Ulrich Felgner

Philosophie der Mathematik in der Antike und in der Neuzeit

Birkhäuser

Philosophie der Mathematik in der Antike und in der Neuzeit

Ulrich Felgner

Philosophie der Mathematik in der Antike und in der Neuzeit

Birkhäuser

Ulrich Felgner
Mathematisches Institut
Universität Tübingen
Tübingen, Deutschland

ISBN 978-3-030-35933-1 ISBN 978-3-030-35934-8 (eBook)
https://doi.org/10.1007/978-3-030-35934-8

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

00A30, 01A05, 01A20, 01A35-60, 03A05, 03B30, 03E30, 51-03

Birkhäuser

Planung/Lektorat: Sarah Annette Goob
Birkhäuser ist ein Imprint der eingetragenen Gesellschaft Springer Nature Switzerland AG und ist ein Teil von Springer Nature.
Die Anschrift der Gesellschaft ist: Gewerbestrasse 11, 6330 Cham, Switzerland

Vorwort

Dies ist ein Buch eines Mathematikers über ausgewählte Themen aus der Philosophie der Mathematik. Diese Themen liegen alle im Umkreis einer einzigen Frage, die zwar ganz zentral für die Mathematik ist, aber dennoch keine eigentlich mathematische Frage ist, sondern eine Frage philosophischer Natur. Es ist die *Frage nach den Quellen, aus denen wir schöpfen, wenn wir mathematische Sätze beweisen.* Mit dieser Frage hängt die Frage nach der Seinsweise mathematischer Gegenstände zusammen. Ich möchte anhand der überlieferten Texte besprechen, wie diese und verwandte Fragen von der Antike an bis in die Gegenwart diskutiert und beantwortet wurden. Ich möchte insbesondere die Antworten, die *Platon, Aristoteles, Euklid, Descartes, Locke, Leibniz, Hume, Tschirnhaus, Kant, Dedekind, Frege, Hilbert* und andere gegeben haben, sorgfältig und kritisch darstellen. Dabei werde ich auch die verschiedenen Standpunkte, die als *Finitismus, Konstruktivismus, Empirismus, Psychologismus, Logizismus, Platonismus, Strukturalismus, Formalismus* etc. bezeichnet werden, behandeln. Ausgewählt habe ich nur solche Beiträge von Mathematikern und Philosophen, die sich ernsthaft um eine umfassende Antwort auf die oben gestellte Frage bemüht haben.

Auch wenn vieles, was hier zur Darstellung kommt, dem Kenner gut bekannt sein wird, so denke ich, daß hier dennoch manche Zusammenhänge offengelegt werden, die bisher wenig oder gar nicht beachtet im Dunkel der Geschichte ruhten, und daß Erklärungen gegeben werden, die neu sind und zu einer tieferen Einsicht in die Denkart der Mathematiker in den verschiedenen Epochen führen.

Zum ersten Male habe ich 1980 in Tübingen eine Vorlesung über *„Philosophie der Mathematik“* gehalten, und von da an in größeren Abständen immer wieder, zuletzt im Winter-Semester 2011/2012 am Tübinger *Forum Scientiarum.* Danach habe ich in langer und intensiver Arbeit an meinen Notizen gearbeitet, um sie in die vorliegende Form bringen zu können.

Die Gespräche mit Studenten, Doktoranden und Kollegen im Anschluß an die Vorlesungen haben mir sehr geholfen. Ihnen allen möchte ich sehr herzlich danken. Aber auch meinen Kollegen, mit denen ich Briefe ausgetauscht habe, die manche Teile meiner ausgearbeiteten Notizen gelesen haben, die mir kritische Fragen gestellt haben und mich zu manchen Korrekturen angeregt haben, möchte ich vielmals

danken, insbesondere Frau *Laura Carrara*, Frau *Anke Thyen und Herrn Wilfried Sieg*, die mir als Gesprächspartner zur Verfügung standen. Ein ganz besonderer Dank geht an Herrn *Walter Purkert* und an den Gutachter, die das ganze Manuskript sorgfältig gelesen haben, mich auf Irrtümer aufmerksam gemacht haben und Korrekturen und auch Ergänzungen vorgeschlagen haben.

Meiner Frau Cornelia danke ich sehr herzlich für ihren Beistand in allen Phasen der Entstehung dieses Buches.

Ich danke schließlich dem Birkhäuser-Verlag für die Bereitwilligkeit, mit der er auf meine Wünsche eingegangen ist, sowie für die sorgfältige und schöne Ausstattung des Buches.

Tübingen
im Februar 2020

Ulrich Felgner

Einleitung

„Les Mathématiciens ont autant besoin d'estre philosophes que les philosophes d'estre Mathematiciens.“
Gottfried Wilhelm Leibniz in einem Brief vom 13./23. März 1699 an Nicolas Malebranche.

Das Thema dieses Buches soll *„Philosophie der Mathematik“* sein. „Philosophie der Mathematik“ wird dabei verstanden als ein Bemühen um die Klärung solcher Probleme und Fragen, die die Mathematik selber aufwirft, aber mit ihren eigenen Methoden nicht lösen bzw. beantworten kann.

Was ist dabei das *Philosophische* an diesem Bemühen? *Philia tou sophou* (Φιλία τοῦ σοφοῦ) ist im Griechischen ‚die Liebe zur Einsicht, zum Wissen, zum Verstehen‘, und daraus ist das Wort „Philosophie“ abgeleitet. In der „Philosophie der Mathematik“ wird es also um ein engagiertes, ernsthaftes (liebendes) Bemühen gehen, das jeweils betrachtete Problem um seiner selbst willen zu verstehen, um schließlich nach einer kritischen Prüfung zu einer Überzeugung zu gelangen, die man vertreten und verteidigen kann.

Was sind die vornehmsten Fragen, die sich in der Philosophie der Mathematik immer wieder gestellt haben und die auch heute noch umstritten sind oder jedenfalls noch nicht umfassend beantwortet sind? Dies sind wohl immer noch die Fragen nach dem *ontologischen Status* der mathematischen Objekte und dem *epistemologischen Status* der mathematischen Theoreme.

Mit dem Wort *Ontologie* bezeichnet man die Untersuchungen über das, was „ist“ (was da ist, was existiert) und in welcher Weise es „ist“. Im Griechischen ist *to on* (τὸ ὄν) „das Seiende“, das vom Verb *einai* (εἶναι): „sein, vorhanden sein, bestehen“ abgeleitet ist. In der Ontologie wird also die „Seinsweise“ der Objekte besprochen.

Status ist ein lateinisches Wort und bedeutet etwa „der Stand, der Zustand, die Stellung, die Lage“. Der ‚ontologische Status‘ eines Objektes ist demnach die Stellung des Objektes in Bezug auf das Sein, also das, was über den Zustand seines Seins ausgesagt werden kann.

Im Griechischen ist *epistêmê* (ἐπιστήμη) „das Verständnis, das Wissen“ und *Epistemologie* ist die Wissenschaftslehre, die Erkenntnistheorie.

In der Mathematik selber ist es nicht üblich zu fragen, welcher Natur die mathematischen Objekte sind. Wir wollen diese Frage aber dennoch stellen und fragen, was beispielsweise die Zahlen „sind“, in welcher Weise sie „sind“. Sind es Objekte, die ein „Dasein“ haben, oder sind es nur sprachliche Gebilde, also Namen, die gar nichts benennen? Bei *Platon* kann man lesen:

> „*Wir setzen doch voraus, daß die Zahlen alle ein Da-Sein haben?*“
> PLATON: *‚Sophistes‘,* 238a–b.

und bei *Hans Hahn* das Gegenteil:

> „*Und weil wir Zahlen als eigene Wesenheiten nicht brauchen, … so wollen wir solche Wesenheiten auch nicht annehmen.*“
> HANS HAHN: *‚Überflüssige Wesenheiten (Occams Rasiermesser)‘,* 1930 (Nachdruck 1988, S. 34).

