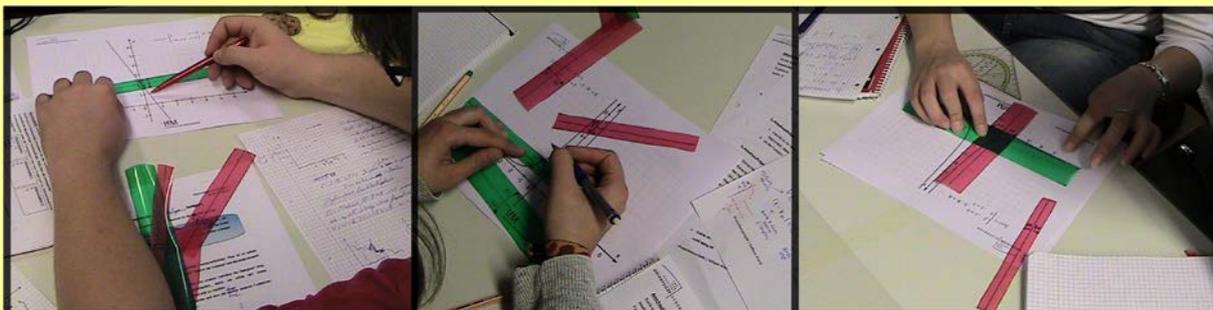
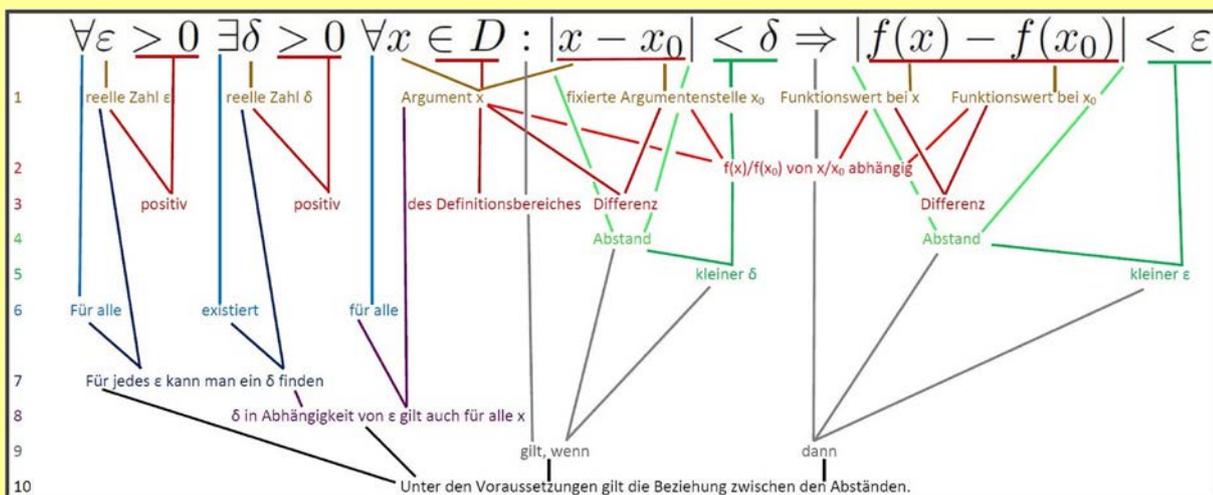


Verständnisorientierter Umgang von Mathematikstudierenden mit der ϵ - δ -Definition von Stetigkeit



Schriften zur Hochschuldidaktik Mathematik

Herausgegeben von
Christine Bescherer, Katja Eilerts
Jörn Schnieder und Walther Paravicini

Band 4

STEFANIE AREND

**Verständnisorientierter Umgang
von Mathematikstudierenden mit
der ε - δ -Definition von Stetigkeit**

WTM
Verlag für wissenschaftliche Texte und Medien
Münster

Bibliografische Information der Deutschen Bibliothek

Die Deutsche Bibliothek verzeichnet diese
Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie;
detaillierte Informationen sind im Internet über
<http://dnb.ddb.de> abrufbar

Druck durch:
winterwork
04451 Borsdorf
<http://www.winterwork.de/>

Alle Rechte vorbehalten. Kein Teil des Werkes darf
ohne schriftliche Einwilligung des Verlags in
irgendeiner Form reproduziert oder unter Ver-
wendung elektronischer Systeme verarbeitet, ver-
vielfältigt oder verbreitet werden.

© WTM – Verlag für wissenschaftliche Texte und
Medien, Münster 2017
ISBN 978-3-95987-023-8

Verständnisorientierter Umgang von Mathematikstudierenden mit der ε - δ -Definition von Stetigkeit Perspektiven und Analysen

Von der Fakultät für Mathematik und Naturwissenschaften
der Carl von Ossietzky Universität Oldenburg
zur Erlangung des Grades und Titels eines
Doktor der Philosophie (Dr. phil.)
angenommene Dissertation
von Frau Stefanie Arend
geboren am 24.11.1989 in Achim

Gutachterin: Prof. Dr. Astrid Fischer

Weiterer Gutachter: Prof. Dr. Ralph Schwarzkopf

Tag der Disputation: 26.10.2016

Es sind in der Arbeit Überlegungen zu finden, die in ihrem Entwicklungsprozess bereits an anderer Stelle veröffentlicht worden sind. Dabei handelt es sich um die folgenden Artikel, die hier chronologisch ihrer Veröffentlichung nach aufgeführt werden:

- Arend, S. (2015): Der Stetigkeitsbegriff mittels ε - δ -Definition im Übergang von Schule zu Hochschule: Verstehensprozesse von Studierenden. In: Caluori, F.; Linneweber-Lammerskitten, H.; Streit, C. (Hrsg.): *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015, Jahrestagung der GDM, Basel*, S.104-107. Münster: WTM-Verlag.
- Arend, S. (2016, in Druck): Eine semiotische Perspektive vor dem Hintergrund des RBC-Modells auf den Umgang von Studienanfängern mit der ε - δ -Definition von Stetigkeit. In: *Beiträge zum Mathematikunterricht 2016, Jahrestagung der GDM, Heidelberg*. Münster: WTM-Verlag.

Zusammenfassung in deutscher Sprache

Die vorliegende Dissertation leistet einen Beitrag dazu zentrale epistemische Schwierigkeiten und Hindernisse von Studienanfängern im Umgang mit der ε - δ -Definition von Stetigkeit aufzuzeigen, zu verstehen und für diese zu sensibilisieren. Die Tiefe der Arbeit ergibt sich aus der wechselseitigen Beziehung von historisch-genetischer, fachwissenschaftlicher, wie fachdidaktischer Sachanalyse und empirischen Untersuchungen, deren Analysen forschungsmethodisch verschiedene Schwerpunkte setzen und mehrere Theorien zugleich einbinden.

Anlass für die Studie ist vor allem der Eindruck gewesen, dass Studienanfängern der Mathematik der Umgang mit der formalen ε - δ -Definition von Stetigkeit besonders schwer fällt. Die Relevanz der Definition für die Analysis ist aber unabdingbar und rechtfertigt zusammen mit deren Bedeutung für eine Verallgemeinerung auf topologischen Räumen und den beobachteten Schwierigkeiten eine intensive Auseinandersetzung mit der ε - δ -Definition von Stetigkeit.

Zu der ε - δ -Definition von Stetigkeit wird zuerst eine historisch-genetische Analyse durchgeführt, die deren Entwicklung mit einer Vielzahl an Hürden und Irrwegen aufzeigt und nachvollziehbar macht. Diese ist später für die Identifikation von epistemologischen Hindernissen nach Brousseau (1997) fundamental. Als solche werden empirisch auftretende Schwierigkeiten bezeichnet, die sich nicht nur aus dem Lerngegenstand selbst heraus plausibilisieren lassen, sondern ebenso angesichts der historischen Entwicklung des Begriffes als Bruch empfunden werden. Es folgen eine fachwissenschaftliche wie fachdidaktische Analyse der Stetigkeit, die Vorstellungen und formale Zugänge, sowie Herausforderungen für Schüler und Studenten explizieren. Diese Überlegungen sind später zum Nachvollziehen der studentischen Bearbeitungen im Datenmaterial wesentlich.

Anschließend werden Ergebnisse zu bisherigen Untersuchungen zum Grenzwert von Folgen und Funktionen und zur Stetigkeit zusammengefasst. Erstere ermöglichen vor allem einen vielschichtigen Blick auf die Tatsache, dass ein vollständiges Verständnis des Grenzwertkonzeptes kaum vorhanden ist. Es werden zentrale Schwierigkeiten wie die Umkehrbarkeit oder die Abhängigkeit dargestellt, die auch im Umgang mit der ε - δ -Definition von Stetigkeit zu erwarten sind. Die bisherigen Untersuchungen zur Stetigkeit geben vor allem Auskunft über Vorstellungen von Stetigkeit und Lernsettings in denen Lernende selber die ε - δ -Definition entwickeln oder (enaktive) Visualisierungen im Umgang mit der Definition verwenden. Mit der Reihenfolge der Quantoren und der Implikation werden erste zentrale Schwierigkeiten herausgearbeitet.

Daran anknüpfend wird ein Brückenkurs zur ε - δ -Definition von Stetigkeit konzipiert, der zusätzlich zum Vorkurs freiwillig von 18 Studienanfängern der Mathematik im WiSe 2014/2015 besucht wird. Anschließend wird mit jedem Teilnehmer ein aufgabenbasiertes Interview durchgeführt. Nach der Beschäftigung mit der ε - δ -Definition von Stetigkeit in der Analysis 1 (einige Monate später) wird mit der Gesamtheit der Studenten des Jahrgangs (etwa 130 Probanden) ein etwa 30-minütiger Vergleichstest zur Stetigkeit und der ε - δ -Definition geschrieben.

