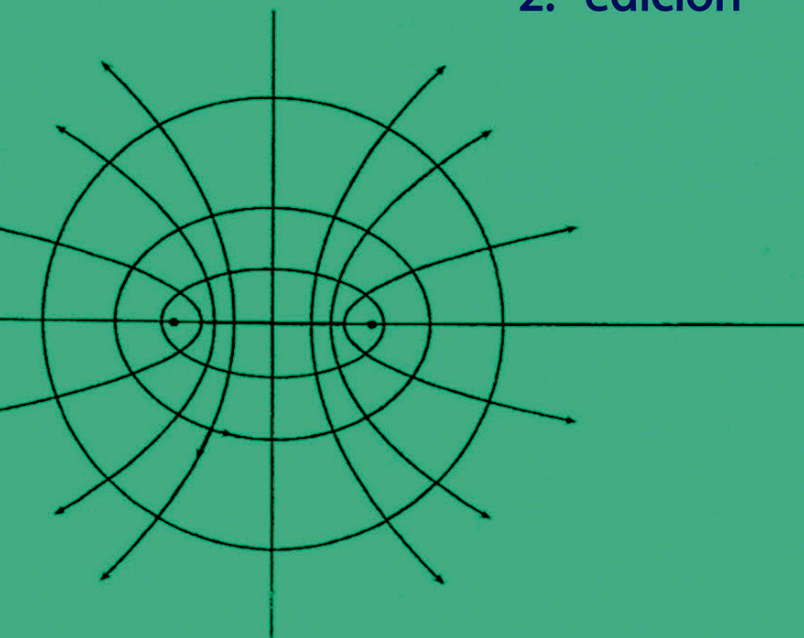
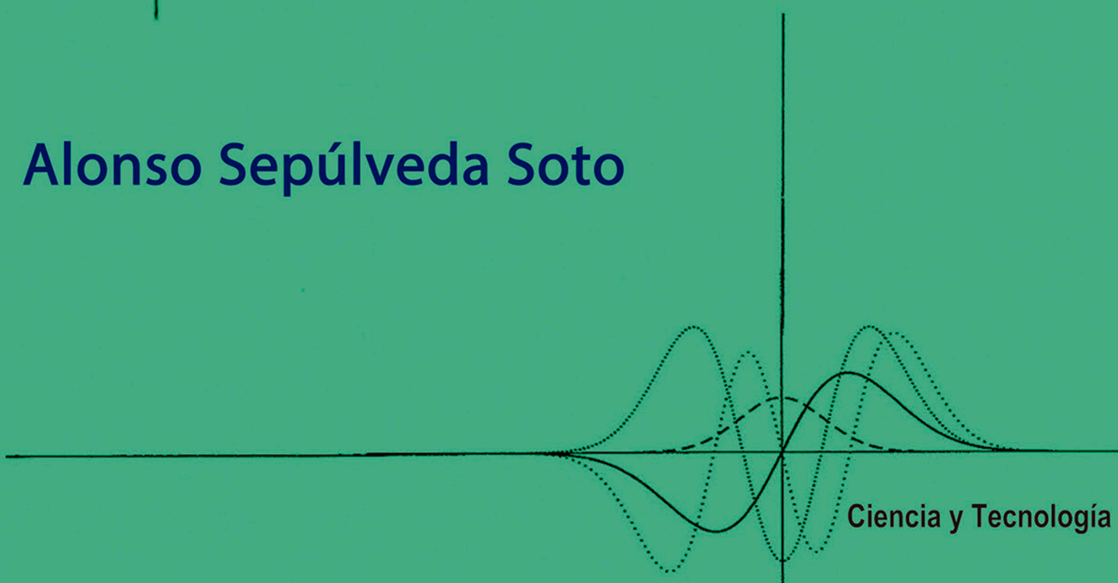
Editorial Universidad de Antioquia

Física matemática

2.ª edición



Alonso Sepúlveda Soto



Ciencia y Tecnología

Física matemática

2.ª edición

Alonso Sepúlveda Soto

Colección *Ciencia y Tecnología*

ISBN: 978-958-714-853-4
ISBNe: 978-958-714-854-1

Segunda edición: enero del 2019
Primera edición con la Editorial Universidad de Antioquia: 2009

Hecho en Colombia / Made in Colombia

Editorial Universidad de Antioquia®
(574) 219 50 10
editorial@udea.edu.co
http://editorial.udea.edu.co
Apartado 1226. Medellín, Colombia

Imprenta Universidad de Antioquia
(574) 219 53 30
imprenta@udea.edu.co

Para
Matías Gómez Sepúlveda
esta ventana mágica
abierta hacia la comprensión
de la armonía del mundo

Contenido

Introducción

Las leyes básicas de la física son invariantes, en su forma matemática, bajo un conjunto bastante general de transformaciones, que dependen de las características del espacio y el tiempo en que ocurren los fenómenos físicos. En el marco conceptual de la física newtoniana, estas leyes tienen la misma forma matemática en todos los sistemas coordenados que difieren uno con respecto al otro en la posición de su origen coordenado. Esta exigencia proviene del postulado de homogeneidad del espacio euclidiano y conduce a la conservación del momento lineal. La forma matemática de las leyes se preserva también en los sistemas coordenados que solo difieren por su orientación, y esta propiedad indica la isotropía, es decir, la equivalencia de las diferentes direcciones del espacio euclidiano, que implica la conservación del momento angular. También las leyes físicas son invariantes con respecto a la escogencia del cero de la coordenada temporal, vale decir, son las mismas en todos los instantes, lo que corresponde a la homogeneidad del tiempo en la física clásica: todos los instantes son cualitativamente idénticos, e implica la conservación de la energía. Es cierto, además, que las leyes preservan su forma en los múltiples sistemas de referencia en movimiento relativo uniforme, lo que equivale a la aceptación del principio de inercia y a la imposibilidad de encontrar el reposo absoluto en el espacio; este es el principio de relatividad especial si, además, se exige que la velocidad de la luz sea una constante universal.

Estas amplias invariancias de las leyes físicas (hay otras, como las simetrías de reflexión, las de inversión, u otras más abstractas, como las de cambio de signo de las cargas eléctricas) exigen una forma de escritura matemática que exprese su invariancia ante estos conjuntos de transformaciones. Esto se logra en el ámbito de la física newtoniana mediante la implementación del análisis vectorial tridimensional, que hace manifiestos estos diversos principios de relatividad posicional, de orientación y de movimiento.

Por ello comenzaremos este curso proponiendo las bases del análisis vectorial tridimensional, independientemente de la escogencia específica de un sistema de coordenadas, lo que garantiza la idéntica escritura de las leyes en todos ellos y permite expresar matemáticamente las invariancias del mundo. Consecuentemente, en los desarrollos del capítulo 1 propondremos las formas generales, en coordenadas curvilíneas ortogonales, de las operaciones diferenciales básicas: gradiente, divergencia, rotacional y laplaciano, junto con las nociones elementales sobre transformaciones continuas y discontinuas. Se finaliza con un estudio de las funciones delta de Dirac y con la construcción de algunos sistemas coordenados.