Bei *Aristoteles* heißt es sehr viel subtiler:

> „*Womit wir uns also zu beschäftigen haben ist nicht die Frage, ob es die Zahlen gibt, sondern wie es sie gibt*“.
> ARISTOTELES: *‚Metaphysik‘*, Buch XIII,1, 1076a36.

Nicht einmal über die Frage, ob die Zahlen als Gegenstände (Dinge oder Wesenheiten) existieren, scheint Einigkeit zu herrschen.

Aber handelt denn nicht jede mathematische Theorie von Objekten einer jeweils bestimmten Art, um Sachverhalte, die zwischen diesen Objekten bestehen, aufzudecken? Die Arithmetik beispielsweise handelt doch von den ganzen Zahlen und möchte die im Bereich dieser Zahlen gültigen Gesetze auffinden. Die Geometrie handelt von den Punkten, Geraden, Dreiecken, Kreisen, Winkeln etc. und möchte herausfinden, welche Sachverhalte hier gelten. Für jede mathematische Theorie stellen sich also zwei grundsätzliche Fragen:

> *In welchem Sinne existieren die Objekte der verschiedenen mathematischen Theorien und aus welchen Quellen schöpfen wir, wenn wir Sätze (Theoreme) beweisen?*

Die erste Frage betrifft die *Ontologie* und die zweite Frage die *Epistemologie.*

Aristoteles hatte im 6. Buch seiner *‚Metaphysik‘* (1025b8–9) gefordert, daß in jeder Wissenschaft zuerst der Objektbereich anzugeben ist, d. h. der Bereich der Dinge, von denen die Wissenschaft handeln soll. Im Falle der Mathematik stellt sich demnach gleich zu Beginn die Frage, mit welchen Dingen sie sich befassen will. Existieren die Gegenstände der reinen Mathematik? Wo ist der Ort ihrer Realität? Sind sie Gegenstände einer idealen Welt oder unserer realen Umwelt? Sind sie Wesenheiten, die wir in unserem Geist konstruiert haben, oder sind sie lediglich Fiktionen, die innerhalb der verschiedenen mathematischen Theorien „existieren“ genauso wie beispielsweise Schneewittchen nur im Märchen „existiert“? Woher beziehen sie ihr „Sein“? Oder gibt es diese Gegenstände gar nicht? Sind sie nur sprachliche Gebilde? Ist die Mathematik nur *„ein Spiel im luftleeren Raum“,* wie es *Thomas Mann* in seinem Roman *‚Königliche Hoheit‘* (Berlin, 1909) etwas sarkastisch beschrieben hat?

Über welche Dinge spricht man eigentlich in der Mathematik, da man die mathematischen Gegenstände doch gar nicht sehen kann, ja sie sich (in der Regel) nicht einmal anschaulich vorstellen kann und überdies gar nicht wissen kann, ob es sie irgendwo gibt? Gehören sie einem Geisterreich oder einem Totenreich an, über das man nur in einer wunderbaren, geheimnisvollen Sprache reden kann? Gehören sie einer anderen Welt an, und ist der Prozeß des Erkennens mathematischer Sachverhalte nur ein Wiedererinnern (*anamnêsis,* ἀνάμνησις) der Seele an vorgeburtliches Wissen, wie es die Orphiker, die Pythagoräer und *Platon* gelehrt haben? Oder gibt es all die genannten mathematischen Gegenstände auch dort nicht und ist das Manipulieren der Mathematiker mit all den schönen verschnörkelten Zeichen nur ein einziges Abrakadabra ohne jeden Bezug auf irgendwelche Wirklichkeiten?

Ob es überhaupt „mathematische Gegenstände" gibt, scheint sehr zweifelhaft zu sein, denn niemand kann sagen, wo es sie gibt. Aber dennoch existieren die mathematischen Gegenstände für jedermann, und sie sind *„allen Mathematikern in allen Völkern und in allen Zeiten zugänglich",* wie *Edmund Husserl* einmal schrieb.[1] Die Gegenstände der Mathematik scheinen eine ideale Objektivität zu haben, aber es ist dennoch ziemlich unklar, was das heißen soll. Irgendwie greifbar sind diese Gegenstände doch alle nicht.

Hinter all diesen Fragen steht die Tatsache, daß die Mathematik die meisten ihrer Begriffe und Gegenstände nicht durch Abstraktion aus der realen Umwelt gewinnt, *sondern sie sich selbst gibt,* in dem sie unter Verwendung von Kalkülen und Axiomensystemen lediglich die Gesetze und Regeln aufstellt, wie mit diesen Dingen umgegangen werden darf. Es wird nur der Formalismus entworfen, aber die Gegenstände, über die der Formalismus vorgibt zu sprechen, werden nicht aufgewiesen. – Noch einmal: Wo ist der Ort ihrer Existenz?

Die Geometrie und die Arithmetik der natürlichen Zahlen, so wie sie von den Mathematikern der Antike aufgebaut wurden, sind noch unmittelbar in der natürlichen Umwelt verankert. Aber es ist trotzdem gar nicht klar, ob es all diese abstrakten oder idealisierten Objekte irgendwo wirklich gibt und in welchem Sinne es sie gibt.

Diese Problematik wird noch deutlicher, wenn wir die höheren Objekte der Mathematik betrachten.

Im ausgehenden Mittelalter bildete sich langsam die Vorstellung von *negativen Zahlen* heraus (*Leonardo von Pisa*, *Nicolas Chuquet, Michael Stifel* und andere) und im frühen 16. Jahrhundert auch die der *imaginären Zahlen* (*Geronimo Cardano*, *Rafael Bombelli*). Im ausgehenden 17. Jahrhundert kamen dann noch die *infinitesimalen Größen* (*Bonaventura Cavalieri*, *Gottfried Wilhelm Leibniz*, *Isaac Newton* und andere) und im 19. Jahrhundert die *idealen Zahlen* der algebraischen Zahlentheorie (*Ernst Eduard Kummer*, *Richard Dedekind*) und die *transfiniten Alephs* (*Georg Cantor*) hinzu, etc. All diese Zahlen konnten nicht mehr durch Abstraktion

---

[1] *Edmund Husserl*: *„Die Frage nach dem Ursprung der Geometrie als intentional-historisches Problem"*, Beilage III des Werkes *‚Die Philosophie in der Krisis der europäischen Menschheit'*. Eine separate, posthume Publikation dieser Beilage hat *E. Fink* 1939 veranlaßt; Ein Nachdruck erschien in Band VI der Husserliana, 1962. Das Zitat findet sich dort auf Seite 368.

aus der natürlichen Umwelt gewonnen werden; sie konnten nur mit Hilfe von Kalkülen und Axiomensystemen eingeführt werden. Einen direkten Bezug auf die Gegenstände unserer natürlichen Umwelt haben sie alle nicht. – Woher haben all diese mathematischen Gegenstände ihr Dasein? Gibt es sie „wirklich“ und was ist ihre „Natur“, oder haben sie nur das „schattenhafte“ Dasein, das sie einem Kalkül verdanken?

