Unschärfe. Außerdem sind die zwei Wahrheitswerte der klassischen Logik für die Modulation geistiger Aktivitäten völlig unzureichend.

5 Wobei die Beziehung Bedingung-Bedingtes die Relation Ursache-Wirkung mit einschließt, erstere also die umfassendere ist.

6 Vgl. dazu Günther (1966) und zum Verhältnis von Logik und Erkenntnis Piaget (1975: z. B. S. 53).

Erst mit Bildern von Übergängen auf geistiger Ebene ist es möglich, geistige Prozesse zu vollziehen bzw. Folgerungen auf geistiger Ebene vorzunehmen. Es ergibt sich sofort die Frage, wie solche Bilder von Übergängen entstehen.

Bilder von Handlungen als spezielle Prozesse nennt Piaget „Schemas“. Ausgangspunkt für ihre Entstehung ist die „aktive Reproduktion von Handlungen jeglicher Art […] Die Handlung erwirbt dabei durch ihre Wiederholung unter erneuten und verallgemeinerten Bedingungen einen schematischen Charakter.“ (Piaget, 1975, S. 242 f.) Ähnlich wie bei der Bildung empirischer Begriffe werden ausgehend von äußeren Handlungen (die unter unterschiedlichen Bedingungen ausgeführt werden) durch das „Ausfiltern“ von Übereinstimmendem Schemata ausgebildet.[7] Ein Handlungsschema dient einmal als „geistiges Muster“ für eine äußere Handlung des Individuums. Es ermöglicht aber zum anderen eine Handlung auf geistiger Ebene „vorwegzudenken“, d. h. in Gedanken eine Handlung (einen Übergang) „durchzuspielen“ und natürlich, das Schema zu bearbeiten.

3 Abstrahieren

Die primären Bilder von Begriffen, Zusammenhängen und Prozessen sind Ergebnisse des Erfahrungslernens. Sie werden durch den unmittelbaren Kontakt mit der Welt[8] gewonnen. Sie entstehen durch die Wechselwirkung mit der Welt, durch die sinnliche Wahrnehmung der Welt und der Wechselwirkungen mit ihr. Diese Wahrnehmungen werden auf dem Wege einer generalisierenden Abstraktion als der „Aussonderung und Aufbewahrung“ des Gemeinsamen verarbeitet. Es entstehen „verdichtete“ Bilder.[9] Die so entstehenden Bilder besitzen verglichen mit den ursprünglichen, die als Abstraktionsbasis gedient haben, ein reduziertes Merkmalsystem. Es werden jetzt nur noch die allen innewohnenden Merkmale geführt. Das gilt für Bilder im Sinne von Begriffen[10], für die Bilder von Zusammenhängen und von Prozessen.

Die beschriebene Form der generalisierenden Abstraktion, die vor allem Wahrnehmungsbilder als Grundlage nutzt, kann als empirisches Lernen gesehen werden. Das empirische Lernen ist die natürliche, primäre Form des Lernens. Es ist geprägt von den invarianten Merkmalen der Lerngegenstände. Der Lernende orientiert sich an Übereinstimmungen.

Gegenstände des generalisierenden Abstrahierens können auch Bilder sein, die bereits das Ergebnis vorausgehender Abstraktionsprozesse sind. Auf geistiger Ebene wird eine gewisse Auswahl vorhandener Bilder durchgemustert und auf

7 Eine besondere Rolle spielen bei Piaget in diesem Prozess Assimilation und Akkommodation.

8 Hierzu zählen auch Kontakte durch Kommunikation mit anderen oder mittels Medien.

9 Wesentliche Komponenten des Prozesses sind Informationsaufnahme und –sammlung und durch Rückkopplung bewirkte Überprüfung und Abgleichung. Piaget fasst das unter Assimilation und Akkommodation.