Puesto que las leyes físicas se expresan usualmente como ecuaciones diferenciales (ED), exploraremos en el capítulo 2 las condiciones iniciales o de frontera (o de ambos tipos) bajo las cuales las ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO) y parciales (EDP) gozan de una solución única. Estos teoremas de unicidad harán parte, en el capítulo siguiente, de la clasificación de las ecuaciones diferenciales.

En el capítulo 3, después de una breve revisión de las técnicas de solución de las EDO homogéneas más simples, exploraremos la técnica de separación de variables que permite en muchos casos descomponer las EDP en un conjunto de EDO, cuya estructura desarrollaremos en el capítulo 6. Haremos la separación de variables de la ecuación de Laplace, en coordenadas cilíndricas y esféricas, que conducirá a las ecuaciones de Bessel y Legendre. Se finaliza con la clasificación de las EDP lineales en tres familias: elípticas, hiperbólicas y parabólicas, cuyas condiciones de unicidad fueron exploradas en el capítulo 2.

En el capítulo 4 deducimos algunas de las ecuaciones de uso corriente en la física matemática: la ecuación de ondas para cuerdas, membranas y sonido, y la de vibraciones en sólidos, así como la de conducción del calor, la de Poisson y la de Schrödinger, y proponemos las ecuaciones de Maxwell. Las primeras son exponentes típicas de ecuaciones hiperbólica, parabólica y elíptica. Estas ecuaciones serán allí expresadas en la forma invariante desarrollada en el primer capítulo, lo que las hace aptas para ser escritas en cualquier sistema de coordenadas curvilíneas ortogonales.

Es cierto que una muy amplia familia de ecuaciones diferenciales presenta soluciones expresables como combinaciones lineales de funciones. Esto da la idea de ampliar la noción de espacios vectoriales (en los que un vector se expresa como una combinación lineal de vectores de una base) extendiéndola hacia lo que serán espacios de funciones, o espacios de Hilbert, en los cuales los "vectores unitarios" son funciones linealmente independientes. En el capítulo 5 exploraremos los espacios de Hilbert discretos y continuos, detallando las propiedades de ortogonalidad y completez de sus infinitos ejes. Veremos cómo la idea de vector ordinario en espacios 3D se extiende para permitir la expansión de funciones en espacios abstractos, cuyo ejemplo más conocido es la serie de Fourier, el cual estudiaremos en la última parte del capítulo.

Los desarrollos del capítulo 3, donde hemos mostrado la posibilidad de descomponer las EDP en un conjunto de EDO, alcanzan en el capítulo 6 un clímax; en él demostramos que todas las EDO lineales de segundo orden tienen una arquitectura común que está compendiada en la teoría de Sturm-Liouville. El estudio que haremos en ese capítulo entrelaza ideas exploradas en capítulos anteriores, pues muestra que bajo una apropiada escogencia de condiciones de frontera y del dominio de la variable independiente, las EDO exhiben un conjunto infinito de soluciones ortogonales que corresponden a bases de un espacio de Hilbert, de análoga manera a como los vectores unitarios de la base cartesiana expanden un espacio vectorial ordinario. Veremos aquí cómo la noción de autovalores, tan cara a la mecánica cuántica y a la teoría de matrices, está asociada a la existencia de espacios de Hilbert.

Consideramos que este capítulo es el centro de esta obra, en tanto cada una de sus conclusiones ilumina, desde la teoría de espacios, el tema general de las soluciones a las EDO y aclara los temas relativos a las frecuencias naturales de oscilación de sistemas clásicos o cuánticos, como un espectro de autovalores. La teoría de Sturm-Liouville describe tanto las frecuencias específicas de oscilación de una cuerda como las frecuencias de emisión de los átomos. Después de extender estas consideraciones a las EDP, finalizamos el capítulo con un tema sugestivo: el isomorfismo entre operadores diferenciales y matrices, que está en el centro de la equivalencia matemática entre la mecánica ondulatoria de Schrödinger y la mecánica matricial de Heisenberg.

Ahora bien, puesto que muchas de las ED que utilizamos en física son inhomogéneas, es pertinente introducir métodos de solución que vayan más allá de los utilizados para las ED homogéneas y de los conocidos métodos de variación de parámetros o coeficientes indeterminados. Por ello en el capítulo 7 introducimos las funciones de Green, cuyo alcance está limitado a los casos lineales, pero cuya aplicación a los problemas físicos se extiende desde la física clásica a la cuántica, independientemente de la dimensión del espacio.

La teoría de Sturm-Liouville expresa, ciertamente, la íntima estructura de las ED lineales, pero no es fuente de métodos de solución. En el capítulo 8 implementamos una técnica bastante general, basada en expansiones en series y conocida como método de Frobenius, que permite resolver una vasta cantidad de ED lineales y homogéneas. Haremos énfasis en las ecuaciones de Bessel, Legendre, Hermite y Laguerre, y esbozaremos lo fundamental de las ecuaciones de Chebishev, hipergeométrica, hipergeométrica confluente y Mathieu. A través del capítulo navegará la idea de *familias* de EDO: las ecuaciones de Bessel, Bessel esférica y Airy, por ejemplo, pertenecen a la misma familia. Esto sugiere que a partir de la solución a una ED específica puede proponerse la correspondiente para una amplia familia de ED, conectada con ella por algún tipo de transformación. Encontraremos la aplicación de esta idea en la descripción mecánico-cuántica del oscilador armónico y del átomo de hidrógeno.

Y aquí termina la obra.

Cierto es que el tema que en ella hemos explorado es pequeño, en tanto que no incluye la teoría de grupos, el cálculo tensorial o la variable compleja. Esperamos que el lector atento comprenda que las ecuaciones físicas y sus soluciones pueden ser miradas, al menos desde su forma lineal, desde la perspectiva unificadora de la teoría de Sturm-Liouville, que proyecta su potente luz sobre teorías clásicas y cuánticas: el sonido del violín y la luz del átomo se describen con ecuaciones de similar estructura matemática. En esta teoría general y ambiciosa reside el secreto matemático de la cuantización.

Este texto es un acercamiento modesto a un tema extenso, intenso y difícil. Es testimonio de una pasión. Toda omisión en él, y cada falta de profundidad deberá imputarse, no a la brevedad de lo aquí escrito, sino a las pocas luces de quien quiso navegar en estas aguas.

Mis agradecimientos a Diego Restrepo, Carlos Yaguna y Johan Mazo, quienes en diversas épocas trabajaron en la transcripción a LaTeX de este texto, a Giovanny Atehortúa por sus dibujos, y a Gonzalo Montoya y Lorena Campuzano por su trabajo de edición y diagramación de la primera edición.