Schauen wir doch einmal nach, was berühmte Mathematiker in früheren Jahrhunderten dazu zu sagen hatten. Als prominente Beispiele habe ich Äußerungen über die imaginäre Einheit $\sqrt{-1}$, über die infinitesimalen Größen und über den Begriff des geometrischen Punktes ausgewählt.

Rafael Bombelli (1526–1573) konnte sagen, wie man das Zeichen $\sqrt{-1}$ in Rechnungen verwenden darf, aber die *Natur* dieser „Zahl“ konnte er nicht erklären. *Geronimo Cardano* (1501–1576) schrieb (in seiner *‚Ars magna Arithmetica‘,* Problem 38), daß $\sqrt{-1}$ weder +1 noch −1 sein könne, sondern gewissermaßen etwas *„drittes von verborgener Natur“* (quaedam tertia natura abscondita). *Gottfried Wilhelm Leibniz* (1648–1716) schrieb 1702 über die imaginäre Einheit (cf. *Leibniz, Werke* (*Gerhard*, Herausgeber) Band 5, S. 357):

> „Itaque elegans et mirabile effugium reperit in illo Analyseas miraculo, idealis mundi monstro, pene inter Ens et non-Ens Amphibio, quod radicem imaginariam appellamus “.
>
> [*(Der göttliche Geist) hat eine feine und wunderbare Ausflucht gefunden in jenem Wunder der Analysis, dem Monstrum der realen Welt, fast ein Amphibium zwischen Sein und Nicht-Sein, welches wir imaginäre Einheit nennen.*]

Lazare Nicolas Marguerite Carnot (1753–1823) hat in seinen *‚Réflexions sur la Métaphysique du calcul Infinitésimal‘* (Paris 1797) die imaginären Zahlen als *„hiéroglyphes de quantités absurdes“* bezeichnet (op. cit. S. 53). Selbst noch für *Jacob Steiner* (1796–1863) waren imaginäre Zahlen, *„Gespenster“*, die einem *„Schattenreich der Geometrie“* angehören, wie *Felix Klein* in seinen *‚Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert‘* Teil 1, S. 130, berichtet hat. Der irische Philosoph und Theologe *George Berkeley* (1685–1753) hat sich einmal sehr ähnlich ausgedrückt, und die infinitesimalen Größen der Analysis als *„Geister verstorbener Größen“* („Ghosts of departed Quantities“, *‚The Analyst‘,* § 35) bezeichnet. – Können nicht einmal die Mathematiker selber klar sagen, womit sie umgehen?

Oskar Perron gab in seinem Buch über die *‚Nichteuklidische Elementargeometrie der Ebene‘* (Teubner-Verlag, Stuttgart 1962, S. 11) die folgende Definition für den Begriff des Punktes: *„Ein Punkt ist genau das, was der intelligente, aber harmlose, unverbildete Leser sich darunter vorstellt.“* Muß man sich mit solchen Ausflüchten zufrieden geben? Ist es sogar in der Geometrie schwierig, wenn nicht gar unmöglich, den Grundbegriff des Punktes klar zu fassen?

Auch die Frage, was beispielsweise die natürlichen Zahlen sind und ob oder wie es sie gibt, war noch vor gut hundert Jahren unbeantwortet. Der Mathematiker *Gottlob Frege* schrieb dazu 1899:

> *„Es ist doch eigentlich ein Skandal, daß die Wissenschaft noch über das Wesen der Zahl im unklaren ist. Daß man noch keine allgemein anerkannte Definition der Zahl hat, möchte noch angehen, wenn man wenigstens in der Sache übereinstimmte. Aber selbst darüber, ob die Zahl eine Gruppe von Dingen oder eine mit Kreide auf einer schwarzen Tafel von Men-*

> *schenhand verzeichnete Figur sei, ob sie etwas Seelisches, über dessen Entstehung die Psychologie Auskunft geben müsse, oder ob sie ein logisches Gebilde sei, ob sie geschaffen sei und vergehen könne, oder ob sie ewig sei, selbst darüber hat die Wissenschaft noch nichts entschieden. Ist das nicht ein Skandal? Ob ihre Lehrsätze von jenen aus kohlensaurem Kalke bestehenden Gebilden oder von unsinnlichen Gegenständen handeln, weiß die Arithmetik nicht. ... Die Wissenschaft weiß also nicht, welchen Gedankeninhalt sie mit ihren Lehrsätzen verbindet; sie weiß nicht, womit sie sich beschäftigt. … Ist das nicht ein Skandal?"* (G. *Frege* im Vorwort seiner Schrift *‚Über die Zahlen des Herrn H. Schubert'.*)

Frege selbst glaubte eine Lösung des Problems gefunden zu haben. Die *„Null"* war für ihn die Klasse aller unerfüllbaren Begriffe, die *„Eins"* die Klasse aller Begriffe, unter die jeweils genau ein Objekt fällt, die *„Zwei"* die Klasse aller Begriffe, unter die genau zwei verschiedene Objekte fallen, etc. Die natürlichen Zahlen verstand *Frege* demnach als *logische Gebilde.* Mit einer noch nie dagewesenen Gründlichkeit bewies *Frege* die fundamentalen Sätze der Arithmetik. Aber im Sommer 1902 bemerkte *Bertrand Russell* in *Freges* Theorie einen grundsätzlichen Fehler, der das ganze Gedankengebäude zum Einsturz brachte (vergl. dazu Kap. 14). Auch *Frege* war es demnach nicht gelungen, die Frage zu beantworten, was eigentlich die Zahlen „sind", wo es sie gibt und in welchem Sinne es sie gibt.

Wir müssen etwas ernüchtert feststellen, daß bis in die Neuzeit hinein alle Versuche zu sagen, was eigentlich Zahlen sind und was ihr ontologischer Status ist, erfolglos waren. Ganz genauso erfolglos waren alle Versuche zu sagen, was Punkte, Linien und Flächen sind und was all die übrigen Objekte der Mathematik sind, wo es sie gibt und in welchem Sinne es sie gibt. Seit der Antike ist es den Mathematikern offenbar nicht geglückt, solche Fragen befriedigend zu beantworten.

Das deutet wohl darauf hin, daß es korrekte Antworten auf all diese Fragen gar nicht gibt, und daß es ein Reich mathematischer Gegenstände weder außerhalb von uns noch in uns (in unserer Seele oder in unserem Geist) in irgendeiner Weise gibt. *Wir haben nur die Formalismen, die Kalküle und Axiomensysteme, in denen beschrieben wird, wie mit den Zeichen, die die fraglichen Objekte bezeichnen sollen, umgegangen werden kann.*

Im Prinzip ist das auch ausreichend, um Mathematik betreiben zu können. Aber niemand ist leichten Herzens bereit, den dabei geforderten *nominalistischen Standpunkt* einzunehmen. *Aus vielen Gründen ist es wünschenswert, Gegenstände zu haben, die von den Zeichen der formalen Systeme bezeichnet werden, um nicht die ganze mathematische Arbeit auf den Umgang mit Zeichenreihen formaler Systeme (also der Syntax formaler Systeme) beschränken zu müssen, sondern in Gedanken mit mathematischen Objekten umgehen zu können.*

Ist ein solcher Wunsch erfüllbar? Welchen Preis muß man zahlen, wenn man sich einen derartigen Wunsch erfüllt? Es stellen sich Fragen über Fragen. Hinter all diesen Fragen steht die eine große Frage:

– Welchen *ontologischen Status* haben die mathematischen Objekte?