Ein wesentlicher Aspekt der qualitativen Analyse der Tests ist es deutlich zu machen, welche Vorstellungen von Stetigkeit bei den Studienanfängern vorherrschen und wie Vorstellungen mit der ε - δ -Definition verknüpft sind. Dabei werden u. a. die Vorstellungen von „Durchzeichenbarkeit“ und „keinen Sprüngen“ neben der nicht tragfähigen Vorstellung, dass eine stetige Funktion „auf ganz \mathbb{R} definiert“

ist, als gängige Beschreibungen unterschiedlicher Kennzeichnungen von Stetigkeit herausgearbeitet. Hinweise auf diese häufigen Vorstellungen lassen sich außerdem in den Sachanalysen finden. Darüber hinaus ergeben sich interessante Ergebnisse bezüglich der Vorstellungen, die mit der ε - δ -Definition in Verbindung stehen.

Für die Auswertung der Tests ist vor allem die qualitative Inhaltsanalyse nach Mayring, in Form von Zusammenfassung und Strukturierung, fundamental. Diese ist zwar ebenso für die Auswertung der Interviewdaten relevant, wird hier jedoch um weitere Methoden ergänzt.

Bei der Analyse der Bearbeitungen einer Nachweisaufgabe zur Stetigkeit mittels der ε - δ -Definition hat der Test qualitativen Wert; allerdings helfen erst die qualitativen Interviews dabei, einen Großteil dessen was bei den Tests beobachtet wird, im Detail zu verstehen und nachzuvollziehen.

Die Analyse der Daten aus den Interviews gibt vertieft Einblick in Strategien beim Nachweis der Stetigkeit für eine gegebene Funktion und Schlüsse, die die Studenten im Sinne von Abschlussentscheidungen in ihren Bearbeitungen zum Nachweis der Stetigkeit im Umgang mit der ε - δ -Definition verwenden. Darüber hinaus wird das individuelle Verständnis der Studienanfänger von der Definition thematisiert. Es ergeben sich Kategorien für diese Strategien, in denen die Studenten auf Einsetzungen oder das Finden von Strukturen fixiert sind. Für die finalen Schlüsse sind die Studenten u. a. auf das Finden eines Zusammenhangs zwischen ε und δ fokussiert. Unabhängig davon aber, ob den Studenten aus den Interviews die Nachweise der Stetigkeit gelingen, ist positiv anzumerken, dass zumindest alle einen Ansatz für die Bearbeitungen finden. Im Zusammenhang mit den Kategoriensystemen ergeben sich vor allem aus vier bzw. fünf herausgearbeiteten Verständnistypen zentrale epistemische Schwierigkeiten und Hindernisse.

Als Hauptproblem, das alle Typen vom Verständnis betrifft, wird dabei die logische Komplexität der ε - δ -Definition herausgestellt. Diese betrifft vor allem die Verknüpfung der Vielzahl an Zeichen untereinander und insbesondere den Gesamtzusammenhang über die Implikation. Außerdem sind Schwierigkeiten mit der Rolle und Bedeutung von ε und δ und deren sich aus der Quantorenaussage ergebenden Abhängigkeit zentral. Die sich aus den Quantoren ergebende Problematik wird u. a. als epistemologisches Hindernis identifiziert, indem die Quantoren in der Historie erst mit Weierstraß in den 1850er Jahren ganz plötzlich Einzug in die ε - δ -Definition der Stetigkeit erhalten haben. Die empirisch auftretenden Schwierigkeiten mit den Quantoren sind damit nicht nur aus dem Lerngegenstand selbst, sondern ebenso aus der Historie heraus gut nachzuvollziehen. Einige Studenten haben ganz fundamentale Schwierigkeiten mit der Unterscheidung von x und x_0 oder von Argument und Funktionswert. Darüber hinaus kommt es zur Beschreibung und Erörterung von zentralen Fehlern und deren möglichen Ursachen. Eindrucksvoll ist, wie unterschiedlich die Tiefe vom Verständnis der ε - δ -Definition und den damit verbundenen Schwierigkeiten bei den Studienanfängern ist, die eigentlich dieselben Veranstaltungen besucht haben.

Darüber hinaus ergibt sich für die studentische Arbeit mit der ε - δ -Definition der Rückgriff auf erinertes Wissen als wesentlich. Solches kann aus verschiedenen Blickwinkeln als Gefahr und Potenzial zugleich angesehen werden. Problematisch ist es, wenn sich z. B. falsch an die Bedeutung des konventionellen Zeichens x_0 erinnert wird. Hilfreich kann es hingegen sein, wenn eine Gewohnheit gut ist und sich beispielweise an einen zielführenden Weg erinnert wird, an eine Abhängigkeit zwischen δ und ε

zu gelangen.

Die Ergebnisse aus den Interviews lassen sich als passend und intensivierend bzgl. der Ergebnisse aus dem Test beschreiben. Die Bearbeitungen aus den Tests selbst geben zwar weniger Auskunft über Erkenntnisstand und den Umgang mit der ε - δ -Definition, ermöglichen aber einen Überblick über Vorstellungen und haben in Bezug auf die gestellte Nachweisaufgabe mit der ε - δ -Definition quantitativen Wert. Aus Selbsteinschätzungen der Studenten aus dem Test zu den Schwierigkeiten im Umgang mit der ε - δ -Definition geht hervor, dass eine Vielzahl der Hürden das Bewusstsein der Studenten bereits erreicht hat. Häufig handelt es sich aber um sehr oberflächliche Beschreibungen, während die qualitativen Untersuchungen ein Beschreiben und Nachvollziehen der Schwierigkeiten im Detail ermöglichen. Beide Untersuchungen zusammen ergeben mit der Fundierung durch (forschungsmethodische) Theorien insbesondere eine vielschichtige Sichtweise auf den Umgang mit und das Verständnis von der ε - δ -Definition.

Bei den dabei zugrundeliegenden Theorien handelt es sich, zusammen mit dem RBC-Modell nach Dreyfus et al. (2015), um „Abstraction in Context“ und, zusammen mit den Semiotischen Prozess-Karten nach Schreiber (2010), um die Semiotik nach Peirce. Beide Theorien werden in Mikroanalysen der Interviews dieser Arbeit miteinander verknüpft, indem über das RBC-Modell zuerst epistemische Handlungen der Studenten rekonstruiert und anschließend die erklärten Bearbeitungsprozesse mit Semiotischen Prozess-Karten analysiert und dargestellt werden. Auf dieser Grundlage können vor allem Strategie und finaler Schluss in Nachweisaufgaben, sowie der Umgang mit den einzelnen Zeichen der ε - δ -Definition nachvollziehbar herausgearbeitet werden. Außerdem lässt sich die Verwendung der Zeichen und deren Funktion zusammen mit den Detailanalysen wesentlich über die Zeichenklassen von Peirce beschreiben.

Um das individuelle Verständnis der Studenten darstellbar und analysierbar zu machen, wird in dieser Arbeit darüber hinaus das zugleich theoretische und methodische Hilfsmittel der „Konsolidierungs-Verständnisdiagramme“ (KVD) entworfen und in seinem Einsatz erprobt. Das KVD entsteht dabei auf der Grundlage einer dafür fundamentalen Definition vom Begriff „Verständnis“. Diese betont, bezogen auf die ε - δ -Definition, vor allem die sich immer weiter verschachtelnde Verkapselung sämtlicher Zeichen. Ein Verständnis der ε - δ -Definition zielt dann auf das Erfassen sämtlicher Bedeutungen der isolierten Zeichen selbst und das Erfassen der Teil-, sowie Gesamtverknüpfung der Zeichen untereinander ab. Fundamental ist es nachzuvollziehen wie die Zeichen miteinander verbunden sind und warum sie wie zusammen funktionieren.

Zentrales Anliegen des Promotionsprojektes ist es außerdem für eine Sensibilisierung des Anspruchs zu sorgen, dem Studienanfänger mit der ε - δ -Definition von Stetigkeit gegenüberstehen. In diesem Sinne ist die Identifikation von Schwierigkeiten aus individuellen Lernprozessen heraus ebenso fundamental, wie die Identifikation von Hürden aus dem Lerngegenstand selbst oder dessen historischer Entwicklung heraus. Die gedehnte historische Entwicklung kann dabei zusätzlich eine langwierige individuelle Lernentwicklung plausibilisieren und sorgt für deren Nachvollziehbarkeit und die gewünschte Sensibilisierung. Auf der Grundlage der Ergebnisse belaufen sich mögliche Schlüsse für die Gestaltung von Lehr- und Lernprozessen zu formalen Definitionen (wie der ε - δ -Definition von Stetigkeit) an der Universität.

Abstract in English

The goal of this dissertation is to show, understand and raise awareness of the central epistemic difficulties and obstacles that new university students face in understanding the ε - δ -definition of continuity. The thesis discusses the interdependence of historical, technical and subject-didactical analysis of the ε - δ -definition of continuity. In addition, empirical data is used, whose analysis is bringing out different points in the research methodology. Furthermore different theories are combined in the analysis.

This study is motivated by the impression that students starting mathematics at university have serious difficulties in understanding and working with the formal ε - δ -definition of continuity. But the impact of the definition for calculus is unalterable. Misunderstanding of this concept leads to further problems in grasping concepts in calculus and later on in generalization to topological spaces. This justifies the thematically focusing.