Alonso Sepúlveda Soto
Medellín, noviembre de 2009

Nota a la segunda edición

Las erratas detectadas de la primera edición han sido corregidas; se ha introducido una sección nueva sobre la ecuación de Pauli, otra sobre la ecuación de Mathieu; diversas secciones se han reorganizado, reescrito y ampliado. Varios dibujos han sido rediseñados.

Las secciones marcadas con asterisco pueden omitirse en una primera lectura sin perder la continuidad.

Alonso Sepúlveda Soto
Medellín, octubre de 2018

1

Coordenadas curvilíneas ortogonales

La física newtoniana describe los fenómenos físicos que ocurren en el espacio tridimensional, que con buena aproximación puede considerarse euclidiano. Esta física se expresa matemáticamente con el lenguaje de la geometría euclidiana y el cálculo diferencial escalar o vectorial, matemáticas que permiten explorar con facilidad las simetrías básicas del mundo.

En la descripción del movimiento de los proyectiles, son suficientes las coordenadas cartesianas. Sin embargo, si se pretende describir el movimiento planetario, por ejemplo, han de introducirse coordenadas cilíndricas o esféricas.

En este capítulo se introducen las coordenadas curvilíneas ortogonales, de las cuales las cartesianas, las polares, las cilíndricas polares y las esféricas son casos particulares. Escritas en el formalismo general de las coordenadas curvilíneas ortogonales, las leyes físicas tienen la misma forma en todos los sistemas de coordenadas en el espacio euclidiano tridimensional, independientemente de la posición del origen y del ángulo que los sistemas coordenados formen entre ellos. El cálculo vectorial en coordenadas curvilíneas es la forma más simple de describir estas invariancias de posición y orientación.

Después de estudiar los elementos de la teoría de las coordenadas curvilíneas ortogonales, se proponen las definiciones de gradiente, divergencia, rotacional y laplaciano, además de las identidades vectoriales y diádicas más simples, y de los teoremas integrales que aparecen con mayor frecuencia en la física matemática.

El capítulo incluye las definiciones de los vectores axiales y polares, las propiedades básicas de la delta de Dirac, la definición de ángulo sólido y algunos ejemplos de coordenadas curvilíneas ortogonales.

1.1. Sistemas coordenados

En el espacio euclidiano tridimensional, las coordenadas cartesianas se definen mediante las tres familias de planos $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$, perpendiculares entre sí. La intersección de los planos $x = x_0$ y $y = y_0$ genera una línea recta paralela al eje z y que pasa por el punto $(x_0, y_0, 0)$. Además, la intersección de los tres planos $x = x_0, y = y_0, z = z_0$ da lugar a un punto de coordenadas (x_0, y_0, z_0).

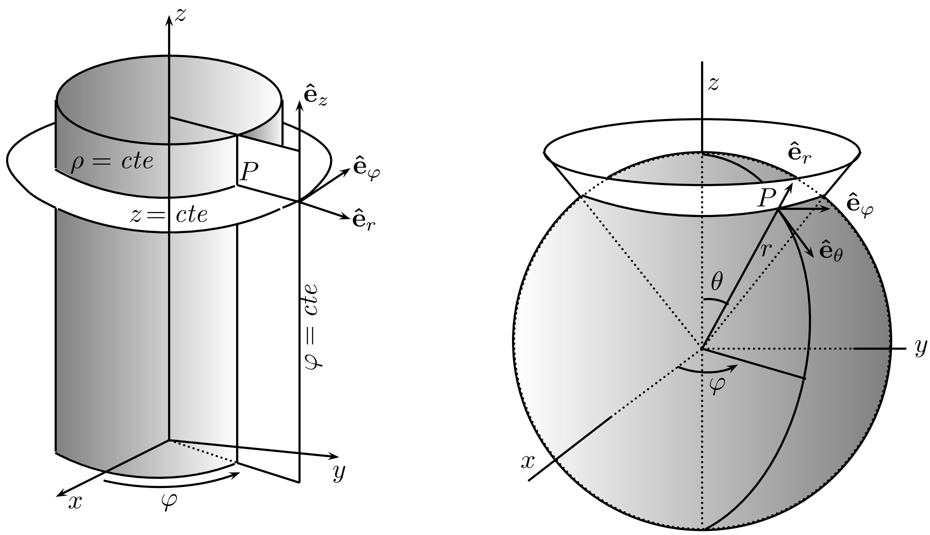


Figura 1.1. A la izquierda se muestran las coordenadas cilíndricas (ρ, φ, z), a la derecha las esféricas (r, θ, φ)

Las coordenadas *cilíndricas* de un punto P (véase figura 1.1, izquierda) se construyen con tres superficies perpendiculares: cilindros de radio ρ concéntricos, planos perpendiculares que pasan por el eje z, determinados por φ constante, y planos horizontales z constante. Las coordenadas cilíndricas de un punto son, por tanto, (ρ, φ, z). Las reglas de transformación entre coordenadas cartesianas y cilíndricas tienen la forma:

$$x = \rho \cos \varphi, \;\; y = \rho \operatorname{sen} \varphi, \;\; z = z.$$

Las coordenadas *esféricas* de un punto P (figura 1.1, derecha) se definen en términos de tres superficies: esferas concéntricas de radio r, conos con el mismo vértice determinados por θ constante y planos meridianos φ constante. Un punto tiene coordenadas (r, θ, φ), y las tres superficies son perpendiculares en cada punto. La intersección del cono y la esfera genera una circunferencia a lo largo de la cual varía solo la coordenada φ. La intersección de la esfera y el plano meridiano produce un arco de meridiano a lo largo del cual solo θ varía, y la intersección del cono y el plano genera una recta radial a lo largo de la cual solo r varía. La conexión entre coordenadas cartesianas y esféricas se escribe:

$$x = r \operatorname{sen} \theta \cos \varphi, \quad y = r \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi, \quad z = r \cos \theta.$$

Una generalización directa permite pensar en tres familias de superficies, en general curvas, que en cada punto del espacio se intersectan en ángulo recto. Estas superficies pueden describirse mediante las ecuaciones:

$$u_1 = f_1(x, y, z), \;\; u_2 = f_2(x, y, z), \;\; u_3 = f_3(x, y, z)\,.$$

De manera equivalente, si se invierten las ecuaciones anteriores, se obtiene:

$$x = x(u_i), \;\; y = y(u_i), \;\; z = z(u_i)\,.$$

Estas ecuaciones son a la vez las reglas de transformación entre coordenadas cartesianas y coordenadas curvilíneas ortogonales (véase figura 1.2).