Es geht in diesem Buch auch um die Frage, wie wir mathematische Erkenntnisse gewinnen, wie wir dazu gelangen, etwas über die mathematischen Gegenstände und ihre Beziehungen untereinander zu „wissen“. Darf sich ein Beweis auf die sinnliche Anschauung stützen? – oder auf die reine Anschauung (im Sinne *Kants)*? – oder nur auf das mühsame schrittweise logische Schließen und das begriffliche Argumentieren? Wie beweist man die Existenz eines mathematischen Gegenstandes? Muß man ihn mit seinem Namen nennen können? oder muß man für ihn eine mentale Konstruktion haben? oder reicht es, die Annahme der Inexistenz zu einem Widerspruch zu führen? Offenbar hängt die Antwort davon ab, wie man die Seinsweise der mathematischen Gegenstände auffaßt und welche Mittel zur Erkenntnisgewinnung zur Verfügung stehen.

– Die zweite Frage lautet also: welchen *epistemologischen Status* haben die mathematischen Theoreme?

Sind die mathematischen Sätze apodiktische Wahrheiten, was auch heute noch oft behauptet wird, oder haben sie überhaupt etwas mit Wahrheit zu tun? Ist die Mathematik überhaupt eine *Wissenschaft* (*epistêmê* (ἐπιστήμη), scientia), die eine vorgegebene Welt von Gegenständen untersucht, oder ist sie nicht vielmehr eine *Kunst* (*technê* (τέχνη), ars), die sich mit der Entwicklung von Formalismen und Kalkülen befaßt?

Ich wiederhole das angesprochene Problem:

In welchem Sinne existieren die Objekte der verschiedenen mathematischen Theorien und aus welchen Quellen dürfen wir schöpfen, wenn wir Sätze (Theoreme) beweisen?

Seit der Antike haben sich viele Mathematiker und viele Philosophen zu den genannten Fragen geäußert, wobei ihre Äußerungen oft erheblich voneinander abwichen. Viele begnügten sich mit einer leichtfertig dahingeworfenen Antwort und nur wenige bemühten sich, ihre Antwort daraufhin zu prüfen, ob sie das Phänomen des mathematischen Denkens erklären kann und ob sie als Grundlage der Mathematik dienen kann.

Über einige Antworten, die im Laufe der Geschichte gegeben worden sind, möchte ich in diesem Buch berichten. Die kritische Auseinandersetzung mit den Antworten von *Platon*, *Aristoteles*, *Augustinus*, *René Descartes, Gottfried Wilhelm Leibniz*, *John Locke*, *Immanuel Kant*, *Bernard Bolzano*, *Richard Dedekind, Gottlob Frege*, *Bertrand Russell*, *Ludwig Wittgenstein*, *David Hilbert, Kurt Gödel* und anderen wird uns sensibel machen für die Probleme, um die es geht. Das soll uns schließlich dazu führen, den möglichen Antworten auf die gestellten Fragen näher zu kommen und den heute üblichen Aufbau der Mathematik auf mengentheoretischer Grundlage tiefer zu verstehen.

Die Frage nach der Seinsweise der mathematischen Gegenstände wurde zwar schon in der Antike gestellt, ist aber bis heute relevant geblieben. Insbesondere ist die Frage nach der Seinsweise der endlichen und unendlichen Mengen, der Wahrheit des Auswahlaxioms, der Existenz „unerreichbar großer“ überabzählbarer Kardinalzahlen, etc. immer noch aktuell. Für die Schöpfer der Mengenlehre (*Bernard Bolzano, Georg Cantor, Ernst Zermelo* und andere) waren Begriffsumfänge immer Mengen, also auch „Dinge“, die im Denken (der Menschen oder der omniscienten

Götter) oder in einer idealen Welt ein Dasein haben. Dieses Verständnis des Mengenbegriffs führte zur Eroberung des Reiches der unendlichen Mengen, das *David Hilbert* mit einem Paradies verglichen hatte, und das zur heutigen strukturalistischen Auffassung der Mathematik führte. Dieses Verständnis des Mengenbegriffs führte aber auch zu den bekannten Antinomien der Mengenlehre (*Burali-Forti* 1897, *Zermelo-Russell* 1900/1901, etc.) und zum Grundlagenstreit zu Beginn des 20. Jahrhunderts. Wir müssen einen Ausweg aus diesem Dilemma finden.

Mit der Frage nach der Seinsweise der mathematischen Objekte sind viele andere Fragen verknüpft. Beispielsweise darf man fragen, ob es denn überhaupt von Nutzen ist, in der Mathematik von der Existenz mathematischer Objekte (die in irgendeinem Sinne ein „Dasein" haben) auszugehen. Wäre das Leben leichter, wenn man alle Metaphysik aus der Mathematik verbannen würde und den reinen Nominalismus vertreten würde? – Es ist sicherlich nützlich, einmal auszuloten, welche Konsequenzen der *nominalistische Standpunkt* in der Mathematik hat. Genauso nützlich ist es auszuloten, welche Vorteile ontologische Annahmen bringen. Soll es ein Ziel in der Mathematik sein, mit möglichst wenigen (oder gar keinen) ontologischen Annahmen auszukommen (*parsimonia ontologiae*) oder ist es nicht sinnvoller, eine möglichst reichhaltige Welt mathematischer Dinge bereitzustellen (*abundantia ontologiae*)? Was ist der Preis, den wir zu zahlen haben, wenn wir ontologische Annahmen machen, und was gewinnt man, wenn man sie macht? – Das auszuloten gelingt allerdings nur unter Verwendung der Mathematischen Logik, so wie sie im 20. Jahrhundert ausgearbeitet wurde.

Im 20. Jahrhundert entstand auch der Begriff der *„Mathematischen Theorie"*. In einer derartigen Theorie ist *alles* niedergelegt, was beim Aufbau einer mathematischen Disziplin nötig ist. Alles, was aus Sicht der Mathematik über die Natur der mathematischen Gegenstände, ihrer Seinsweise und ihrem epistemologischen Status zum Betreiben von Mathematik relevant ist, ist hier ausdrücklich niedergelegt. Man kann also innerhalb derartiger Theorien Mathematik betreiben, ohne mit philosophischen Problemen in Berührung zu kommen. Wenn man jedoch begründen will, warum die jeweiligen Theorien bedeutsam sind und universelle Akzeptanz beanspruchen dürfen, warum die zugrunde gelegte Logik der ersten (oder gar der zweiten) Stufe adäquat ist und warum die Theorien jeweils „wahr" oder jedenfalls „richtig" (oder korrekt, bzw. widerspruchsfrei) sind, und welche übergeordneten (außermathematischen) Probleme in diesen Theorien behandelt werden können, dann sind philosophische Reflexionen immer noch unumgänglich.

Von den Themen, die wir in diesem Buch behandeln wollen, sind jetzt viele genannt worden und wir können in die Durchführung eintreten.

Inhaltsverzeichnis

Teil III Philosophie der Mathematik im 19. und beginnenden 20. Jahrhundert

Teil I
Philosophie der Mathematik in der Antike

Wir besprechen drei Entwürfe für eine *Ontologie* und *Epistemologie* der Mathematik.

Der älteste Entwurf stammt von *Platôn*: Die mathematischen Gegenstände gehören der Welt der Ideen an. Das Erkennen der fundamentalen mathematischen Wahrheiten gelingt der Seele und dem Geist durch Erinnern an ihre vorgeburtliche Teilhabe an der Welt der Ideen. Wir berichten darüber in Kap. 2.