First this thesis provides a historical analysis of the development of the ε - δ -definition of continuity, which is including a variety of obstacles as well as wrong tracks. This is fundamental for the later identification of epistemological obstacles according to Brousseau (1997). These are empirically arising difficulties that occur not only because of the subject matter itself, but can also be seen to be inconsistencies in the historical development. A technical and subject-didactical analysis of the continuity then follows, which describes conceptions, formal approaches and challenges for students in school and university. These considerations are essential to understand how new university students work. A review of previous studies about the limit of sequences and functions as well as about continuity is then presented. Preliminary results has demonstrated that the limits are not well understood. Important difficulties that are expected for the ε - δ -definition of continuity, such as reversibility and dependence, are pointed out. Studies specifically concerning the continuity indicate conceptions of continuity, illuminate the learning settings in which students attempt to understand the ε - δ -definition themselves or make use of enactive visualizations. General difficulties are also pointed out concerning the order of the quantifiers and the implication.

A bridging course on the ε - δ -definition of continuity was designed in order to address these issues. The course was attended voluntarily by 18 students who started to study mathematics in the winter term 2014/2015. At the conclusion of the course, a task-based interview was carried out with each participant. In order to test the students dealing with the ε - δ -definition, a 30 minute test concerning the ε - δ -definition was carried out a few months later after the students had covered the definition in the first year mathematics class „Calculus I“. This test was completed by all ~130 students in this year level.

The qualitative analysis of the test clarified the concepts of continuity that dominate the students thinking and how these concepts are connected to the ε - δ -definition. For example, conceptions like „drawn in one stroke“ or „having no jumps“ are common descriptions of continuity. Additionally, there are not workable concepts, such as that a continuous function is always „defined on the total of \mathbb{R} “. Indications for this can already be seen in a technical analysis of the ε - δ -definition. Some interesting results are also presented concerning concepts connected to the ε - δ -definition of continuity.

The content analysis of Mayring, concerning summary and structuring, is particularly important for

the analysis of the test. This approach is also included as one of several analysis methods for the students interviews.

In order to interpret the use in the test of the ε - δ -definition to derive a proof of continuity, it is useful to understand that the test is having a quantitative value as well. Later the analysis of the interview will help to understand the data from the test in detail.

The interpretation of the interview data provides an insight into strategies used by the students to obtain a proof of continuity for a given function. Furthermore, it provides conclusions, which the students use in the meaning of decisions ending the proof of continuity. Moreover, the students individual understanding of the ε - δ -definition is analyzed. Different types of strategies are identified, depending on whether the students are focused on using substitutions or on finding structures. For the final conclusions, the students for example focusing on finding a connection between ε and δ . One positive aspect is that all students did identify an approach to use, regardless of whether or not they were successful with the proof of continuity. The interview data shows that the students have four or five types of understanding, which also define the main difficulties and obstacles they have in dealing with the ε - δ -definition.

The main issue, which affects all the types of understanding, is the logical complexity of the ε - δ -definition. In particular, this concerns the connection of the different characters amongst themselves and the implications of the overall context. Of central importance are difficulties with the role and meaning of ε and δ as well as their interdependence, which is a consequence of the quantifiers. This issue is identified as an epistemological obstacle, as the quantifiers were suddenly added to the ε - δ -definition of continuity with Weierstraß in the 1850s. These empirically arisen difficulties with the quantifiers are not only plausible causes of the difficulties with the subject matter, but can also be understood from the historical context. Some students do have difficulties with the distinction between x and x_0 or between the argument and the functions value. A description of the main errors in understanding and their probable sources is also provided. It is remarkable how different the students difficulties and depths of understanding of the ε - δ -definition are, despite the fact they all attended the same lectures. Additionally, it is shown that the students rely heavily on the recall of previously learned concepts or remembered knowledge in order to deal with the ε - δ -definition. This can be either helpful or harmful to the students overall understanding. It is problematic if, for example, a student remembers the conventional variable x_0 in an incorrect way. On the contrary it can be useful if the student has good learning techniques and is able, for example, to remember an expedient way to find a dependence between δ and ε .

In comparison to the tests, the results of the interviews provide a more intensive, although complementary, idea of the outcomes and the knowledge of the students. The tests did not provide much information about their level of knowledge and their handling of the ε - δ -definition, but they did allow an overview of the concepts and also have quantitative value in analyzing the proofs of continuity with the ε - δ -definition. A self-evaluation of the students within the test demonstrates that they are already aware of many of the identified difficulties. Nevertheless, these are superficial descriptions, and it is the qualitative analysis that makes it possible to describe and understand the difficulties in detail. Both studies together provide a multi-layered perspective of handling and understanding the ε - δ -definition

of continuity, underpinned by strong theoretical and methodical foundations.

The underlying theories include „Abstraction in Context“ (together with the RBC-Modell by Dreyfus et al. (2015)) and Peirces semiotic (together with the Semiotic Process Cards by Schreiber (2010)). They are linked in micro-analyses of the interviews by first reconstructing the epistemic actions of the students using the RBC-Modell, and secondly analysing the described working process using the Semiotic Process Cards. On this basis it is possible to determine strategies and final conclusions, and to comprehensively define the handling of the different characters of the ε - δ -definition. Furthermore, both the handling and the function of the characters can be described using the classes provided by Peirce.

The theoretical and methodical so-called „Consolidation-Understanding-Diagram“ is conceptualized and used to make the individual understanding of each of the students presentable and analysable. This tool is based on a fundamental definition of the term „understanding“, which emphasises the nested encapsulation of the characters, with respect to the ε - δ -definition. An understanding of the ε - δ -definition is then able to capture the full meaning of each of the isolated characters and their interconnections. Finally, it is fundamental to determine how the characters are interconnected and why they operate as they do.

Furthermore, a major goal of this project is to raise the awareness of the obstacles that students starting university are confronted with when dealing with the ε - δ -definition of continuity. With this in mind the identification of difficulties arising from individual learning processes is equally important to the identification of obstacles occurring in the learning subject itself, or in its historical development. The long historical development makes the long individual development plausible, as well as ensuring its comprehensibility and raising awareness. The results provide ideas for the design of methods for teaching a formal definition, such as the ε - δ -definition of continuity, at university.

Verzeichnis der zentralen Abkürzungen

2FB Zwei-Fächer-Bachelor

Abb. Abbildung

AiC „Abstraction in Context“

COACTIV Cognitive Activation in the Classroom

CP Collected Papers von Charles Sander Peirce

eA erhöhtes Anforderungsniveau

FB Fach-Bachelor

gA grundlegendes Anforderungsniveau

GDM Gesellschaft für Didaktik der Mathematik

GEN general epistemic need

NNC need for a new construct

KVD Konsolidierungs-Verständnisdiagramm

PaCC Partially Correct Construct

PISA Programme for International Student Assessment

RBC(+C) *stehen für*: Recognizing, Building-with, Constructing (und Consolidating)

SPK Semiotische Prozess-Karten

SoSe Sommersemester

u. a. unter anderem

VT Verständnistyp

WiSe Wintersemester

z. B. zum Beispiel

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Die ε-δ-Definition von Stetigkeit	7
2.1	Begriffe und Vorstellungen	7
2.2	Historische Entwicklung der ε - δ -Definition von Stetigkeit	12
2.3	Fachwissenschaftliche und -didaktische Perspektive	30
2.3.1	Das Verhältnis zum Grenzwert	30
2.3.2	Zugänge zur Stetigkeit	31
2.3.3	Die Quantoren und weitere Schwierigkeiten mit der ε - δ -Definition	43
2.3.4	Stetigkeit in der Schule und an der Universität	46
2.3.5	Relevanz der ε - δ -Definition von Stetigkeit	55
2.4	Darstellung bisheriger Untersuchungen	57
2.4.1	Untersuchungen zum Grenzwert	58
2.4.2	Untersuchungen zur Stetigkeit	68
2.4.3	Blick auf die Dissertation	76
3	Begriffliche und theoretische Grundlagen	78
3.1	Studierende im besonderen Setting	78
3.2	AiC und das RBC-Modell als theoretische Grundlage	81
3.2.1	„Abstraction in Context“	81
3.2.2	RBC-Modell für den individuellen Prozess der Wissenskonstruktion	84
3.2.3	Die Theorie im Kontext der Arbeit	88
3.3	Verständnis als zentraler Begriff	89
3.3.1	Verstehen als Prozess und Produkt	89
3.3.2	Verstehen, Verständnis und Lernen	91
3.3.3	Gebrauch der Begrifflichkeiten	93
3.3.3.1	Der übliche Gebrauch: Begriffe verstehen	93
3.3.3.2	Der Gebrauch für diese Arbeit	95
3.3.4	Verständnis in Verbindung zur AiC	102
3.4	Fehler, Schwierigkeiten und epistemologische Hindernisse	103
3.4.1	Fehler beschreiben und analysieren	103
3.4.2	Fehlerursachen	105
3.4.3	Epistemologische Hindernisse	108
3.5	Semiotische Grundlagen	113
3.5.1	Peirce'sche Semiotik	113
3.5.1.1	Der Peirce'sche Zeichenbegriff	115
3.5.1.2	Die Zeichentriade nach Peirce	117