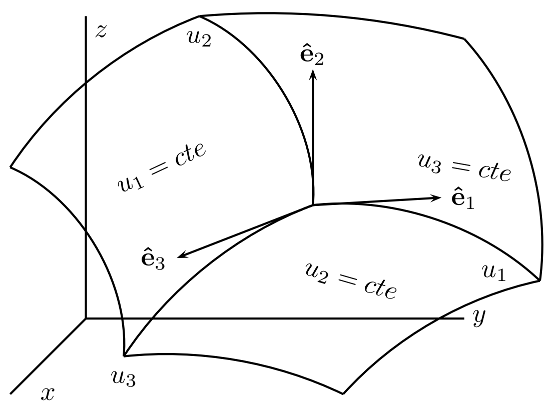


Figura 1.2. Coordenadas curvilíneas ortogonales en 3D. Las superficies curvas $u_1 = cte$ y $u_2 = cte$ se cortan formando la curva coordenada u_3, cuya tangente es $\hat{\mathbf{e}}_3$, y de modo análogo se obtienen las otras dos curvas que definen las restantes coordenadas curvilíneas

Las superficies $u_1 =$ constante y $u_2 =$ constante se intersectan en una curva a lo largo de la cual solo u_3 varía; esta curva define la coordenada u_3. Análogamente, las superficies $u_1 =$ constante y $u_3 =$ constante generan la curva u_2, y $u_2 = cte$

y $u_3 = cte$ generan la curva u_1. La intersección de las tres superficies produce un punto cuyas coordenadas son (u_1, u_2, u_3). Dado un punto (x, y, z), es posible asignarle unívocamente un conjunto (u_1, u_2, u_3) de coordenadas curvilíneas.

El sistema de coordenadas curvilíneas construido con estas superficies tiene las siguientes características:

a. Los ejes coordenados son, en general, curvas que se intersectan en ángulo recto, de modo que los vectores unitarios $\{\hat{\mathbf{e}}_i\}$, tangentes a las curvas, generan una base ortonormal tridimensional. En este texto no se consideran sistemas coordenados no ortogonales (véase Wills, 1958: cap. VIII).

b. La orientación de la base $\{\hat{\mathbf{e}}_i\}$ puede cambiar de punto a punto, preservándose su ortonormalidad.

c. El significado físico de los diferenciales de las coordenadas no es necesariamente longitud. En coordenadas esféricas, por ejemplo, hay una longitud y dos ángulos. En cilíndricas hay dos longitudes y un ángulo.

Un *campo escalar* se define asignando un valor numérico a cada punto del espacio. El valor de una cantidad *escalar* en un punto definido del espacio es invariante ante el cambio de coordenadas. Vale decir, si (x, y, z), (ρ, φ, z), (r, θ, φ) denotan el mismo punto del espacio físico, el valor que en ese punto tome, por ejemplo, la presion atmosférica, es el mismo.

Los *campos vectoriales* se definen dando en cada punto del espacio el valor de tres cantidades, conocidas como las componentes vectoriales. Aunque los vectores unitarios y los valores de cada componente sean diferentes en cada sistema de coordenadas, es cierto que el vector $\mathbf{A}$ no se altera cuando se cambia de sistema coordenado; vale decir que si $\hat{\mathbf{e}}_i, \hat{\mathbf{e}}'_i, A_i, A'_i$ son los vectores unitarios y las componentes en dos sistemas coordenados S y S', entonces:

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^{3} A_i \hat{\mathbf{e}}_i = \sum_{i=1}^{3} A'_i \hat{\mathbf{e}}'_i\,.$$

Lo anterior significa que un vector es *invariante* bajo transformaciones coordenadas. Y esto es cierto ya sea que las transformaciones vayan de un sistema cartesiano a otro cartesiano rotado respecto al primero, o de uno cartesiano a uno esférico, o en general a uno curvilíneo. Se dice igualmente que los campos escalares son invariantes bajo transformaciones coordenadas. La *teoría de transformación* (véase sección 1.2.1) se ocupa de estos temas.

De esta forma es posible escribir ecuaciones cuya forma matemática es la misma en todos los sistemas de coordenadas en el espacio tridimensional euclidiano. Por ejemplo, la ecuación de ondas escrita en la forma

$$\nabla^2 \psi - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0$$

es válida en todos los sistemas coordenados, es decir, es *invariante* en su forma bajo transformaciones coordenadas.

Las leyes físicas deben escribirse en forma invariante, con el fin de darles la libertad de ser escritas en cualquier sistema coordenado. Para que esto ocurra, cada uno de los sumandos de una ecuación debe transformarse del mismo modo, lo cual quiere decir que cada sumando es *covariante*. Todos los sistemas coordenados son buenos, ninguno de ellos goza de algún privilegio físico especial.

1.2. Nociones básicas

En las dos siguientes subsecciones se presentan los elementos de la teoría de transformación de coordenadas en espacios euclidianos. Conceptos de importancia en este contexto serán: vectores unitarios, factores de escala y jacobianos.

1.2.1. Teoría de transformación

En el espacio euclidiano es siempre posible construir un sistema coordenado cartesiano que se extienda indefinidamente; a partir de él se pueden generar múltiples sistemas coordenados, mediante la introducción de las superficies $u_i = f(x, y, z)$.

Puesto que, recíprocamente, las coordenadas x, y y z son funciones de u_i, esto es: $x = x(u_i)$, $y = y(u_i)$, $z = z(u_i)$, se puede escribir:

$$dx = \frac{\partial x}{\partial u_1}\, du_1 + \frac{\partial x}{\partial u_2}\, du_2 + \frac{\partial x}{\partial u_3}\, du_3\,,$$

$$dy = \frac{\partial y}{\partial u_1}\, du_1 + \frac{\partial y}{\partial u_2}\, du_2 + \frac{\partial y}{\partial u_3}\, du_3\,,$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u_1}\, du_1 + \frac{\partial z}{\partial u_2}\, du_2 + \frac{\partial z}{\partial u_3}\, du_3\,.$$

Estas tres ecuaciones son las componentes de la ecuación vectorial:

$$d\mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_1}\, du_1 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_2}\, du_2 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_3}\, du_3 = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_i}\, du_i\,. \tag{1.1}$$

En general, el factor $\partial\mathbf{r}/\partial u_i$ que aparece en la ecuación (1.1) es un vector no unitario que toma en cuenta la variación de $\mathbf{r}$ solo en dirección de u_i y es, por tanto, tangente a la curva coordenada u_i. Con el fin de introducir una base *normalizada* $\hat{\mathbf{e}}_i$, es decir, un conjunto de vectores *unitarios* $\hat{\mathbf{e}}_i$, se define:

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_i} = h_i \hat{\mathbf{e}}_i\,; \tag{1.2}$$

los vectores $\hat{\mathbf{e}}_i$ tienen módulo 1, y los coeficientes h_i son funciones de u_i, que serán llamadas *factores de escala*. De ahí se sigue que:

$$d\mathbf{r} = \sum_{i=1}^{3} h_i \hat{\mathbf{e}}_i du_i \,.$$

Puesto que solo se consideran bases *ortonormales* (perpendiculares y unitarias), puede escribirse, para los vectores de la base:

$$\boxed{\hat{\mathbf{e}}_i \cdot \hat{\mathbf{e}}_j = \delta_{ij}} \,. \tag{1.3}$$