Ein zweiter Entwurf stammt von *Aristotelês*: Die mathematischen Grundbegriffe sind an die Objekte der sinnlich wahrnehmbaren Welt gebunden. In der Mathematik studiert man daher die Objekte der sinnlich wahrnehmbaren Welt, aber man studiert sie nur im Hinblick auf ihre Anzahlen oder ihre geometrischen Formen usw. Wir berichten darüber in Kap. 3.

Einen dritten Entwurf haben die Mathematiker selber ausgearbeitet. Es ist der „axiomatische Aufbau" einer mathematischen Theorie. Wir behandeln in Kap. 4 den Begriff der *Axiomatik,* so wie er sich in den ‚*Elementen*' *Euklids* findet.

Vorher wollen wir in Kap. 1 über die Entstehung der Mathematik im antiken Griechenland berichten. Damit wollen wir einige charakteristische Merkmale der Mathematik hervorheben und deutlich machen, wieso die Mathematik ontologische und epistemologische Probleme aufwirft.

In den beiden Kap. 5 und 6 besprechen wir die Probleme, die sich im Umgang mit dem Unendlichen ergeben. Dazu gehen wir in Kap. 5 auf die *finitistische Position* der griechischen Mathematiker ein und berichten in Kap. 6 über die *Paradoxien des Unendlichen*, so wie sie von *Zenon* aufgestellt wurden und danach von *Aristoteles* und den Philosophen im Mittelalter diskutiert wurden.

Kapitel 1
Der Begriff der Mathematik

Wir wollen in diesem einleitenden Kapitel eine der frühesten mathematischen Entdeckungen behandeln, nämlich die Entdeckung der Existenz *inkommensurabler Größen* durch die Pythagoräer vor etwa zweieinhalbtausend Jahren.

Mit dieser Entdeckung entstand etwas Neuartiges, das die Griechen mit dem Wort *„Mathematik"* bezeichneten. Wir prüfen, worin das Neuartige gegenüber der älteren ägyptischen und babylonischen Arithmetik und Geometrie besteht. Wir werden auch auf die ursprüngliche, umgangssprachliche Bedeutung des Wortes „Mathematik" eingehen. Insbesondere wollen wir deutlich machen, daß diese neuartige Mathematik ontologische und epistemologische Probleme aufwirft, die es zuvor noch nicht gab.

1.1 Die Entdeckung inkommensurabler Größen

Wir wollen also mit der Entdeckung inkommensurabler Größen beginnen. Diese Entdeckung stammt aus der Frühzeit der Mathematik, etwa aus der Zeit um 470/450 vor unserer Zeitrechnung (v.u.Z.). Es war eine Zeit, in der die griechische Kultur zu einer überaus reichen Blüte kam. Kurz zuvor, in den Schlachten bei Marathon (490 v.u.Z.), Sálamis, Himera (480 v.u.Z.) und Platää (479 v.u.Z.), waren die feindlichen Heere der Perser und Karthager vernichtend geschlagen worden und dieser Sieg, den die Griechen eher ihrer Tugend (der *aretê*, ἀρετή) und ihrem Opfermut für das Gemeinwesen denn ihrer militärischen Stärke zuschrieben, machte sie stolz und selbstbewußt. Griechenland wurde zu einer politisch bedeutsamen Region. Es setzte ein wirtschaftlicher Aufschwung ein, der eine kulturelle Blüte nach sich zog. Es kam die Zeit der großen Tragödien-Dichter

Aischylos (525–455), Sophokles (497–405), Euripides (485–406)

und der (vorsokratischen) Naturphilosophen

U. Felgner, *Philosophie der Mathematik in der Antike und in der Neuzeit*,
https://doi.org/10.1007/978-3-030-35934-8_1

PARMENIDES von Elea (515–445), EMPEDOKLES von Akragas (ca. 500–430), ZENON von Elea (490–?), ANAXAGORAS von Klazomenai (ca. 498–427) und anderen.

In dieser Zeit wurde im Kreis der pythagoräischen Mathematiker eine sensationelle Entdeckung gemacht, die wir heute sehr verkürzt als Beweis der Irrationalität von $\sqrt{2}$ wiedergeben. Damit wird die Entdeckung aber nur unvollkommen beschrieben. Wir wollen etwas genauer auf das Resultat und seine Hintergründe eingehen.

Der Beweis der Irrationalität von $\sqrt{2}$ geht vermutlich auf den Mathematiker *Hippasos* (Ἵππασος) zurück, der in Metapont, einer achäischen Kolonie am Golf von Tarent (Süditalien), ca. 50 km westlich von Tarent, geboren wurde (vergl. dazu *K.v. Fritz*, op. cit. 1945/1965). *Hippasos* gehörte zur Gemeinschaft der Pythagoräer. *Pythagoras* von Samos (ca. 570/560 – 480 v.u.Z.) hatte diese Gemeinschaft in Kroton (Süditalien) etwa 520 v.u.Z. gegründet. Es war eine religiös-philosophische Gemeinschaft, die in einen inneren Kreis (den Esoterikern, ἐσωτερικοί) und einen äußeren Kreis (den Exoterikern, ἐξωτερικοί) gegliedert war.

Die Mitglieder des inneren Kreises weihte *Pythagoras* in seine tieferen weltanschaulichen Lehren ein. Er regte sie auch zu eigenen Forschungen an, die sie zu Ergebnissen und Einsichten führen sollten, die die vorgetragenen Lehren bestätigen, begründen und erweitern sollten. Ihnen war es also vergönnt, die Lehren auf dem Wege des Verstehens zu erlernen. Sie wurden deshalb auch „Mathêmatikoi“ (μαθηματικοί) genannt.[1] *Hippasos* gehörte zu diesem inneren Kreis der „Mathematiker“.

Den Mitgliedern des äußeren Kreises teilte *Pythagoras* ohne nähere Begründungen nur die leichter faßbaren Regeln seiner Lehre mit. Ihnen war es nur vergönnt, die Lehre auf dem Wege des Zuhörens zu erlernen. Sie wurden deshalb auch „Akousmatikoi“ (ἀκουσματικοί) genannt.

Die Forschungen der Mitglieder des inneren Kreises betrafen im Wesentlichen die orphisch-pythagoräische Lehre vom harmonischen Aufbau der Welt. Diese Lehre besagt, daß die Welt aus der ungeordneten, gestaltlosen und eigenschaftslosen Urmasse, dem Chaos (χάος), entstanden sei und daß es ein Gott gewesen sei, der aus dem Chaos die wohlstrukturierte, harmonisch geordnete Welt geschaffen habe. Die Forschungen führten die Pythagoräer zu dem vertieften Verständnis, daß

> *„in diesem Weltall alles in harmonischer Weise nach Zahl und Proportion geordnet sei“* (IÁMBLICHOS: ‚De vita Pythagorica liber‘, [XII] 58).

Die *harmonische* Ordnung zeigte sich nach *Pythagoras* und seinen Schülern dort, wo die einzelnen Teile in einfachen, ganzzahligen Verhältnissen angeordnet sind. Insofern haben die Pythagoräer davon gesprochen, *daß alles Zahl sei*. Der Pythagoräer *Philolaos* aus Kroton (er lebte um 400 v.u.Z.) beschrieb diese grundlegende Überzeugung mit den folgenden Worten:

---

[1] Das Verb „manthánein“ (μανθάνειν) bedeutet ganz allgemein „lernen“, und zwar „lernen durch Nachdenken“, im Unterschied zu „lernen durch Üben“ und „Lernen durch Erfahrung“. Wir werden weiter unten dieses Wort noch ausführlich besprechen.