10 Ob bei der Bildung von Begriffen in allem Fällen von einzelnen, tatsächlich existierenden Gegebenheiten ausgegangen wird, ist fraglich. Denkbar ist, dass durch die „beschränkte“ Sinneswahrnehmung bereits eine „Verdichtung“ stattfindet. Der Begriff Blatt – gemeint ist das Pflanzenteil z. B. an einem Baum – wird gebildet, ohne viele einzelne Blätter separat und detailliert wahrzunehmen. Das Blatt wird von Anfang an als Bestandteil einer Gesamtheit von Dingen gesehen z. B. der Blätter an einer Pflanze, das Laub an einem Baum. Dass es sich um mehrere Objekte mit übereinstimmenden Eigenschaften handelt, fällt ins Auge.

Übereinstimmungen untersucht. Aus den übereinstimmenden Elementen wird ein neuer Begriff, Zusammenhang oder Prozess gebildet.

Bei der zweiten Form des Abstrahierens, dem isolierenden Abstrahieren[11], werden unter gewissen Gesichtspunkten Teile vorhandener Bilder ausgesondert bzw. abgehoben. Die neu entstehenden sind „ärmer“ und „reicher“ zugleich. Die Inhalte der Bilder als die Gesamtheit ihrer Merkmale werden bei diesem Denkprozess reduziert. Der Umfang im Sinne von Geltungsbereich wird erweitert. Kant kennzeichnet das „antiproportionale“ Verhältnis von Inhalt und Umfang von Begriffen in der folgenden Weise: „Inhalt und Umfang eines Begriffs stehen gegen einander in umgekehrtem Verhältnisse. Je mehr nämlich ein Begriff unter sich enthält, desto weniger enthält er in sich und umgekehrt.“ (Kant, 1800, § 7.)

Die entscheidende Orientierung für das isolierende Abstrahieren liefern die gewählten Gesichtspunkte. Sie können vom Denkenden selbst bestimmt sein, z. B. dass er für einen bestimmten Zweck Aspekte vorhandener Bilder vernachlässigt bzw. andere hervorhebt und betont. Die Gesichtspunkte können aber auch von außen, z. B. durch ein Lehrsystem, vorgegeben werden. Das isolierende Abstrahieren ist gerade für das Lernen von Mathematik – zumindest ab einem bestimmten Niveau – von besonderer Bedeutung.

Sind bereits durch Abstraktionen entstandene Bilder Gegenstand einer Abstraktion, so entstehen als Ergebnis Bilder unterschiedlicher Abstraktionsstufen. Umgangssprachlich ist bei fortgesetzten Abstraktionen von einem höheren Abstraktionsgrad die Rede. Kant kennzeichnet die Abstraktionsstufen von Begriffen als höhere und niedere: „Begriffe heißen höhere (conceptus superiores), so fern sie andre Begriffe unter sich haben, die im Verhältnisse zu ihnen niedere Begriffe genannt werden. – Ein Merkmal vom Merkmal – ein entferntes Merkmal – ist ein höherer Begriff; der Begriff in Beziehung auf ein entferntes Merkmal ein niederer.“ (Kant, 1800, § 9.)

Unter dem Wort abstrakt wird in seiner Alltagsbedeutung auch „rein geistig, unanschaulich, formal“ (Winter, 2012, S. 5) aber auch unverständlich bzw. schwer vorstellbar verstanden. Das hängt sicher damit zusammen, dass die individuellen Fähigkeiten zur Abstraktion und zum Umgang mit geistigen Bildern unterschiedlicher Abstraktionsstufen unterschiedlich ausgeprägt sind. So wie es Vorlieben und Neigungen für bestimmte Betätigungsbereiche und Interessen für gewisse Gegenstandsbereiche gibt, bevorzugen manche Menschen in ihrer Denktätigkeit eher Bilder, die sehr „nahe“ geistigen Inhalten sind, die auf Sinneseindrücke zurückgehen. Andere wiederum sind in besondere Weise in der Lage, auf geistiger Ebene mit Bildern höherer Abstraktionsstufen umzugehen.