Es decir, los vectores $\hat{\mathbf{e}}_i$ satisfacen las condiciones:

$$\begin{gathered} \hat{\mathbf{e}}_1 \cdot \hat{\mathbf{e}}_2 = \hat{\mathbf{e}}_2 \cdot \hat{\mathbf{e}}_3 = \hat{\mathbf{e}}_3 \cdot \hat{\mathbf{e}}_1 = 0 \,, \\ \hat{\mathbf{e}}_1 \cdot \hat{\mathbf{e}}_1 = |\hat{\mathbf{e}}_1|^2 = |\hat{\mathbf{e}}_2|^2 = |\hat{\mathbf{e}}_3|^2 = 1 \,. \end{gathered}$$

El símbolo δ_{ij}, conocido como *delta de Kronecker*, se define así: $\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$ y $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$. Dicho de otro modo, los δ_{ij} se pueden representar matricialmente como los elementos de la matriz identidad. De (1.2) se obtiene:

$$\boxed{\left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_i} \right| = h_i} \,, \tag{1.4}$$

expresión que es útil en el cálculo de los factores de escala; en consecuencia, de la ecuación (1.2), los vectores unitarios en coordenadas curvilíneas se escriben:

$$\boxed{\hat{\mathbf{e}}_i = \frac{1}{h_i} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_i}} \,. \tag{1.5}$$

Transformación de cartesianas a esféricas y cilíndricas

A. Un punto en el espacio tridimensional puede localizarse mediante las coordenadas cartesianas (x, y, z), y también mediante las coordenadas esféricas (r, θ, φ). Los dominios de las coordenadas son:

$$\begin{gathered} -\infty \leq x \leq \infty \,, \quad -\infty \leq y \leq \infty \,, \quad -\infty \leq z \leq \infty \,, \\ r \geq 0 \,, \quad 0 \leq \theta \leq \pi \,, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi \,. \end{gathered}$$

En estas expresiones, $r = |\mathbf{r}|$ es la coordenada radial, θ es la coordenada polar (o colatitud) y φ es la coordenada azimutal.

Fácilmente se deduce de la figura (1.1, derecha) que la conexión entre coordenadas cartesianas y esféricas es como sigue:

$$
\begin{aligned}
x &= r \operatorname{sen}\theta \cos\varphi, & r &= \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\
y &= r \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi, & \theta &= \cos^{-1}\left(z/\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right) \\
z &= r\cos\theta, & \varphi &= \tan^{-1}(y/x)\,.
\end{aligned}
$$

De esta manera, el vector posición puede escribirse así:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{r} &= \hat{\mathbf{i}}\,x + \hat{\mathbf{j}}\,y + \hat{\mathbf{k}}\,z \\
&= \hat{\mathbf{i}}\,r \operatorname{sen}\theta\cos\varphi + \hat{\mathbf{j}}\,r\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi + \hat{\mathbf{k}}\,r\cos\theta\,.
\end{aligned} \tag{1.6}
$$

De acuerdo con la ecuación (1.6):

- $\partial\mathbf{r}/\partial r = \hat{\mathbf{i}}\operatorname{sen}\theta\cos\varphi + \hat{\mathbf{j}}\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi + \hat{\mathbf{k}}\cos\theta$, lo que implica:

$$\left|\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial r}\right| = \sqrt{\operatorname{sen}^2\theta\cos^2\varphi + \operatorname{sen}^2\theta\operatorname{sen}^2\varphi + \cos^2\theta} = 1\,,$$

de modo que, según (1.4): $h_1 = h_r = 1$.

- $\partial\mathbf{r}/\partial\theta = \hat{\mathbf{i}}\ r\cos\theta\cos\varphi + \hat{\mathbf{j}}\ r\cos\theta\operatorname{sen}\varphi - \hat{\mathbf{k}}\ r\operatorname{sen}\theta$, por lo cual:

$$\left|\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\theta}\right| = \sqrt{r^2(\cos^2\theta\cos^2\varphi + \cos^2\theta\operatorname{sen}^2\varphi + \operatorname{sen}^2\theta)} = r\,,$$

de donde: $h_2 = h_\theta = r$.

- $\partial\mathbf{r}/\partial\varphi = -\hat{\mathbf{i}}\ r\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi + \hat{\mathbf{j}}\ r\operatorname{sen}\theta\cos\varphi$, por tanto:

$$\left|\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\varphi}\right| = \sqrt{r^2(\operatorname{sen}^2\theta\operatorname{sen}^2\varphi + \operatorname{sen}^2\theta\cos^2\varphi)} = r\operatorname{sen}\theta\,,$$

así pues, $h_3 = h_\varphi = r\operatorname{sen}\theta$. En síntesis, los factores de escala en coordenadas esféricas tienen la forma:

$$h_r = 1, \quad h_\theta = r, \quad h_\varphi = r\operatorname{sen}\theta\,. \tag{1.7}$$

Además, reemplazando los factores de escala (1.7) y $\mathbf{r}$ de (1.6), en la ecuación (1.5), los vectores unitarios en coordenadas esféricas pueden expresarse en términos de los vectores unitarios en coordenadas cartesianas, como:

$$
\begin{aligned}
\hat{\mathbf{e}}_r &= \hat{\mathbf{i}}\operatorname{sen}\theta\cos\varphi + \hat{\mathbf{j}}\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi + \hat{\mathbf{k}}\cos\theta\,, \\
\hat{\mathbf{e}}_\theta &= \hat{\mathbf{i}}\cos\theta\cos\varphi + \hat{\mathbf{j}}\cos\theta\operatorname{sen}\varphi - \hat{\mathbf{k}}\operatorname{sen}\theta \quad \text{y} \\
\hat{\mathbf{e}}_\varphi &= -\hat{\mathbf{i}}\operatorname{sen}\varphi + \hat{\mathbf{j}}\cos\varphi\,,
\end{aligned} \tag{1.8}
$$

donde $(\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_3) = (\hat{\mathbf{e}}_r, \hat{\mathbf{e}}_\theta, \hat{\mathbf{e}}_\varphi)$. Estas ecuaciones pueden invertirse algebraicamente para expresar $\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$, $\hat{\mathbf{k}}$ en términos de $\hat{\mathbf{e}}_r$, $\hat{\mathbf{e}}_\theta$, $\hat{\mathbf{e}}_\varphi$; de ahí se obtiene:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{i}} &= \hat{\mathbf{e}}_r \operatorname{sen}\theta\cos\varphi + \hat{\mathbf{e}}_\theta \cos\theta\cos\varphi - \hat{\mathbf{e}}_\varphi \operatorname{sen}\varphi\,, \\ \hat{\mathbf{j}} &= \hat{\mathbf{e}}_r \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi + \hat{\mathbf{e}}_\theta \cos\theta\operatorname{sen}\varphi + \hat{\mathbf{e}}_\varphi \cos\varphi \quad \text{y} \\ \hat{\mathbf{k}} &= \hat{\mathbf{e}}_r \cos\theta - \hat{\mathbf{e}}_\theta \operatorname{sen}\theta\,. \end{aligned} \tag{1.9}$$