„Und in der Tat hat ja alles, was man erkennen kann, eine Zahl. Denn ohne sie läßt sich nichts erfassen oder erkennen“ (cf. H. Diels-W. Kranz: *‚Die Fragmente der Vorsokratiker‘*, I, S. 408, Fragment 4).

Bei *Aristoteles* lesen wir in seiner *‚Metaphysik‘*, Buch A, 986a:

„Und da sie (die Pythagoräer) *sahen, daß die Eigenschaften und Verhältnisse der musikalischen Harmonien durch Zahlen bestimmt sind, und da es ihnen schien, daß auch alle anderen Dinge ihrer ganzen Natur nach den Zahlen nachgebildet und die Zahlen im ganzen Universum das erste sind, so meinten sie, die Elemente der Zahlen seien die Elemente aller Dinge und der ganze Himmel sei Harmonie und Zahl.“*

Die natürlichen Zahlen und ihre Verhältnisse sind also nach Ansicht der Pythagoräer der wichtigste Schlüssel zum Verständnis der Welt und ihrer Struktur und Ordnung.

Im Bereich der Musik entdeckten sie beispielsweise, daß die wohlklingenden Intervalle, die heute Oktave, Quinte und Quarte genannt werden, durch die einfachen Zahlverhältnisse 1:2, 2:3 und 3:4 bestimmt sind. Diese Zahlverhältnisse geben an, wie sich die entsprechenden nicht-stillgelegten Abschnitte der klingenden Saite zueinander verhalten. Die Pythagoräer erweiterten das System dieser harmonischen Intervalle durch den (pythagoräischen) Ganzton 8:9 und die etwas zu große (pythagoräische) große Terz 64:81. Die harmonische große Terz, die durch das Verhältnis 4:5 gegeben ist, nahmen sie nicht in ihr Tonsystem auf, da es ihnen nicht gelang, diese Terz in zwei gleichgroße Ganztonschritte zu zerlegen, die ebenfalls durch Zahlverhältnisse bestimmt sind (ein solcher Ganzton[2] wäre lediglich durch die mittlere Proportionale x zwischen 4/5 und 1 bestimmt: $\frac{4}{5}:x = x:1$).

Auch in ihren Untersuchungen im Bereich der Geometrie und im Bereich der Arithmetik stießen die Pythagoräer immer wieder auf Strecken, die nur als mittlere Proportionalen beschreibbar sind. In vielen Fällen gelang es nicht, diese Strecken als Verhältnisse natürlicher Zahlen darzustellen.

Daß dies in der Regel auch gar nicht gelingen kann, konnten schließlich die Pythagoräer einwandfrei beweisen. Es war vermutlich *Hippasos* von Metapont, der (etwa in den Jahren um 470/450 v.u.Z.) bewies, daß nicht einmal die mittlere Proportionale x zwischen den beiden Strecken der Längen 1 und 2 als Verhältnis natürlicher Zahlen dargestellt werden kann. Etwas umformuliert bewies er: Seite und Diagonale eines Quadrates werden nicht von einem gemeinsamen Maß gemessen, oder mit anderen Worten:

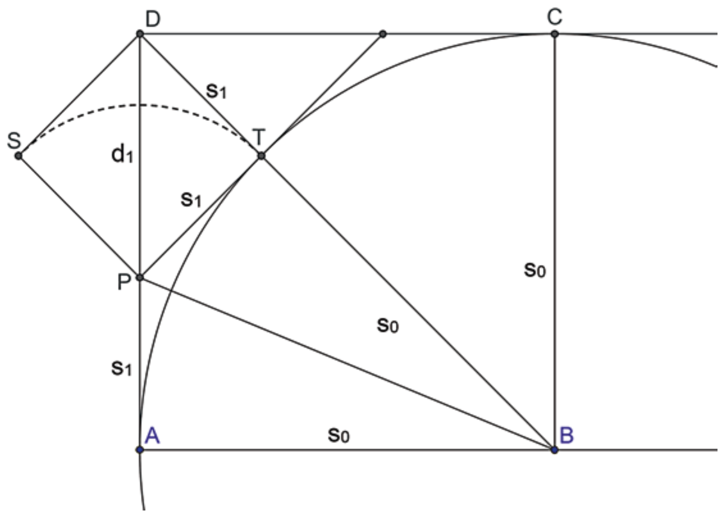
[2] Ein solcher „mitteltöniger“ Ganzton $\sqrt{\frac{4}{5}}$ (zusammen mit der harmonischen Terz $\frac{4}{5}$) wurde erst im ausgehenden Mittelalter (Ramis de Pareja, 1482) in das Tonsystem eingefügt. Das so entstandene „mitteltönige Tonsystem“ löste das alte pythagoräische Tonsystem ab. Dabei wurde allerdings auch die (pythagoräische) reine Quint 2/3 durch die mitteltönige Quint $\sqrt[4]{\frac{1}{5}}$ zusammen mit einer „Wolfsquint“ ersetzt. Erst in der Mitte des 19. Jahrhunderts wurde die „mitteltönige Stimmung“ durch die „gleichstufige Stimmung“ mit dem immer gleichen Halbtonschritt $\sqrt[12]{\frac{1}{2}}$ ersetzt.

Satz: *Das Verhältnis der Längen von Diagonale und Seite eines Quadrates ist nicht mit natürlichen Zahlen ausdrückbar; es ist irrational* (ἄρρητος).

Der ursprüngliche Beweis dieses Satzes ist leider nicht überliefert. Wir geben eine plausible Rekonstruktion, die *Otto Toeplitz* (in *'Die Entwicklung der Infinitesimalrechnung',* Springer-Verlag, Berlin 1949, S. 4–5) gegeben hat.

Notation. Die Strecke mit den Endpunkten A und B bezeichnen wir mit AB. $AB \equiv CD$ soll besagen, daß die beiden Strecken AB und CD gleich lang (also „kongruent") sind.

Beweis. Wir betrachten ein Quadrat mit den Eckpunkten A,B,C,D, der Seite $s = AB$ und der Diagonalen $d = BD$. Wenn die Längen der Strecken s und d doch in einem nennbaren (oder ausdrückbaren) Verhältnis stehen sollten, d. h. im Verhältnis zweier natürlicher Zahlen n und m, $s{:}d = n{:}m$, dann wäre mit $g = \frac{1}{n}s = \frac{1}{m}d$ offenbar $s = ng$ & $d = mg$. Im Prozeß der Wechselwegnahme (ἀνθυφαίρεσις) müßte man dann nach endlich vielen Schritten auf die Strecke g stoßen. Wir wollen prüfen, ob das der Fall ist.



Wir setzen $s_0 = s$, $d_0 = d$. Der Prozeß der Wechselwegnahme führt zunächst auf die Strecken $s_1 = d_0 - s_0$, $d_1 = s_0 - s_1$. Sei T der Punkt auf der Diagonalen zwischen B und D derart, daß BT und AB gleich lang sind, und sei P ein Punkt auf der Seite AD zwischen A und D so, daß die Strecke PT senkrecht auf der Diagonalen BD steht.