Geistige Bilder können auch dadurch entstehen, dass Informationen von außen vorgegeben und vom Lernenden einfach übernommen werden. Man stelle sich dazu

11 S. auch Kants Auffassung vom Abstrahieren: „Man braucht in der Logik den Ausdruck Abstraktion nicht immer richtig. Wir müssen nicht sagen: etwas abstrahieren (abstrahere aliquid), sondern von etwas abstrahieren (abstrahere ab aliquo)… so abstrahiere ich von noch mehreren Bestimmungen, und mein Begriff ist dadurch noch abstrakter geworden. Denn je mehrere Unterschiede der Dinge aus einem Begriffe weggelassen sind oder von je mehreren Bestimmungen in demselben abstrahiert worden: desto abstrakter ist der Begriff.“ (Kant, 1800, § 6.)

eine Situation vor, in der die Definition eines mathematischen Begriffs oder ein mathematisches Verfahren präsentiert wird. Der Adressat nimmt die Informationen auf, ohne dass Abstraktionen stattfinden. Für einen Abstraktionsprozess, sowohl für den des generalisierenden als auch für den des isolierenden Abstrahierens, ist eine Abstraktionsbasis erforderlich. Von ihr ausgehend werden die neuen geistigen Inhalte gebildet. Fehlt bei Lernprozessen solch eine Basis, zeigen die Lernende das oft dadurch an, dass sie nach geeigneten Beispielen verlangen, die ihnen helfen können, das Neue zu verstehen. Existiert eine solche Basis nicht und wird z. B. beim dozierenden Lehren darauf verzichtet, sie bereitzustellen, kann auch kein Abstraktionsprozess stattfinden. Das Neue wird „verbindungslos“ abgespeichert. Die fehlenden Verbindungen haben Defizite hinsichtlich der Dauerhaftigkeit, Verfügbarkeit, Transferierbarkeit und hinsichtlich weiterer Qualitäten geistiger Inhalte zur Folge. Das ergibt sich hier als theoretische Konsequenz und ist darüber hinaus durch praktische Erfahrungen vielfach belegt.

Auf dem Hintergrund dieses Kontexts wird deutlich, warum es für das entdeckende Lernen so wichtig ist, von einer umfangreichen, ausreichend vielfältigen und tragfähigen Basis auszugehen. Beim selbständigen Entdecken spielen Abstraktionen beider genannter Formen eine wichtige Rolle. Es werden neue Begriffe, Zusammenhänge bzw. Verfahren gewonnen, die durch einen – verglichen mit den Elementen der Abstraktionsbasis – größeren Allgemeinheitsgrad gekennzeichnet sind. Erst durch die geistige Präsenz der Basis ist die Möglichkeit des selbständigen Entdeckens gegeben.

Für das generalisierende Abstrahieren ist die Abstraktionsbasis formal ausreichend, wenn sie in der Gesamtheit der Invarianten die Merkmale für den (neuen) Begriff, den (neuen) Zusammenhang bzw. für das (neue) Verfahren liefert.

Für das isolierende Abstrahieren ist es wichtig, dass die Basis Typisches beinhaltet und dass der Lernende sich damit unter einer gewissen Zielstellung auseinandersetzt, dass er die richtigen Gesichtspunkte wählt.

Dazu ein Beispiel: Bei seinen Versuchen, mit gerichteten Strecken zu rechnen, stellte die Frage nach einer geeigneten Vorschrift für die Multiplikation für Caspar Wessel eine Herausforderung dar. „Wessel will primär mit gerichteten Strecken rechnen und kommt dabei auf komplexe Zahlen, er stellt gerichtete Strecken durch komplexe Zahlen dar (und nicht umgekehrt!).“[12] (Ebbinghaus et al., 1992, S. 49) Während die Regeln für die Addition offenbar auf der Hand liegen, erfordern die für die Multiplikation größere Anstrengungen. Die Regeln können nun gemäß der oben angestellten Betrachtungen gesehen werden als

- Zusammenhänge, durch die ausgedrückt wird, wie aus den Merkmalen zweier gegebener komplexer Zahlen auf die Merkmale der komplexen Zahl geschlossen werden kann, die das Produkt der gegebenen ist. Aus gegebenen Bedingungen wird das Bedingte gefolgert.