En forma matricial las ecuaciones (1.8) y (1.9) pueden escribirse:

$$\boxed{\hat{\mathbf{e}} = \mathbb{A}\hat{\boldsymbol{\epsilon}}, \quad \hat{\boldsymbol{\epsilon}} = \widetilde{\mathbb{A}}\hat{\mathbf{e}}}\,, \tag{1.10}$$

donde se han definido las matrices columna esférica y cartesiana:

$$\hat{\mathbf{e}} = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{e}}_1 \\ \hat{\mathbf{e}}_2 \\ \hat{\mathbf{e}}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{e}}_r \\ \hat{\mathbf{e}}_\theta \\ \hat{\mathbf{e}}_\varphi \end{pmatrix}, \quad \hat{\boldsymbol{\epsilon}} = \begin{pmatrix} \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_1 \\ \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_2 \\ \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{i}} \\ \hat{\mathbf{j}} \\ \hat{\mathbf{k}} \end{pmatrix}, \tag{1.11}$$

junto con la matriz de transformación entre coordenadas cartesianas y esféricas:

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} \operatorname{sen}\theta\cos\varphi & \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi & \cos\theta \\ \cos\theta\cos\varphi & \cos\theta\operatorname{sen}\varphi & -\operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\varphi & \cos\varphi & 0 \end{pmatrix}, \tag{1.12}$$

cuya transpuesta es $\widetilde{\mathbb{A}}$.

En la teoría de transformación se considera que un vector es una cantidad invariante bajo transformación de coordenadas, lo que significa que el vector $\mathbf{B} = \mathbf{b}$ puede expresarse en la base esférica $\hat{\mathbf{e}}$ con componentes B, o en la base cartesiana $\hat{\boldsymbol{\epsilon}}$ con componentes b, de modo que:

$$\mathbf{B} = \widetilde{\hat{\mathbf{e}}}B = \widetilde{\hat{\boldsymbol{\epsilon}}}b = \mathbf{b}, \tag{1.13}$$

donde $\hat{\mathbf{e}}$ y $\hat{\boldsymbol{\epsilon}}$ están definidas como las columnas (1.11), cuyas transpuestas (matrices fila) son $\widetilde{\hat{\mathbf{e}}}$ y $\widetilde{\hat{\boldsymbol{\epsilon}}}$. Además, B y b son matrices columna dadas por:

$$B = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_r \\ B_\theta \\ B_\varphi \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}, \tag{1.14}$$

De (1.10) y (1.13) se sigue, reemplazando cada vez una de las primeras en la segunda, que:

$$\boxed{B = \mathbb{A}b, \quad b = \widetilde{\mathbb{A}}B}\,, \tag{1.15}$$

lo que constituye la regla de transformación de las componentes del vector **B**. Las reglas (1.10), (1.15) son válidas para la transformación de los vectores base y las componentes de vectores, de cartesianas a *cualquier* otro sistema coordenado ortogonal, y recíprocamente.

Las reglas (1.10), (1.15) garantizan la *invarianza* del vector, escrita como $\mathbf{B} = \mathbf{b}$. De (1.13), reemplazando a la izquierda $\widetilde{\hat{\mathbf{e}}}$ de (1.10) y B de (1.15) se sigue:

$$\widetilde{\mathbb{A}}\mathbb{A} = \mathbb{I},$$

de modo que la matriz $\mathbb{A}$ es ortogonal. Es fácil, además, verificar que su determinante $|\mathbb{A}|$ es 1.

B. Los dominios de las coordenadas cilíndricas son:

$$\rho \geq 0\,, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi\,, \quad -\infty \leq z \leq \infty\,.$$

La conexión entre cartesianas y cilíndricas, como sabemos, es:

$$x = \rho\cos\varphi, \;\; y = \rho\operatorname{sen}\varphi, \;\; z = z, \;\; \rho = \sqrt{x^2+y^2}, \;\; \varphi = \tan^{-1}(y/x).$$

El vector posición es, entonces:

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= \hat{\mathbf{i}}\,x + \hat{\mathbf{j}}\,y + \hat{\mathbf{k}}\,z \\ &= \hat{\mathbf{i}}\,\rho\cos\varphi + \hat{\mathbf{j}}\,\rho\operatorname{sen}\varphi + \hat{\mathbf{k}}\,\mathbf{z}\,, \end{aligned} \tag{1.16}$$

lo que permite escribir, de acuerdo con (1.6):

$$\left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \rho}\right| = h_\rho = 1, \;\; \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi}\right| = h_\varphi = \rho, \;\; \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z}\right| = h_z = 1;$$

con estos factores de escala reemplazados en (1.5) —junto con **r** de (1.16)— los vectores unitarios en cilíndricas pueden expresarse en términos de los vectores unitarios en cartesianas como:

$$\begin{pmatrix} \hat{\mathbf{e}}_\rho \\ \hat{\mathbf{e}}_\varphi \\ \hat{\mathbf{e}}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \operatorname{sen}\varphi & 0 \\ -\operatorname{sen}\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{i}} \\ \hat{\mathbf{j}} \\ \hat{\mathbf{k}} \end{pmatrix}; \tag{1.17}$$

invirtiendo estas ecuaciones se obtiene:

$$\begin{pmatrix} \hat{\mathbf{i}} \\ \hat{\mathbf{j}} \\ \hat{\mathbf{k}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\operatorname{sen}\varphi & 0 \\ \operatorname{sen}\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{e}}_\rho \\ \hat{\mathbf{e}}_\varphi \\ \hat{\mathbf{e}}_z \end{pmatrix}, \tag{1.18}$$

Nuevamente $\widetilde{\mathbb{A}}\mathbb{A} = \mathbb{I}$, $|\mathbb{A}| = 1$ y, para lograr la invarianza $\mathbf{B} = \mathbf{b}$ la regla de transformación de sus componentes es:

$$B = \mathbb{A}b, \quad b = \widetilde{\mathbb{A}}B.$$

Nota

De las ecuaciones (1.6) y (1.9) se sigue que en coordenadas esféricas: $\mathbf{r} = r\hat{\mathbf{e}}_r$. Esto demuestra que la expresión:

$$\mathbf{r} = \hat{\mathbf{e}}_1 u_1 + \hat{\mathbf{e}}_2 u_2 + \hat{\mathbf{e}}_3 u_3 \tag{1.19}$$

no es válida en estas coordenadas, pues daría lugar a la siguiente expresión, que es incorrecta, incluso dimensionalmente:

$$\mathbf{r} = r\hat{\mathbf{e}}_r + \theta\hat{\mathbf{e}}_\theta + \varphi\hat{\mathbf{e}}_\varphi \, .$$