Dann sind die Dreiecke $\Delta(B,T,P)$ *und* $\Delta(B,A,P)$ kongruent, da sie beide rechtwinklig sind und gleiche Hypotenusen BP und eine gleichgroße Kathete $s_0 = AB \equiv BT$ haben. Also sind die Dreiecke kongruent, woraus $AP \equiv PT$ folgt. Da der Winkel $\angle$(D,T,P) ein rechter und $\angle$(A,D,B) ein halber rechter ist, ist das Dreieck $\Delta(D,T,P)$ offenbar gleichschenklig, also $s_1 = d_0 - s_0 = DT \equiv TP \equiv PA$.

Wir spiegeln das Dreieck $\Delta(D,T,P)$ an der Geraden DP (der Bildpunkt von T sei S) und erhalten ein Quadrat D,T,P,S mit der Seite $s_1 = d - s$ und der Diagonalen $d_1 = s - s_1$. Auch s_1 und d_1 sind Vielfache von g, und wir können die Konstruktion, die wir am Quadrat A,B,C,D durchgeführt haben, am Quadrat D,T,P,S wiederholen. Wir bemerken aber noch, daß s_1 kleiner als die Hälfte von s ist und ebenfalls d_1 kleiner als die Hälfte von d ist.

Wir können die geschilderte Konstruktion ad infinitum wiederholen, indem wir

$$s_{n+1} = d_n - s_n, \qquad d_{n+1} = s_n - s_{n+1},$$

bilden. All diese Strecken sind ebenfalls positive ganzzahlige Vielfache von g und deshalb größer als g. Da sie aber zugleich in jedem Schritt kleiner als die Hälfte der vorangegangenen Strecke sind, können sie nach endlich vielen Schritten kleiner als jede beliebig vorgegebene Strecke gemacht werden, insbesondere auch kleiner als g. Das ist ein Widerspruch!

In einem Quadrat können also die Länge der Diagonalen und die Länge ihrer Seiten in keinem nennbaren (oder ausdrückbaren) Verhältnis stehen: ihr Verhältnis ist *irrational* (unausdrückbar, ἄρρητος)! – Q.E.D.

Das war eine sensationelle Entdeckung! Das Dogma der Pythagoräer, *„daß in diesem Weltall alles in harmonischer Weise nach Zahl und Proportion geordnet sei"* (siehe oben), war damit widerlegt worden, was zu äußerst heftigen Auseinandersetzungen im Kreis der Pythagoräer führte. Für die weitere Entwicklung der Geometrie (und der Mathematik schlechthin) war das Ergebnis von allergrößter Bedeutung.

Wenn man sich vorstellt, daß (im obigen Beweis) die Striche alle mit Tinte oder Bleistift auf ein Blatt Papier – oder wie in der Antike üblich: mit einem dünnen Stab auf eine mit feinem Sand bestreute Tafel, die man *abax* (ἄβαξ) oder *abakion* (ἀβάκιον) nannte – gezeichnet werden sollen, dann kann man die Konstruktion der Quadrate nur so lange iterieren, wie man die Punkte und Linien noch voneinander unterscheiden kann. Die Frage, ob es ein gemeinsames Maß gibt, kann man offenbar *nicht empirisch* überprüfen.

Um sicher zu stellen, daß der Prozeß der Wechselwegnahme durchführbar und ad infinitum fortgesetzt werden kann, müssen die auftretenden Geraden alle existieren, d. h., man muß sie alle noch unterscheiden können, und das heißt, daß die auftretenden Geraden alle keine Breite haben dürfen.

Es war in der Geschichte der Geometrie bis dahin noch nie nötig gewesen, die Frage zu stellen, wie breit geometrische Geraden sein dürfen, aber jetzt stellte sich diese Frage erstmals und die Antwort lautete, daß sie überhaupt keine Breite haben dürfen. Ganz genauso stellte sich die Frage, wie dick Punkte sein dürfen, und die Antwort lautete, daß sie keine Ausdehnung haben dürfen.

Damit ergab sich aber auch als Konsequenz, daß die Frage, ob Seite und Diagonale eines Quadrates kommensurabel sind, offenbar nicht auf der Grundlage sinnlicher Wahrnehmung (Empirie) beantwortet werden kann. Aber, wenn man annimmt, daß die Linien allesamt *nur Länge*, aber *keine Breite* haben, dann erkennt man, daß der oben beschriebene Prozeß der Wechselwegnahme *ad infinitum* fortgesetzt werden kann und nicht abbricht, also auch auf kein gemeinsames Maß führt! Es gibt also kein gemeinsames Maß. Daher sind Diagonale und Seitenlinie eines Quadrates *inkommensurabel.*

Auf der Grundlage einer Geometrie mit ausdehnungslosen Punkten, breitenlosen Geraden etc. gibt es also Größen, für die man überhaupt kein gemeinsames Maß finden kann. *Aristoteles* schrieb dazu im 1. Buch seiner *‚Metaphysik'* (I,2, 983a15) und ähnlich in seiner *‚Zweiten Analytik'* (I, 71b27):

„Es muß ja allen, die den Grund noch nicht begriffen haben, wunderbar erscheinen, daß selbst die kleinste Größe kein gemeinschaftliches Maß sein kann".

Vermutlich haben die Pythagoräer damals auch erkannt, daß in jedem regelmäßigen 5-Eck Diagonale und Seite inkommensurabel sind. Eine Rekonstruktion eines solchen Beweises hat *Kurt von Fritz* (1945/1965, op. cit.) gegeben.[3]

Das entscheidend Neue an der Argumentation der Pythagoräer war, daß sie sich nicht auf die sinnlich wahrnehmbaren Punkte, Linien, Flächen und Körper beziehen konnte, sondern sich auf idealisierte Punkte (ohne Ausdehnung), idealisierte Linien (ohne Breite), idealisierte Flächen (ohne Dicke) beziehen mußte. Von solchen idealisierten Punkten, Geraden, Flächen und Körpern war in der älteren ägyptisch-babylonischen Geometrie und auch bei *Thales* (ca. 624–548/545 v.u.Z.) nie die Rede gewesen. Die griechischen Geometer sprachen aber von nun an fast nur noch von diesen idealisierten Objekten. Auch *Euklid* (ca. 340–270 v.u.Z.) begann die berühmten *‚Elemente'* (geschrieben um 300 v.u.Z.) mit den Definitionen:

Σημεῖόν ἐστιν, οὗ μέρος οὐθέν.	[Punkt ist, was keine Teile hat],
Γραμμὴ δὲ μῆκος ἀπλατές,	[Linie ist breitenlose Länge],
Ἐπιφάνεια δέ ἐστιν,	[Fläche ist, was allein Länge
ὃ μῆκος καὶ πλάτος μόνον ἔχει.	und Breite hat], etc.

Es entstand eine Geometrie, die von Dingen handelt, die man weder sehen noch fühlen kann und die nur für das Denken existieren. Auf empirischem Wege läßt sich nicht herausfinden, ob eine geometrische Aussage wahr oder falsch ist, sondern allein durch das Denken mit den Mitteln der Dialektik.

Die ältere ägyptische und babylonische Arithmetik und Geometrie bestand weitgehend aus einer Sammlung von Methoden zur Lösung praktischer Probleme. Die Korrektheit der vorgeschlagenen Lösungs-Methoden wurde an vielen Beispielen erfahren und damit auf *induktivem* Wege als richtig und allgemeingültig vermutet. Zum Aufbau einer „theoretischen Geometrie" war es nicht gekommen. Die arithmetischen und geometrischen Begriffe traten nur als Adjektive (der Umgangssprache) auf und wurden zum Sprechen über Sachverhalte in der realen Welt benutzt. Abstrakte Objekte, die einem *deduktiven* Beweisverfahren unterliegen, wurden in der ägyptisch-babylonischen Arithmetik und Geometrie nicht gebildet. Das war der

[3] Siehe dazu auch *Wilbur R. Knorr* (1975), op. cit., und *Árpád Szabo* (1969), op. cit., S. 277–287.

griechischen Mathematik vorbehalten und wir haben soeben in dem ausführlich diskutierten Beispiel die Geburtswehen dieser neuen Mathematik miterlebt [vergl. dazu *O. Neugebauer*, op. cit., insbesondere Seite 120 und 122].