3.5.1.3	Struktur des Zeichenbegriffes	120
3.5.2	Semiose und Semiotische Prozess-Karten	123
3.5.3	Diagramme	128
3.5.4	Abduktion	133
3.5.5	Bedeutung der Semiotik für diese Arbeit	134
3.6	AiC und RBC in Verbindung zur Semiotik	135
4	Intention und Fragestellungen der Untersuchung	138
5	Methode: Forschungssetting und Erhebung	141
5.1	Setting der Forschung	141
5.1.1	Ein Überblick	141
5.1.2	Erklären als zentraler Begriff für die Forschungssituation	144
5.2	Empirische Forschung	147
5.3	Qualitatives Paradigma	147
5.3.1	Qualitativ vs. Quantitativ	147
5.3.2	Qualitative Forschung	149
5.3.3	Gütekriterien qualitativer Forschung	150
5.4	Die Erhebungsinstrumente	152
5.4.1	Der Vergleichstest	152
5.4.1.1	Form des Tests	153
5.4.1.2	Die Testaufgaben	156
5.4.1.3	Einordnung in die Lehrveranstaltung und die Probanden	159
5.4.1.4	Überlegungen und Bearbeitungen zu den Aufgaben	165
5.4.1.5	Konzeption und Gütekriterien	173
5.4.2	Die Interviews	174
5.4.2.1	Form der Interviews	175
5.4.2.2	Die Interviewaufgaben	179
5.4.2.3	Einordnung in die Lehrveranstaltung und die Probanden	183
5.4.2.4	Überlegungen und Bearbeitungen zu den Aufgaben	185
5.4.2.5	Konzeption und Gütekriterien	194
5.5	Triangulation als zentrales Gestaltungsmittel	196
6	Auswertung: Vorgehen, Analyse und Ergebnisse	197
6.1	Anmerkungen zum Auswertungsprozess	197
6.2	Qualitative Inhaltsanalyse als zentrale Auswertungsmethode	198
6.2.1	Der Begriff der Inhaltsanalyse	198
6.2.2	Die qualitative Inhaltsanalyse	199
6.2.3	Analyseverfahren der qualitativen Inhaltsanalyse	204

6.2.3.1	Die Strukturierung	205
6.2.3.2	Die modifizierte Strukturierung	207
6.2.3.3	Die inhaltliche Strukturierung	210
I.	Der Test: Analyse und Ergebnisse	211
6.3	Methode: Qualitative Inhaltsanalyse	211
6.3.1	Inhaltliche Strukturierung der Testdaten	211
6.3.2	Skalierende Strukturierung der Testdaten	213
6.3.3	Einbeziehen quantitativer Analyseschritte	214
6.4	Vorstellungen und Umgang: Analyse und Ergebnisse	215
6.4.1	Vorstellungen von Stetigkeit	215
6.4.2	Umgang mit der ε - δ -Definition von Stetigkeit in einer Nachweisaufgabe	229
6.4.3	Selbsteinschätzungen zum Umgang mit der ε - δ -Definition	246
II.	Die Interviews: Analyse und Ergebnisse	252
6.5	Methode: Qualitative Inhaltsanalyse	252
6.5.1	Zusammenfassende Inhaltsanalyse der Interviewdaten	252
6.5.2	Inhaltliche und formale Strukturierung der Interviewdaten	256
6.5.3	Typisierende Strukturierung der Interviewdaten	257
6.6	Methode und Analysebeispiele: RBC-Analyse und SPK	264
6.6.1	Analysebeispiel RBC-Modell: Anna, Aufgabe 2(a)	268
6.6.2	Analysebeispiel SPK: Anna, Aufgabe 2(a)	276
6.6.3	Analysebeispiel RBC-Modell: Bärbel, Aufgabe 2(a)	285
6.6.4	Analysebeispiel SPK: Bärbel, Aufgabe 2(a)	288
6.6.5	Analysebeispiel RBC-Modell: Carola, Aufgabe 2(b)	296
6.6.6	Analysebeispiel SPK: Carola, Aufgabe 2(b)	302
6.7	Vorstellungen, Schluss und Strategie: Analysen und Ergebnisse	307
6.7.1	Ergebnisse: Vorstellungen	309
6.7.2	Ergebnisse: Strategie	312
6.7.2.1	Strategie A.1: „Konkrete Zahlen, bitte!“	313
6.7.2.2	Strategie A.2: „Erstmal Einsetzen!“	315
6.7.2.3	Strategie B.1: „Ich suche eine Struktur!“	316
6.7.2.4	Strategie B.2: „Grafik hilft!“	318
6.7.2.5	Die Strategien im Überblick	319
6.7.3	Ergebnisse: Finaler Schluss	320
6.7.3.1	Schluss: (F)ehlrichtung	321
6.7.3.2	Schluss: (A)bbruch	322
6.7.3.3	Schluss: (U)ngleichung	324
6.7.3.4	Schluss: (W)ahl	326

6.7.3.5	Die Schlüsse im Überblick	329
6.8	Methode und Analysebeispiele: Einsatz der KVD	330
6.8.1	Analysebeispiel KVD: Anna	331
6.8.2	Analysebeispiel KVD: Bärbel	340
6.8.3	Analysebeispiel KVD: Carola	343
6.9	Verständnis: Analysen und Ergebnisse	347
6.9.1	Ergebnis: Verständnistypen	347
6.9.1.1	Verständnistyp 1.1: Logische Komplexität	349
6.9.1.2	Verständnistyp 1.2: . . . und fehlerhafte Zusammenhänge	354
6.9.1.3	Verständnistyp 2: Bedeutung von ε und δ	356
6.9.1.4	Verständnistyp 3: Bedeutung von x und $f(x)$	359
6.9.1.5	Verständnistyp 4: Vielfältige Schwierigkeiten	362
6.9.1.6	Abschließender Überblick	367
6.9.2	Ergebnisse: Fehler und Ursachen - Gründe für ein Scheitern	368
6.9.3	Ergebnisse: Nachweis der Unstetigkeit	375
III.	Aus- und Zusammenführung der Ergebnisse	380
6.10	Schwierigkeiten im Umgang mit der ε - δ -Definition	380
6.10.1	Der Umgang mittels Strategie und Schluss bei den gestellten Aufgaben	381
6.10.2	Das Verständnis der ε - δ -Definition	387
6.10.3	Vorstellungen von Stetigkeit und deren Beziehung zur ε - δ -Definition	400
6.10.4	Beschreibungen über die Zeichenklassen nach Peirce	404
6.10.5	Selbsteinschätzungen zu Schwierigkeiten und Hindernissen	405
6.11	Reflexion der Auswertungsmethoden	408
6.11.1	Verwendung und Verknüpfung vom RBC-Modell und den SPK	408
6.11.2	Erprobung vom Einsatz des KVD	413
6.11.3	Eignung des Forschungssettings	416
6.11.4	Sensibilisierung im Fokus	419
7	Zusammenfassung, Schlussfolgerungen und Ausblick	421
7.1	Zusammenfassung und zentrale Ergebnisse	421
7.2	Förderung und ein Appell an die Lehre	425
7.3	Methodische Variationen und anschließende Forschungsmöglichkeiten	430
7.4	Schlussbemerkung	433
8	Literaturverzeichnis	434
9	Anhang	1
9.1	Notizen (Test 2014)	2
9.2	Notizen (Interviewstudie 2014)	19

Notizen von Student Anna	20
Notizen von Student Bärbel	25
Notizen von Student Carola	31
Notizen von Student Doreen	36
Notizen von Student Eileen	39
Notizen von Student Fiene	42
Notizen von Student Gerd	43
Notizen von Student Helene	45
Notizen von Student Ina	48
Notizen von Student Julia	51
Notizen von Student Karl	53
Notizen von Student Lukas	56
Notizen von Student Marina	59
Notizen von Student Ole	63
Notizen von Student Paula	66
Notizen von Student Rena	69
Notizen von Student Sarah	72
9.3 Transkribierregeln	75
9.4 Transkripte der Interviews	76
9.5 RBC-Analysen [exemplarisch]	77
9.6 Semiotische Prozess-Karten [exemplarisch]	84
9.7 KVD der Studenten	93

1 Einleitung

Auf die Frage an Studienanfänger¹, ob sie selber Schwierigkeiten mit der ε - δ -Definition von Stetigkeit haben und wenn ja, was ihnen besonders schwer fällt, antwortet ein Student auf erschütternde Weise mit: „Ja, nämlich alles“. Der Student hat anscheinend umfangreiche Schwierigkeiten im Umgang mit der Definition und ist zudem nicht in der Lage diese selber überhaupt erstmal klar zu benennen.

Die ε - δ -Definition der Stetigkeit

Eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, mit $D \subseteq \mathbb{R}$ ist genau dann in $x_0 \in D$ stetig, wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Die vorliegende Arbeit stellt die ε - δ -Definition von Stetigkeit aus einer mathematikdidaktischen Perspektive in ihren Mittelpunkt. Ausgangspunkt dafür sind vor allem eigene Erfahrungen mit der Definition und Beobachtungen bei anderen Studienanfängern. Ob selbst noch als Student oder als Tutor, immer wieder habe ich das Klagen der Studierenden im Umgang mit dieser Definition wahrgenommen. Woran aber kann es liegen, dass (beinahe) alle Studienanfänger Schwierigkeiten im Umgang mit der ε - δ -Definition haben? Was genau fällt den Studierenden im Umgang mit der Definition so schwer? Wie tief ist das individuelle studentische Verständnis von der Definition tatsächlich? Und wie gehen die Studenten mit der Definition im Kontext von Nachweisen der Stetigkeit um?

Das sind die zentralen Fragen, die meine Untersuchung von Anfang an geprägt haben. Im Rahmen dieser Arbeit möchte ich nun dahingehend verschiedene Perspektiven und Analysen in Bezug auf die ε - δ -Definition von Stetigkeit und den Umgang von Studienanfängern mit dieser Definition einnehmen.