La ecuación (1.19) es válida *solo* en coordenadas cartesianas, donde $u_i = x_i$. No obstante, es cierto que *cualquier* vector $\mathbf{A}$, *diferente* de $\mathbf{r}$, en coordenadas curvilíneas ortogonales, se escribe:

$$\mathbf{A} = \sum_i \hat{\mathbf{e}}_i A_i = \hat{\mathbf{e}}_1 A_1 + \hat{\mathbf{e}}_2 A_2 + \hat{\mathbf{e}}_3 A_3 \, .$$

PROBLEMAS:

1. Demuestre que en coordenadas cilíndricas: $\mathbf{r} = \rho\hat{\mathbf{e}}_\rho + z\hat{\mathbf{e}}_z$.
2. Escriba en coordenadas esféricas el vector $\mathbf{A} = xy\hat{\mathbf{i}} - x\hat{\mathbf{j}} + 3x\hat{\mathbf{k}}$, y exprese A_r, A_θ y A_φ en términos de r, θ, φ.
3. Considere la transformación de coordenadas: $x = 2uv$, $y = u^2 - v^2$, $z = w$. Demuestre que el nuevo sistema de coordenadas *no* es ortogonal.
4. Considere la transformación de coordenadas: $x = 2uv$, $y = u^2 - v^2$, $z = w$. Demuestre que el nuevo sistema de coordenadas es ortogonal.
5. El sistema de coordenadas cilíndricas elípticas (σ, τ, z) se define mediante las relaciones: $x = 2A\cosh\sigma\cos\tau$, $y = 2A\,\mathrm{senh}\,\sigma\,\mathrm{sen}\,\tau$, $z = z$. Demuestre que este sistema de coordenadas es ortogonal y que $h_\sigma^2 = h_\tau^2 = 4A^2(\,\mathrm{senh}^{\,2}\sigma + \mathrm{sen}^{\,2}\tau)$, $h_z = 1$.

1.2.2. Jacobianos y transformaciones

En componentes, la ecuación (1.1) puede escribirse:

$$dx_i = \sum_j \frac{\partial x_i}{\partial u_j}\, du_j = \sum_j J_{ij}\, du_j \, , \tag{1.20}$$

donde se ha definido:

$$\boxed{J_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial u_j}}\,. \tag{1.21}$$

En forma matricial, la ecuación (1.20) se escribe $d\mathsf{x} = \mathbb{J}\, d\mathsf{u}$, ecuación en la que $d\mathsf{x}$ y $d\mathsf{u}$ son los siguientes vectores columna:

$$d\mathsf{x} = \begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{pmatrix}, \quad d\mathsf{u} = \begin{pmatrix} du_1 \\ du_2 \\ du_3 \end{pmatrix}.$$

En la ecuación $d\mathsf{x} = \mathbb{J}\, d\mathsf{u}$, el símbolo $\mathbb{J}$ representa la matriz de transformación de los diferenciales de coordenadas, cuyos elementos son $J_{ij} = \partial x_i / \partial u_j$. El determinante $|\mathbb{J}|$, conocido como *jacobiano*, ha de ser diferente de cero para que la transformación sea invertible.

También, con $\mathbf{r} = \hat{\mathbf{i}}x + \hat{\mathbf{j}}y + \hat{\mathbf{k}}z$, la ecuación (1.5) toma la forma:

$$\hat{\mathbf{e}}_i = \frac{1}{h_i}\left(\hat{\mathbf{i}}\frac{\partial x}{\partial u_i} + \hat{\mathbf{j}}\frac{\partial y}{\partial u_i} + \hat{\mathbf{k}}\frac{\partial z}{\partial u_i}\right), \tag{1.22}$$

que es la regla de transformación entre los vectores unitarios. Introduciendo la notación $(\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_1, \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_2, \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_3) = (\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}})$, el vector posición es $\mathbf{r} = \sum_j \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_j x_j$, tal que la ecuación (1.5) se escribe:

$$\boxed{\hat{\mathbf{e}}_i = \sum_j \frac{\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_j}{h_i}\frac{\partial x_j}{\partial u_i} = \sum_j a_{ji}\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_j}\,, \tag{1.23}$$

donde, por definición:

$$\boxed{a_{ji} = \frac{1}{h_i}\frac{\partial x_j}{\partial u_i}}\,. \tag{1.24}$$

Introduciendo los vectores columna:

$$\hat{\mathbf{e}} = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{e}}_1 \\ \hat{\mathbf{e}}_2 \\ \hat{\mathbf{e}}_3 \end{pmatrix}, \quad \hat{\boldsymbol{\epsilon}} = \begin{pmatrix} \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_1 \\ \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_2 \\ \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_3 \end{pmatrix},$$

y considerando a_{ij} como elementos de la matriz $\mathbb{A}$ (a_{ji} son elementos de su transpuesta), puede escribirse (1.23) en forma matricial como:

$$\hat{\mathbf{e}} = \widetilde{\mathbb{A}}\boldsymbol{\epsilon}\,. \tag{1.25}$$

La matriz $\widetilde{\mathbb{A}}$ es la transpuesta de $\mathbb{A}$. Es cierto, de acuerdo con (1.21) y (1.24), que $J_{ji} = a_{ji}h_i$, o matricialmente:

$$\mathbb{J} = \mathbb{A}\mathbb{H}\,, \tag{1.26}$$

expresión en la que la matriz $\mathbb{H}$ tiene la forma:

$$\mathbb{H} = \begin{pmatrix} h_1 & 0 & 0 \\ 0 & h_2 & 0 \\ 0 & 0 & h_3 \end{pmatrix} . \tag{1.27}$$

Ahora bien, un postulado básico de la teoría de transformación asegura la invariancia del elemento de línea $d\mathbf{r}$, y en general de cualquier vector, bajo transformación de coordenadas. En consecuencia, los módulos de los vectores son también invariantes. Es cierto que en coordenadas cartesianas $dl^2 = \sum_i dx_i dx_i$, y que en coordenadas curvilíneas:

$$dl^2 = d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = \sum_{jk} h_j h_k \hat{\mathbf{e}}_j \cdot \hat{\mathbf{e}}_k du_j du_k = \sum_{jk} h_j h_k du_j du_k \delta_{jk}\,.$$

La invariancia de dl^2 asegura que su valor es el mismo en el sistema coordenado original y en el nuevo; esto es:

$$\sum_i dx_i dx_i = \sum_{jk} h_j h_k du_j du_k \delta_{jk}\,,$$

y puesto que, según (1.21), $dx_i = \sum_j J_{ij} du_j$, se sigue, del renglón anterior:

$$\sum_{ijk} J_{ij} J_{ik} du_j du_k = \sum_{jk} h_j h_k du_j du_k \delta_{jk}\,,$$

de donde se concluye que:

$$\sum_i J_{ij} J_{ik} = h_j^2\,.$$

En forma matricial, esta ecuación se escribe: $\widetilde{\mathbb{J}}\mathbb{J} = \mathbb{H}^2$, donde $\widetilde{\mathbb{J}}$ es la transpuesta de $\mathbb{J}$. De $\widetilde{\mathbb{J}}\mathbb{J} = \mathbb{H}^2$ y $\mathbb{J} = \mathbb{A}\mathbb{H}$ se deduce que:

$$\widetilde{\mathbb{A}}\mathbb{A} = \mathbb{I}\,, \tag{1.28}$$

de modo que la matriz $\mathbb{A}$ es *ortogonal*: $\widetilde{\mathbb{A}} = \mathbb{A}^{-1}$.