12 Nach Alten et al. (2003) stellte Wessel in der „1796 vorgelegten Abhandlung […] komplexe Zahlen als gerichtete Strecken in der Ebene dar.“ (Alten et al., 2003, S. 307)

- Zum anderen kann man die Multiplikation als Prozess sehen. Aus zwei gegebenen komplexen Zahlen wird gemäß eines Handlungsschemas (einer Vorschrift) das Produkt der Zahlen gebildet. Aus einem Anfangszustand wird ein Endzustand erzeugt.

Als Basis für die Überlegungen können nur die Regeln für die bisher bekannten Zahlen und für ausgewählte (typische) Exemplare der neuen Zahlen verwendet werden. Wessel führte Einheiten ein $(1, \epsilon, -1, -\epsilon)$ (Alten et al., 2003, S. 307). Bei der Multiplikation komplexer Zahlen muss die „Wirkung" eines Faktors auf einen zweiten vergleichbar sein mit der Wirkung desselben Faktors auf eine Einheit. Eine komplexe Zahl x angewendet auf 1 überführt die Zahl 1 in x. Der Betrag ändert sich entsprechend und auch der Richtungswinkel. Auch wenn man 1 auf eine beliebige Zahl „wirken" lässt, verhalten sich der Betrag und der Richtungswinkel analog. Als Konsequenz ergibt sich aus diesen und weiteren Überlegungen, dass der Betrag des Produktes gleich dem Produkt der Beträge sein muss und dass „der Richtungswinkel des Produktes gleich der Summe der Richtungswinkel der Faktoren ist. Erst dann stellte er [Caspar Wessel] fest, daß $\epsilon = \sqrt{-1}$" (Alten et al., 2003, S. 307). Die Vorschrift bzw. die Zusammenhänge, die so gewonnen wurden, sind darauf zu untersuchen, ob es keinen Widerspruch zu „gewöhnlichen Rechenregeln" (Alten et al., 2003, S. 307) gibt. Der durch Abstraktion entstandene geistige Inhalt ist auf seine „Verträglichkeit" mit dem Hergebrachten, dem Bewährten zu prüfen.

4 Konkretisieren

Das Konkretisieren stellt verglichen mit dem Abstrahieren aus theoretischer Sicht die „einfachere" geistige Handlung dar. Geht es doch „lediglich" darum, den abstrakten Begriff, Zusammenhang bzw. das abstraktere Verfahren durch weitere Merkmale anzureichern, so dass er bzw. es konkreter wird. Das Konkretisieren stellt – bildlich gesprochen – die Gegenrichtung zum Abstrahieren dar. Kant bemerkt bezogen auf Begriffe: „Was den höhern Begriffen zukommt oder widerspricht, das kommt auch zu oder widerspricht allen niedrigern Begriffen, die unter jenen höhern enthalten sind;" (Kant, 1800, § 14.) Das bedeutet, beim Konkretisieren eines Begriffes greife man auf einen Begriff zurück, der „unter" dem ersteren liegt, der „niederer" ist als der erstere. Nach Kant: „je nach dem man einen Begriff bald mehr bald weniger abstrakt oder konkret behandelt, d. h. bald mehr bald weniger Bestimmungen entweder wegläßt oder hinzusetzt." (Kant, 1800, § 16.) „Weil das, worin Dinge übereinkommen, aus ihren allgemeinen Eigenschaften, und das, worin sie von einander verschieden sind, aus ihren besondern Eigenschaften herfließt: so kann man nicht schließen: Was einem niedrigem Begriffe zukommt oder widerspricht, das kommt auch zu oder widerspricht andern niedrigeren Begriffen, die mit jenem zu Einem höhern Begriffe gehören." (Kant, 1800, § 14.)

Für das Lernen von Mathematik, insbesondere in der Schule, muss gerade auf das Konkretisieren großes Augenmerk gerichtet werden. Dort, wo mathematische Begriffe, Zusammenhänge, Verfahren zur Anwendung kommen – innerhalb der Mathematik aber auch in außermathematischen Bereichen, spielen Konkretisierungshandlungen