Die ε - δ -Definition von Stetigkeit ist eine der zentralen Definitionen der Analysis im ersten Semester. In dieser Arbeit steht sie dabei exemplarisch für wesentliche Hürden der universitären Analysis, darunter vor allem die Epsilontik und die Quantorenaussagen. Stetigkeit bietet aber (z. B. im Gegensatz zum Grenzwert) die Möglichkeit vieler verschiedener intuitiver Vorstellungen. Im Fokus dieser Arbeit steht die ε - δ -Definition von Stetigkeit außerdem als paradigmatisches Beispiel für viele ε - δ -Beschreibungen, mit denen Studierende der Mathematik bereits zu Beginn ihres Studiums konfrontiert werden. Was genau für Studienanfänger die Schwierigkeiten im Umgang mit dieser ε - δ -Definition sind und wie sie damit umgehen, gilt es in dieser Dissertation herauszuarbeiten.

Weltweit beschäftigen sich eine Vielzahl an Forschern bereits seit mehreren Jahrzehnten mit den Problemen, die Lernende mit den zentralen Konzepten der Analysis- bzw. Calculus-Kurse

¹Zur Vereinfachung und besseren Lesbarkeit wird in der gesamten Arbeit bei allgemeinen Aussagen nicht in geschlechtsspezifische Personenbezeichnungen differenziert. Die gewählte männliche Form steht gleichberechtigt für die männliche, wie weibliche Form.

haben. Ein thematischer Schwerpunkt in den mathematikdidaktischen Arbeiten liegt dabei vor allem auf der formalen Definition vom Grenzwert von Folgen oder von Funktionen. Die formale Definition der Stetigkeit, und dabei insbesondere die ε - δ -Definition, findet in der Regel deutlich weniger Berücksichtigung. Das erscheint überraschend, da ein Großteil der bei der formalen Definition vom Grenzwert von Funktionen identifizierten Schwierigkeiten (z. B. die sich aus den Quantoren ergebende Abhängigkeit von δ und ε) ebenfalls im Umgang mit der ε - δ -Definition von Stetigkeit zu erwarten ist. Stattdessen wird sich bei der Stetigkeit vor allem auf Vorstellungen (vgl. u. a. Tall & Vinner, 1981; Schäfer 2011) und deren Abgrenzung zur Differenzierbarkeit (vgl. u. a. Tall & Vinner, 1981; Nair, 2010) oder Definiiertheit (vgl. u. a. Duru et al., 2010; Nair, 2010) bezogen. Bei den wenigen Untersuchungen, die sich explizit auf die ε - δ -Definition von Stetigkeit beziehen, geht es vor allem darum Wege zu finden den Lernenden die Definition mithilfe von Visualisierungen nahe zu bringen (vgl. u. a. Duška & Aleksandar, 2015; Roh, 2009b). Duška & Aleksandar (2015) weisen im Zuge dessen außerdem grob auf zentrale Schwierigkeiten im Umgang mit den Symbolen (ε , δ), Quantoren (\forall , \exists) und den Ungleichungen ($|x - x_0| < \delta$, $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$) hin. Mastorides & Zachariades (2004) beschäftigen sich zudem mit dem Anspruch, der der ε - δ -Definition von Stetigkeit mit den Quantoren und deren Reihenfolge zugrunde liegt.

Auf der Grundlage dieser bisherigen Ergebnisse wird in der vorliegenden Arbeit nun stärker untersucht, wie genau Studienanfänger der Mathematik mit der ε - δ -Definition von Stetigkeit im Kontext von Nachweisen der Stetigkeit für gegebene Funktionen umgehen und wie tief dabei ihr individuelles Verständnis von der Definition ist. Im Zuge dessen kommt es zu einer Verwendung und Verknüpfung zentraler theoretischer wie zugleich methodischer Theorien aus der Mathematikdidaktik, auf die noch genauer eingegangen wird. Ein wesentlicher Schwerpunkt der Dissertation soll folglich auf einer Auseinandersetzung mit **individuellem studentischen Verständnis von bzw. Umgang mit der ε - δ -Definition** im Kontext von Nachweisen der Stetigkeit gegebener Funktionen liegen. Hauptanliegen ist dabei nicht eine bewertende Beschreibung der studentischen Bearbeitungen. Jedoch schwebt über dieser ganz zentralen Zielsetzung die fundamentale Frage nach den Schwierigkeiten und Hindernissen im Nachweis der Stetigkeit mit der ε - δ -Definition. Es werden im Folgenden stellenweise weitere zentrale Erweiterungen und Unterschiede zur bisherigen Literatur herausgestellt.

In der Arbeit stehen zwei zentrale Untersuchungen im Mittelpunkt des empirischen Teils. Neben einer Pilotstudie findet im Oktober 2014 ein Brückenkurs zur ε - δ -Definition von Stetigkeit und im Anschluss daran Einzelinterviews mit 18 Studienanfängern der Mathematik statt. Im Januar 2015 schließt ein Test mit ca. 130 Studienanfängern an. Sowohl bei den Interviews, als auch bei den Tests stehen Aufgaben im Mittelpunkt, in denen sich mit Vorstellungen von Stetigkeit bzw. Unstetigkeit, sowie vor allem mit Nachweisen von Stetigkeit auf der Grundlage der ε - δ -Definition beschäftigt wird. Dazu folgen später noch etwas prägnantere Angaben. Beide

Untersuchungen laufen in Durchführung und Analyse getrennt voneinander ab und werden erst am Ende der Arbeit vor dem Kontext der Forschungsfragen zusammengeführt. Die zentralen Forschungsfragen der Arbeit lauten dabei konkreter:

Welche epistemischen Schwierigkeiten und Hindernisse zeigen sich bei Studienanfängern im Umgang mit der ε - δ -Definition von Stetigkeit und was sind mögliche Ursachen? Und dazu:

- Wie wird mit der Definition im Rahmen von Stetigkeitsnachweisen im epistemischen Handlungsprozess umgegangen? Welche Strategien und zentralen Schlüsse werden sichtbar?
- Wie tief ist das individuelle Verständnis der Studienanfänger von der ε - δ -Definition von Stetigkeit konsolidiert?
- Aber auch: Welche Vorstellungen von Stetigkeit herrschen bei Studienanfängern vor und wie sind diese Vorstellungen mit der Definition verbunden?

Im Mittelpunkt der Analyse steht damit die Rekonstruktion von epistemischen Schwierigkeiten und Hindernissen, die Studienanfänger im Umgang mit der formalen ε - δ -Definition von Stetigkeit erfahren. Im Detail geht es also darum zu untersuchen, was genau Studienanfänger daran hindert das Konzept der Stetigkeit auf der Basis der ε - δ -Definition flexibel zu nutzen.

Das Adjektiv „epistemisch“ verweist bereits darauf, dass es um die Rekonstruktion von Schwierigkeiten geht, die die Erkenntnis und die Konstruktion von Wissen betreffen. Bei den dabei zugrundeliegenden Theorien handelt es sich, zusammen mit dem RBC-Modell (R, B und C stehen dabei für „Recognizing“, „Building-with“ und „Constructing“) nach Dreyfus et al. (2015), um „Abstraction in Context“ und, zusammen mit den Semiotischen Prozess-Karten nach Schreiber (2010), um die Semiotik nach Peirce. Beide Theorien werden in qualitativen Mikroanalysen der Interviewdaten miteinander verknüpft, indem über das RBC-Modell zuerst epistemische Handlungen der Studenten rekonstruiert und anschließend die erklärten Bearbeitungsprozesse mit den Semiotischen Prozess-Karten analysiert und dargestellt werden. Aus den Forschungsfragen heraus wird dabei deutlich, dass die Begriffe vom Verständnis, der Strategie und dem Schluss ganz zentrale Variablen der Auswertung sind. Dabei geht es bei der Strategie um individuelles Vorgehen (einschließlich seiner Absicht) um den Nachweis der Stetigkeit einer bestimmten gegebenen Funktion zu führen und beim Schluss insbesondere um eine Abschlussentscheidung, die zur Folgerung der Stetigkeit führt. Auf der Grundlage der Semiotischen Prozess-Karten können vor allem Strategie und Schluss bei den gegebenen Aufgaben, sowie der Umgang mit den einzelnen Zeichen der ε - δ -Definition nachvollziehbar herausgearbeitet werden. Die Verwendung der Zeichen und deren Funktion lässt sich zusammen mit den Detailanalysen außerdem wesentlich über die Zeichenklassen von Peirce beschreiben. Zudem werden über die Detailanalysen noch viel grundsätzlichere individuelle epistemische Schwierigkeiten im Umgang mit der ε - δ -Definition aufgezeigt, als die in der bisherigen Literatur zu findenden. Das epistemische Handeln wird dabei untersuchbar, indem die Studienanfänger Aufgaben bearbeiten, die so oder

so ähnlich ebenfalls an der Universität zu finden sein könnten. In den Aufgaben werden die Studenten dazu aufgefordert die üblicherweise an der Universität gelernte (präzise) ε - δ -Definition von Stetigkeit für den Nachweis der Stetigkeit einer gegebenen Funktion zu verwenden. Aufgabenteile werden aber so gewählt, dass Teile der ε - δ -Definition in der konkreten Situation überflüssig sind. Durch den neuen, ungewohnten Kontext ist die Verwendung der ε - δ -Definition damit nicht immer eindeutig übertragbar und die Bedeutung der Bestandteile der Definition müssen einzeln rekonstruiert werden. Durch den Umgang mit der Definition in diesem konkreten Kontexten zum Nachweis der Stetigkeit werden insbesondere epistemische Schwierigkeiten deutlich.