De $\widetilde{\mathbb{A}}\mathbb{A} = \mathbb{I}$ se sigue, tomando el determinante, con $|\widetilde{\mathbb{A}}| = |\mathbb{A}|$: $|\mathbb{A}| = \pm 1$.

Ahora bien, los tipos posibles de transformación son los siguientes:

a. De un S cartesiano a otro S' cartesiano *rotado*, *reflejado* o *invertido*.

b. De un S cartesiano a un S' *curvilíneo.*

En el caso de rotación, o del paso de cartesianas a curvilíneas, puesto que la matriz de transformación ha de contener la identidad, entonces $|\mathbb{A}| = +1$. Para reflexión e inversión: $|\mathbb{A}| = -1$.

Es directo demostrar la conexión entre el producto triple escalar $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c}$ y un determinante:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c} = a_1(b_2c_3 - b_3c_2) + a_2(b_3c_1 - b_1c_3) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix},$$

y de acuerdo con (1.21), se sigue, con el auxilio de (1.5):

$$|\mathbb{J}| = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_2} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_3} = h_1 h_2 h_3 \, \hat{\mathbf{e}}_1 \cdot \hat{\mathbf{e}}_2 \times \hat{\mathbf{e}}_3 \, ,$$

que es diferente de cero pues $\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_3$ no son coplanares. De hecho, puesto que $\hat{\mathbf{e}}_1 \cdot \hat{\mathbf{e}}_2 \times \hat{\mathbf{e}}_3 = 1$, se sigue que $|\mathbb{J}| = h_1 h_2 h_3$.

1.3. El símbolo de Levi-Civita

Este símbolo se define mediante el producto vectorial entre los elementos unitarios de una base ortogonal tridimensional:

$$\boxed{\hat{\mathbf{e}}_i \times \hat{\mathbf{e}}_j = \sum_{k=1}^{3} \epsilon_{ijk} \hat{\mathbf{e}}_k} \, . \tag{1.29}$$

La cantidad ϵ_{ijk} es el *símbolo de Levi-Civita*, definido como $\epsilon_{123} = 1$, y antisimétrico para cada pareja de índices contiguos. Es decir:

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1, & \text{para permutación par;} \\ -1, & \text{para permutación impar y} \\ 0, & \text{para índices repetidos.} \end{cases}$$

En forma explícita, la ecuación (1.29) equivale a las siguientes relaciones:

$$\hat{\mathbf{e}}_1 \times \hat{\mathbf{e}}_2 = \hat{\mathbf{e}}_3, \quad \hat{\mathbf{e}}_2 \times \hat{\mathbf{e}}_3 = \hat{\mathbf{e}}_1, \quad \hat{\mathbf{e}}_3 \times \hat{\mathbf{e}}_1 = \hat{\mathbf{e}}_2 \, ,$$

válidas en coordenadas curvilíneas ortonormales en espacios 3D euclidianos. Una forma algebraica bastante simple, que contiene todas sus propiedades, es:

$$\epsilon_{ijk} = \frac{1}{2}(i - j)(j - k)(k - i) \, .$$

De la identidad $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C}$ se sigue, reemplazando $\mathbf{A} = \sum \mathbf{A}_i \hat{\mathbf{e}}_i$, etc. y teniendo en cuenta la ecuación (1.29):

$$\sum_{ijlm} \left[\sum_k \epsilon_{ijk} \epsilon_{lmk} - \delta_{il}\delta_{jm} + \delta_{im}\delta_{jl} \right] A_j B_l C_m \hat{\mathbf{e}}_i = 0 \,,$$

de modo que se satisface la siguiente propiedad:

$$\boxed{\sum_{k=1}^{3} \epsilon_{ijk} \epsilon_{lmk} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}} \,. \tag{1.30}$$

Esta ecuación puede escribirse como:

$$\sum_{k=1}^{3} \epsilon_{ijk} \epsilon_{lmk} = \begin{vmatrix} \delta_{il} & \delta_{im} \\ \delta_{jl} & \delta_{jm} \end{vmatrix} \,. \tag{1.31}$$

Es fácil demostrar que:

a. $\sum_{jk=1}^{3} \epsilon_{ijk} \epsilon_{ljk} = \sum_j \begin{vmatrix} \delta_{il} & \delta_{ij} \\ \delta_{jl} & \delta_{jj} \end{vmatrix} = 2\delta_{il}$.

b. $\sum_{ijk=1}^{3} \epsilon_{ijk} \epsilon_{ijk} = 6$.

c. $\sum_{j=1}^{3} \delta_{ij} \epsilon_{ijk} = 0$.

La ecuación (1.31) es la suma en k (con $n = k$) de la expresión:

$$\epsilon_{ijk} \epsilon_{lmn} = \begin{vmatrix} \delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{jl} & \delta_{jm} & \delta_{jn} \\ \delta_{kl} & \delta_{km} & \delta_{kn} \end{vmatrix} \,.$$

En efecto, con $n = k$ y sumando sobre k:

$$\begin{aligned} \sum_k \epsilon_{ijk} \epsilon_{lmk} &= \sum_k [\delta_{il}\delta_{jm}\delta_{kk} + \delta_{im}\delta_{jk}\delta_{kl} + \delta_{jl}\delta_{km}\delta_{ik} - \delta_{kl}\delta_{jm}\delta_{ik} \\ &\quad - \delta_{km}\delta_{jk}\delta_{il} - \delta_{jl}\delta_{im}\delta_{kk}] \\ &= 3\delta_{il}\delta_{jm} + \delta_{im}\delta_{jl} + \delta_{jl}\delta_{im} - \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{jm}\delta_{il} - 3\delta_{jl}\delta_{im} \\ &= \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl} \,. \end{aligned}$$

El símbolo de Levi-Civita puede utilizarse para escribir determinantes. Es cierto, entonces, que:

$$|A| \epsilon_{ijk} = \sum_{lmn} \epsilon_{lmn} a_{il} a_{jm} a_{kn} \,.$$