Bezogen auf die Untersuchung vom Verständnis wird zusätzlich das Analysemittel der „Konsolidierungs-Verständnisdiagramme“ (KVD) entwickelt, das das individuelle Verständnis der Studenten von der ε - δ -Definition in Beziehung zu einem normativen Verständnis der ε - δ -Definition setzt und es zugleich analysierbar und darstellbar macht. Das Verständnis der Studenten aus den Interviews wird vor allem über Erklärungen seitens der Studenten zu den eigenen Bearbeitungen rekonstruiert, indem untersucht wird, welche Zeichen der Definition wie zueinander in Beziehung gesetzt werden, und wie dies das Handeln beeinflusst. Erklärungen fungieren hier also als ein Mittel, um an das Verständnis heranzutreten. Auch in dem Aspekt vom Verständnis geht die hier vorliegende Arbeit damit wesentlich über die bereits vorliegende Literatur hinaus. Das entworfene Hilfsmittel der KVD kann indessen für die Analyse von anderen formalen Begriffen (bzw. Definitionen) in der Mathematik weiterentwickelt werden und leistet somit ebenfalls einen zentralen theoretischen Beitrag. Darüber hinaus gilt, dass die Ergebnisse aus den Interviews die Ergebnisse aus dem Test unterstützen und intensivieren. Die Bearbeitungen aus den Tests selbst geben zwar weniger Auskunft über Erkenntnisstand und den Umgang mit der ε - δ -Definition, ermöglichen aber im Zuge eines ebenfalls qualitativen Analyseverfahrens Klassifikationen, die einen Überblick über Vorstellungen von Stetigkeit geben und deren Analyse insbesondere in Bezug auf eine gestellte Nachweisaufgabe mittels der ε - δ -Definition quantitativen Wert.

Alle Fragen verbindet übergreifend die Absicht eine Sensibilisierung für den Anspruch zu schaffen, dem Studienanfänger mit der ε - δ -Definition von Stetigkeit gegenüberstehen. Dazu werden ganz unterschiedliche Blickwinkel und Perspektiven in Bezug auf die Definition eingenommen. Die Tiefe der Arbeit ergibt sich aus der wechselseitigen Beziehung von historisch-genetischer, fachwissenschaftlicher, wie fachdidaktischer Sachanalyse und empirischen Untersuchungen, deren Analysen forschungsmethodisch verschiedene Schwerpunkte setzen.

Was der Leser zu erwarten hat . . .

Was hat der Leser in diesem Sinne aber nun in den einzelnen Kapiteln dieser Arbeit zu erwarten? Neben dem ersten hier vorliegenden Kapitel der Einleitung geht es im zweiten Kapitel zu-

erst einmal um den zentralen mathematischen Gegenstand der Arbeit – die ε - δ -Definition von Stetigkeit. Im Zuge dessen kommt es zu einer Darstellung der historischen Entwicklung der Definition. Diese erste (kultur-)historische Perspektive wird später insbesondere zur Identifikation von epistemologischen Hindernissen zentral. Als solche werden empirisch auftretende Schwierigkeiten bezeichnet, die sich nicht nur aus dem Lerngegenstand selbst heraus plausibilisieren lassen, sondern ebenso angesichts der historischen Entwicklung eines Begriffes als Bruch empfunden werden. Anschließend folgt eine ausführliche fachwissenschaftliche, wie fachdidaktische Perspektive auf die Stetigkeit und deren ε - δ -Definition. Hier wird sich u. a. mit Vorstellungen von Stetigkeit, formalen Definitionen und mit der Stetigkeit im Übergang von der Schule zur Universität beschäftigt. Weiter wird sich auf die Quantoren als wesentliche Schwierigkeit im Umgang mit der ε - δ -Definition bezogen. Diese stoffdidaktische Analyse ist vor allem zum Nachvollziehen der Wahl der Untersuchungsaufgaben und für die Analyse der studentischen Bearbeitungen des Datenmaterials wesentlich. Abschließend geht es in diesem Kapitel um die Darstellung bisheriger Untersuchungen zur Stetigkeit und außerdem zum Grenzwert, mit integrierter und anschließender Abgrenzung zur vorliegenden Arbeit.

Im dritten Kapitel werden die Begrifflichkeiten und Theorien vorgestellt, die für die Arbeit grundlegend sind. Dazu wird zuerst einmal eine Konkretisierung des Forschungssetting vorgenommen, sodass die Theorien direkt darauf bezogen werden können. Es schließt ein Abschnitt zu „Abstraction in Context“ und dem RBC-Modell an. Darin wird deutlich gemacht, dass die Theorie deshalb für die hier vorliegende Arbeit interessant ist, weil sie die Möglichkeit bietet nachzuvollziehen, wie Lernende abstrakt-mathematisches Wissen konstruieren bzw. konsolidieren. Es folgt ein Abschnitt zum zentralen Begriff vom Verständnis. Neben der Unterscheidung vom Verständnis als Prozess und Produkt kommt es hier zur Konstruktion des Hilfsmittels vom „Konsolidierungs-Verständnisdiagramm“ (KVD), das in dieser Arbeit der Analyse und der Darstellung vom individuellen studentischen Verständnis der ε - δ -Definition dient. Verständnis wird dabei in Bezug auf die ε - δ -Definition als das Erfassen der einzelnen Zeichen (einschließlich deren Bedeutung) und das Verknüpfen (und Erfassen der Bedeutung) der einzelnen Zeichen untereinander beschrieben. Im letzten Teil geht es um den zweiten theoretischen Bereich der Semiotik. Hier werden vor allem die Semiotik nach Charles Sanders Peirce und die Semiotischen Prozess-Karten von Schreiber (2010) dargestellt. Letztere dienen später in Kombination mit dem RBC-Modell und den KVD als zentrale Analysemittel der Interviewdaten. Kapitel 2 und 3 dienen damit im Wesentlichen der theoretischen Fundierung.

Das vierte Kapitel stellt schließlich die theoretisch fundierten Forschungsfragen heraus, die anhand der vorhergehenden Überlegungen weiter ausdifferenziert werden. Im Zuge dessen kommt es außerdem zu einer Darstellung des Forschungsinteresses mit theoretischem Fokus, sowie zu einer Ausformulierung des grundlegenden Forschungsinteresses der gesamten Arbeit.

Im fünften Kapitel werden schließlich das Design und die Erhebungen als wesentlicher methodischer Teil dieser Arbeit beschrieben. Dabei wird der Begriff vom „Erklären“ als für die Methode

wichtig herausgestellt, da die Studenten ihre Bearbeitungen in den Interviews rückwirkend erklären. Es stehen anschließend die beiden Erhebungsinstrumente - Test und Interview - im Mittelpunkt. Dabei geht es insbesondere um eine Darstellung der Untersuchungsaufgaben und um ein Aufzeigen von Möglichkeiten zu deren Bearbeitung.

Den Kern der Arbeit bildet, einschließlich von Vorgehen, Analysen und Ergebnissen, die Auswertung in Kapitel 6. Neben der Darstellung der empirischen Befunde werden hier zentrale methodologische Überlegungen aufgezeigt. So werden erst einige Anmerkungen zum Auswertungsprozess an sich gegeben und dann die qualitative Inhaltsanalyse als zentrale Auswertungsmethode für die Arbeit herausgestellt.

In Teil I von Kapitel 6 geht es zuerst um die Analyse und Ergebnisse des Tests. Zunächst wird hier die qualitative Inhaltsanalyse in Bezug auf ihre Anwendung bezüglich der Tests konkretisiert und erst anschließend werden, auf der Grundlage der bearbeiteten Untersuchungsaufgaben, Ergebnisse zu Vorstellungen von Stetigkeit und dem Umgang mit der ε - δ -Definition gegeben.

In Teil II stehen die Analysen und Ergebnisse der Interviews im Mittelpunkt. Erneut findet eine Konkretisierung der qualitativen Inhaltsanalyse, diesmal bezogen auf die Interviews, statt. Anschließend lassen sich konkrete Analysebeispiele zum Einsatz des RBC-Modells und zu den Semiotischen Prozess-Karten finden. Auf dieser Grundlage werden Ergebnisse zu Vorstellungen von Stetigkeit und zu Strategien und finalen Schlüssen bezogen auf den Nachweis der Stetigkeit von gegebenen Funktionen mit der ε - δ -Definition angegeben. Indessen wird insbesondere deutlich, wie die Studienanfänger die Definition im Kontext von Stetigkeitsnachweisen verwenden. Es folgen Analysebeispiele zum Einsatz vom „Konsolidierungs-Verständnisdiagramm“ als Hilfsmittel zur Analyse vom individuellen studentischen Verständnis. Auf dieser Basis schließt die Ergebnisdarstellung zu den Typen vom studentischen Verständnis der Definition, sowie eine Darstellung der zentralen Fehler und Ursachen im Umgang mit der Definition an.

Der letzte Teil III zur „Aus- und Zusammenführung der Ergebnisse“ fasst sämtliche Ergebnisse aus Test und Interview auf die Forschungsfragen bezogen zusammen. Es wird dabei ein umfassender Blick auf die Analysen und die Ergebnisse des reichhaltigen Datenmaterials ermöglicht und der zugleich qualitative Wert der Tests deutlich. Außerdem findet eine Reflektion der methodischen Hilfsmittel statt.

Den Abschluss bildet schließlich Kapitel 7 mit einer knappen Zusammenfassung und einer kritischen Reflektion der Untersuchung. Es folgen Ansätze zur Förderung und ein Ausblick auf (mögliche) anschließende Forschungsarbeit.

2 Die ε - δ -Definition von Stetigkeit

Im Mittelpunkt der inhaltlichen Grundlegung steht die formale ε - δ -Definition der Stetigkeit. Diese steht in enger Beziehung zum ebenfalls für die Analysis zentralen Begriff des Grenzwertes.

2.1 Begriffe und Vorstellungen

Für das vorliegende Kapitel sollen zuerst die Bedeutung von Begriffen als Mittelpunkt der Mathematik und die Bedeutung und Rolle von Vorstellungen herausgearbeitet werden.

Begriffe als Mittelpunkt der Mathematik

Dass Begriffsbildung eine bedeutende Rolle beim Lernen von Mathematik spielt ist im allgemeinen anerkannt. Damit einher geht die Tatsache, dass das Durchdringen von Mathematik stets mit dem Verstehen von Begriffen verbunden ist. Was genau es bedeuten soll den Begriff der Stetigkeit oder insbesondere die ε - δ -Definition zu verstehen, darauf soll später näher eingegangen werden. Zu betonen ist, dass einige Begriffe für bestimmte Teilgebiete der Mathematik besonders zentral sind. Der Begriff der Stetigkeit und die ε - δ -Definition sind als solche zentral für die Analysis.

Bezogen auf Darstellungen von Stetigkeit oder die ε - δ -Definition wird dabei immer wieder zwischen informellen (bzw. intuitiven), teilweise aber auch regelgeleiteten und formalen Darstellungen unterschieden. Informell sind indessen intuitiv entstandene Skizzen oder Notizen. Regelgeleitet hingegen sind Darstellungen, die unter allgemein akzeptierten Regeln aufgestellt werden. Darunter fallen z. B. Funktionsgraphen oder algebraische Formeln. Als formale Darstellungen werden z. B. die Quantoren (der Analysis) oder die Symbolsprache (der Algebra) bezeichnet, indem diese als konventionelle Darstellungen verwendet werden. (vgl. dazu Hefendehl-Hebeker, 2010, S.116)

Es sind „Begriffe und Begriffsbildung [...] auf einer [...] Ebene unter ontogenetischen und kulturhistorischen Aspekten zu betrachten“ (Lambert, 2003, S.1). Diese Unterscheidung ist wie folgt zu verstehen: eine kulturhistorische Annäherung bezieht sich darauf, wie sich ein Begriff im Laufe der Zeit in der Mathematik entwickelt hat (vgl. Hischer, 2012, S.98). Das bedeutet zugleich, dass die Mathematiker erst bei „genauerer Untersuchung [...] daraufgekommen [sind] [...], was eigentlich los ist“ (Fischer & Malle, 1985, S.144). Die neuen Erkenntnisse finden im daran anschließenden Berücksichtigung und prägen damit die Entwicklung eines Begriffes im historischen Rahmen. Dieser Ansatz gibt Aufschluss über das Warum der uns heute als fertig präsentierten Mathematik und soll im Zuge des anschließenden Abschnitts 2.2 für den Begriff der Stetigkeit und dessen ε - δ -Definition rekonstruiert werden. Es wird deutlich, dass sich insbesondere die formale Definition, die im Mittelpunkt dieser Arbeit stehen wird, in einem langwierigen Entstehungsprozess entwickelt hat und nicht innerhalb kürzester Zeit als fina-

les Produkt entstanden ist. Die Darstellung dieser Entwicklung fungiert schließlich ebenso als Plausibilisierung für die anspruchsvolle Lerngeschichte eines jeden einzelnen Lernenden. Das kann im Sinne einer strukturgenetischen didaktischen Analyse gesehen werden, die Wittmann als Erweiterung der Stoffdidaktik einführt (vgl. Wittmann, 2012, S.273f.). Nach einer solchen ist die Mathematik nämlich in ihrem Prozesscharakter bedeutsam und es wird daneben „das Lernen von Mathematik in seiner Genese betrachtet“ (ebd., S.274). Dabei werden Lernvoraussetzungen ebenso wie Zielsetzungen als empirisches Material für die Analyse hinzugezogen (vgl. ebd.). Das plausibilisiert das Auftreten von „[u]nterschiedlichen Lösungsansätze[n], verschiedene[n] Darstellungsformen, Unklarheiten, Fehlern[n], Irrwegen[n], Missverständnisse[n] usw.“ (ebd., S.273). Außerdem macht all das eine historische (struktur-)genetische Perspektive vom höheren Standpunkt aus für die Analyse und Klärung von Schwierigkeiten im Kontext dieser Arbeit beinahe apodiktisch und umso interessanter.

Darüber hinaus soll beachtet werden, dass mathematische Begriffsbildung oft der Präzisierung vager Problemstellungen und damit einer Lösung von Problemen dient. Das gilt sowohl für die historischen Entwicklungen, als auch individuelle Lerngeschichten. Vollrath schreibt zu ersterem sogar: „Mathematische Begriffe sind in Problemkontexten entstanden“ (Vollrath, 2012, S.229). Dabei ist es wichtig, dass die darunter entstehenden Begrifflichkeiten nicht immer die einzigen „Lösungsmöglichkeiten“ darstellen. Diese Gedanken sind z. B. für die spätere Entwicklung des Brückenkurses wichtige Grundlage.

Bei der ontogenetischen Begriffsbildung sind „das Begreifen (als Handlung) und der Begriff im Prozess der Begriffsentwicklung untrennbar aneinander gekoppelt“ (Hischer, 2012, S.20). Gemeint ist dabei gerade die Begriffsbildung bei einem Menschen bzw. einem Individuum. Diese Perspektive erscheint besonders im Kontext der Analyse von empirischen Fallstudien als eminent. Daher wird später im Rahmen der Analyse ein Schwerpunkt auf den studentischen Umgang mit der ε - δ -Definition und das Verständnis gesetzt. Wichtig ist diese Überlegung z. B. für die Begriffsbildung im Rahmen des selbst-konzipierten Brückenkurses zur ε - δ -Definition von Stetigkeit.

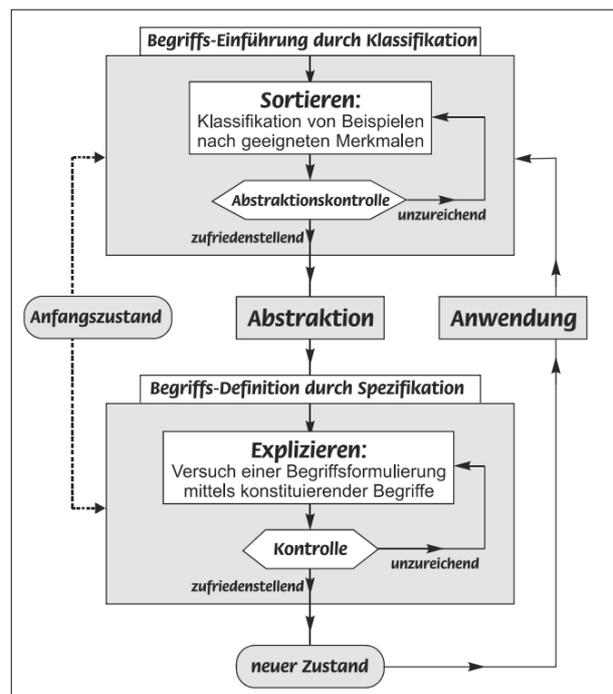


Abb. 1: Phasendiagramm zur ontogenetischen Begriffsbildung (Hischer, 2012, S.37)

In Hischers rechts abgebildetem Phasendiagramm wird deutlich, dass die ontogenetische Begriffsbildung aus zwei wesentli-

chen Phasen besteht: Der Einführung des Begriffs und der eigentlichen Definition. Eine Definition meint dabei, streng genommen, „die formale Fassung als ‚Endprodukt‘ des ‚Definierens‘“ (ebd., S.37 [Hervorhebung im Original]). Indessen scheint es bei der Einführung eines neuen Begriffes zuerst einmal sinnvoll diesen genauer zu untersuchen. Sowohl im Kontext von Schule und Universität, als auch unabhängig davon werden häufig Beispiele untersucht oder es wird geprüft, ob vorgegebene Objekte unter den Begriff fallen oder eben nicht. In einer zunehmenden Systematik können Parameter variiert werden, sodass ein besserer Gesamtüberblick entsteht (vgl. Vollrath, 1984, S.111f.). Es ist dabei zu bedenken, dass jedes Individuum unterschiedliche Präferenzen hat. Dabei kann es vereinzelt sein, dass ein rein formaler Zugang ausreichend ist. Fest aber steht, dass ein nachhaltiges Durchdringen der Thematik erst entsteht, wenn sich der Lernende intensiv mit dem Begriff auseinandersetzt. Dass das sehr gut anhand von ausgewählten Beispielen geschehen kann erscheint dabei naheliegend.

Auf diese fundamentale und zugleich praktisch nutzbare Feststellung beziehen sich im Rahmen dieser Arbeit später grundlegende Entscheidungen für die Konzeption des Brückenkurses. Beide Bereiche finden bei dessen Konstruktion Beachtung. Zum einen wird die ε - δ -Definition erst aus einem anschaulichen und informellen bzw. intuitiven Zugang heraus entwickelt und zum anderen dann von den Studierenden in einem selbstständigen Prozess expliziert. Außerdem ist dabei schon der in Hischers Phasendiagramm zu erkennende Ansatz der Abstraktion zu betonen, bei dem Begriffe über Beispiele gebildet und später definiert werden. Schwerpunktmäßig untersucht wird in dieser Arbeit aber tatsächlich welche Schwierigkeiten und Hindernisse bei Studienanfängern im Umgang mit der ε - δ -Definition von Stetigkeit auftreten und wie tief dabei das individuelle Verständnis zur Definition ausgebaut ist. Betont werden soll, dass es indes nicht allein um den Begriff der Stetigkeit an sich, sondern explizit um dessen ε - δ -Definition handelt. In einem ersten Schritt interessieren zudem Vorstellungen von Stetigkeit und wie diese mit der ε - δ -Definition verbunden sind. Was genau dabei unter Vorstellungen gefasst werden soll wird im Folgenden erläutert.

Vorstellungen

Der Begriff der Vorstellungen hat in der Literatur unterschiedliche Bedeutungen. Eine Darstellung zu den verschiedenen Bedeutungen des englischen Pendantes „Conceptions“ findet sich in Kaldrimidou & Tzekaki (2005, p.1245ff.). Für die hier vorliegende Arbeit möchte ich mich aber auf eine häufig zitierte Definition von Vorstellungen stützen, die von Gropengießer stammt: „Vorstellungen‘ sind [...] subjektive gedankliche Konstrukte. Sie lassen sich je nach ihrer Komplexität den Ebenen ‚Begriff‘, ‚Konzept‘, ‚Denkfigur‘ und ‚Theorie‘ zuordnen“ (Gropengießer, 1997, S.74). Dabei fasst er unter Begriffen die schlichtesten Vorstellungen zusammen, denen z. B. Zeichen zugrunde liegen und die durch Fachtermini oder andere Ausdrücke beschrieben werden können. Wesentlich sind hier z. B. charakterisierende Merkmale von Stetigkeit. Konzepte sind Verknüpfungen von Begriffen, die sich als Sätze oder Aussagen auf einen Sachverhalt beziehen;

Denkfiguren versteht er als Zusammensetzungen aus Konzepten und schließlich entsprechen Theorien den komplexesten Vorstellungen, die aus Konzepten und Denkfiguren bestehen. (vgl. ebd., S.74f.)

Für die Vorstellungen mit denen sich in dieser Arbeit vor allem empirisch beschäftigt wird, sind primär solche der ersten beiden Komplexitätsstufen interessant. Weiter ist „Anschaulichkeit ein wesentliches Merkmal von Vorstellungen“ (Bender, 1991b, S.52). Die Individualität und Anschaulichkeit geht aus einer Definition von Büchter, Hußmann, Leuders und Prediger hervor, in der Vorstellungen als „individuelle Gedanken, ‚Bilder‘, Meinungen oder Verständnisse über mathematische Inhalte“ (Büchter et al., 2005, S.2) präzisiert werden. Es wird betont, dass Vorstellungen in einem andauernden Prozess entstehen und ständig verändert werden (vgl. ebd.). Während im Theorieteil dieser Arbeit noch danach gefragt wird welche Vorstellungen von Stetigkeit überhaupt naheliegend oder typisch sind, soll im empirischen Teil der Arbeit mit Blick auf bisherige Untersuchungen herausgestellt werden welche Vorstellungen empirisch bei Studienanfängern der Mathematik auftreten und wie diese mit der ε - δ -Definition verbunden sind. Vorstellungen sind dabei besonders deshalb interessant, weil sie eine „wesentliche Lernvoraussetzung“ (Gropengießer, 1997, S.71) sind und einen ersten Eindruck davon geben, was Studienanfänger unter Stetigkeit fassen. Im Mittelpunkt stehen also individuelle Vorstellungen – oder wie Gropengießer schreibt „subjektive gedankliche Konstrukte“ (ebd., S.74) – zur Stetigkeit. Es stehen folglich keine normativen Vorstellungen im Fokus, auf die später trotzdem noch eingegangen werden soll. Auch bei der Verbundenheit der Vorstellungen zur ε - δ -Definition ist zu erwarten, dass im gedanklichen Bereich Vorstellungen als Begriffe und Konzepte (nach Gropengießer) eine zentrale Rolle spielen.

Weiter inkludiert der Begriff der Vorstellungen in dieser Arbeit grundsätzlich den Begriff der Fehlvorstellungen. Dieser Begriff wird in der Literatur in der Regel eingesetzt, wenn Vorstellungen entsprechend dem normativen Konzept nicht tragfähig erscheinen (vgl. dazu vom Hofe, 1995, S.10; Vogel & Wittmann, 2010, S.3; Büchter et al., 2005, S.5f.; oder für die Analysis z. B. Bender, 1991a). Gegen eine strikte Trennung von Vorstellung und Fehlvorstellung wird sich in dieser Arbeit schon aus dem folgenden Grund entschieden: Bei einigen Vorstellungen zur Stetigkeit, die historisch Verwendung gefunden haben, jedoch heute als überholt gelten, ist nicht klar zu benennen, ob sie Fehlvorstellungen oder tragfähige Vorstellungen sind. Weiter können in bestimmten Spezialfällen untypische individuelle Vorstellungen sinnvoll sein oder grundsätzlich tragfähige Vorstellungen ungünstig. Diese Tatsache zeigt auf, wie kritisch ein in gewisser Weise abwertendes Sprechen über Fehlvorstellungen ist, wenn es nur um eine Abgrenzung zu normativen Konzepten geht. Wenn in dieser Arbeit tatsächlich explizit von Fehlvorstellungen gesprochen wird, dann in dem Sinne, dass diese wirklich falsch sind. Es soll mit diesem Begriff hier sehr vorsichtig umgegangen werden.

Weiter wird in dieser Arbeit stellenweise zwischen vorunterrichtlichen oder alltäglichen Vorstel-

lungen und wissenschaftlichen oder mathematisch tragfähigen Vorstellungen unterschieden. Das bedeutet aber nicht, dass alltägliche Vorstellungen grundsätzlich nicht mathematisch tragfähig sind. Die Deskriptionen der Vorstellungen setzen nur jeweils einen anderen Schwerpunkt. Das kann sowohl im theoretischen Teil interessant sein, als auch später für die Beschreibung der empirisch auftretenden Vorstellungen, indem z. B. deutlich wird, ob Vorstellungen der Studenten aus dem Alltag oder aus dem (an der Universität) Gelernten stammen. Vogel & Wittmann (2010) geben diesbezüglich eine Definition an, wann eine Vorstellung als tragfähig bezeichnet werden soll. Sie beziehen sich dabei auf das Widerspiegeln mathematischer Strukturen und die Flexibilität im Umgang mit ihnen (vgl. Vogel & Wittmann, 2010, S.3). Ob eine Vorstellung tragfähig ist, zeigt sich erst in konkreten Sachverhalten; ist allerdings trotzdem selten eindeutig zu beantworten (vgl. ebd.). Weiter weisen sie darauf hin, dass diese tragfähigen Vorstellungen sich grundsätzlich nicht von selbst aus mathematischen Darstellungen entwickeln (vgl. ebd., S.1). Außerdem weist Duit im Kontext dieser Begrifflichkeiten darauf hin, dass (zumindest in den Naturwissenschaften) vorunterrichtliche Vorstellungen für gewöhnlich im Anschluss an eine wissenschaftliche Auseinandersetzung mit der Thematik noch vorhanden sind und immer wieder isoliert für sich oder mit wissenschaftlichen Vorstellungen verknüpft angewendet werden können (vgl. Duit, 1995, S.910, S.915; Büchter et al., 2005, S.5).² Es werden teilweise sogar parallel existierende Vorstellungen verwendet, aus denen jedoch nicht die Erfahrung von Widersprüchlichkeiten hervorgeht (vgl. Duit, 1995, S.915; Büchter et al., 2005, S.2). Das rechtfertigt u. a. die Frage nach Verbindungen zwischen allgemeinen Vorstellungen und der wissenschaftlichen ε - δ -Definition.

Weiter ist es denkbar, dass Unstimmigkeiten zwischen Vorstellungen Ursache von Schwierigkeiten (im Umgang mit Stetigkeit bzw. deren ε - δ -Definition) sein können. Auch unter diesem Aspekt werden die Vorstellungen für die hier vorliegende Arbeit interessant. Im Zuge dessen liegt es nahe sich dem Appell von Jung (1986) anzuschließen, Lernende dafür zu sensibilisieren, dass in bestimmten Situationen wissenschaftliche Vorstellungen tragfähiger sind als alltägliche (vgl. Duit, 1995, S.915). Ob sich eine solche Folgerung ebenso für die Vorstellungen von Stetigkeit ergibt soll u. a. im Rahmen dieser Arbeit untersucht werden.

Weiter soll die Verwendung des Begriffes „Vorstellungen“ im Kontext dieser Arbeit deutlich von dem in der Mathematikdidaktik fest etablierten Begriff der „Grundvorstellungen“ abgegrenzt werden (vgl. vom Hofe, 1995; Bender, 1991b). Bei diesem normativ geprägten Konzept „handelt es sich [...] um eine *didaktische Kategorie des Lehrers*, die im Hinblick auf ein didaktisches Ziel aus inhaltlichen Überlegungen hergeleitet wurde und Deutungsmöglichkeiten eines Sachzusammenhangs bzw. dessen mathematischen Kerns beschreibt“ (vom Hofe, 1995, S.123, [Hervorhebungen im Original]). Solche Grundvorstellungen stehen allerdings nicht im Fokus

²Duit berichtet von diesem Zusammenhängen im Kontext vom Konzeptwechsel (conceptual change), auf den hier aber nicht weiter eingegangen werden soll (vgl. Duit, 1995, S.915).