1.2 Der Begriff der ‚Mathematik'

Die neu entstandene *deduktive* (!) Arithmetik und Geometrie wurde sehr bald schon mit dem Etikett *„Mathematik"* versehen. Wir fragen uns, was dieses Wort eigentlich (dem ursprünglichen, umgangssprachlichen Wortsinne nach) bedeutet. Welche Bedeutung hatte das Wort, bevor es zum Oberbegriff für Arithmetik, Algebra, Geometrie etc. wurde?

In der griechischen Umgangssprache wurden die Unterrichtsfächer häufig als *Mathêmata* (τὰ μαθήματα) bezeichnet. Das Verb *‚manthanein'* (μανθάνειν) bedeutet *„lernen"*, und zwar *„lernen durch (argumentative) Belehrung"* im Gegensatz zum *„Lernen durch (sinnliche) Erfahrung"*. Das aus diesem Verb abgeleitete Substantiv *mathêma* (μάθημα), oder im Plural *mathêmata* (μαθήματα), bezeichnet demnach den Gegenstand (bzw. die Gegenstände) des Lernens und Lehrens (cf. *Kurt von Fritz* 1960, op. cit.). *Mathêsis* (μάθησις) ist das *„verständige Lernen"*, der *„Erwerb von Wissen"*.

Bruno Snell (op. cit., S. 72 ff.) weist darauf hin, daß bereits in vorplatonischer Zeit *manthanein* (μανθάνειν) die Bedeutung von *„sich geistig etwas zu eigen machen"* hatte. Das Verb ist vom Verb *„lernen durch üben"* (*didaskesthai,* διδάσκεσθαι) zu unterscheiden.

Das griechische Wort *manthanein* (μανθάνειν) hat die indogermanische Wurzel „mendh-" (= geistig erregt sein, seinen Sinn auf etwas richten, denken). Dieselbe Wurzel hat

- im Deutschen das Wort *‚mahnen'* (d. h. in Erinnerung bringen),
- im Englischen das Wort *‚mind'* (d. h. gedenken),
- im Lateinischen das Wort *‚mens'* (d. h. das Denkvermögen, der Verstand, das Gewissen (= das mahnende Innere)) und
- im Sanskrit das Wort *‚man'* (= denken, meinen) und die daraus abgeleiteten Substantive *‚manas'* (= der innere Sinn, Geist) und *‚mantra'* (=ein Wort, das, während es rezitiert wird, den Geist an die Inhalte des Wortes bindet und ihn insofern vor anderen Gedanken schützt).

Die *Mathêmata* waren ganz allgemein die wissenschaftlich betriebenen Unterrichtsfächer Rhetorik, Musik, Arithmetik, Geometrie, Astronomie, Optik etc. In dieser sehr allgemeinen Bedeutung wurde das Wort *‚Mathêma'* immer wieder bei *Aristophanes* (z. B. *‚Aves'* 380, *‚Nubes'* 1231), *Thukydides* (II,39), *Platon* (*‚Sophistés'* 219c, *‚Tímáios'* 88b, *‚Politeia'* 504–505) und anderen gebraucht. Aber das Wort verlor im Laufe der Zeit seine allgemeine Bedeutung und wurde schließlich nur noch zur Bezeichnung der wissenschaftlich betriebenen Fächer Arithmetik und Geometrie verwendet.

Wie bereits oben angedeutet wurde, waren bei den Pythagoräern die „Mathematikoi“ diejenigen, die die Lehre ihres Meisters auf dem Wege des Verstehens (des Nachdenkens, Überprüfens, Verifizierens) erlernen durften. Das spektakulärste Resultat der Mathematikoi war die Aussage über die Existenz inkommensurabler Größen. Dieses Resultat führte in den folgenden Jahrzehnten und Jahrhunderten zu einer gründlichen Umgestaltung der *Geometrie auf axiomatischer Grundlage* (*Euklid*), und zum Aufbau (in allerersten Ansätzen) einer *„reellen Analysis“* (*Eudoxos*, *Archimedes* und andere). All das trug dazu bei, daß schließlich nur noch die Unterrichtsfächer Arithmetik, Algebra und Geometrie als „mathematische Lehrfächer“ bezeichnet wurden.

Das Wort ‚Mathematik‘ ist selten in andere Sprachen übersetzt worden. CASSIODOR (ca. 490–583) hat es in seinen *‚Institutiones‘* mit *doctrina* übersetzt. Er schrieb im zweiten Buch der *Institutiones:*

> *„Mathematica, quam Latine possumus dicere „doctrinalem“, scientia est quae abstractam considerant quantitatem.“*

Im Lateinischen heißt *docere* „lehren, unterweisen, unterrichten, vortragen“. *Doctor* ist „der Lehrer“, *doctrix* „die Lehrerin“ und *doctrina* ist „der Unterricht, die Unterweisung, die durch Unterricht mitgeteilte Gelehrsamkeit, und Kenntnis“. *Doctrina* ist insbesondere ein durch Philosophie oder Wissenschaft aufgestelltes System von Grundsätzen, also eine in sich geschlossene Lehre, ein in sich geschlossenes System von Aussagen.

In einem Brief an *Gabriel Wagner* aus dem Jahre 1696 bezeichnete *Gottfried Wilhelm Leibniz* die Mathematik als *„Wiß-Kunst“*. Im Holländischen ist seit dem 18. Jahrhundert die Bezeichnung *„Wiskunde“* üblich. Bemerkenswert ist, daß *Leibniz* die Mathematik als „Kunst“ (τέχνη, ars) und nicht wie *Cassiodor* als „Wissenschaft“ (ἐπιστήμη, scientia) bezeichnete.

Es ist auch bemerkenswert, daß in vorplatonischer Zeit die Geometrie gelegentlich *„Historia“* genannt wurde. Beispielsweise heißt es bei *Iámblichos* in seiner Schrift *‚De vita Pythagorica liber‘*, [XVIII],89, daß *Pythagoras* die Geometrie *Historia* (ἱστορία) genannt habe:

> ἐκαλεῖτο δὲ ἡ γεωμετρία πρός Πυθαγόρου ἱστορία.
> [PYTHAGORAS selbst nannte die Geometrie „Historia“.]

Kurt von Fritz (1952 loc. cit.) schrieb dazu daß das Wort „Historia“ vom indogermanischen Stamm „vid“ abgeleitet sei, den man im lateinischen Wort *vid$\overline{e}$re* wiederfindet:

> *„Ein ἵστωρ ist jemand, der etwas gesehen hat, ein Augenzeuge; ἱστορεῖν bedeutet entweder, etwas als Augenzeuge in Augenschein nehmen und darüber berichten, oder, in etwas mehr abgeleitetem Sinn, Augenzeugen befragen, und wiedergeben, was man von ihnen in Erfahrung gebracht hat. „Historia“ im ursprünglichen Sinne also beruht letzterdings auf Augenscheinnahme.“*
> (K.v. FRITZ 1952, op. cit., S. 202.)

„Historia“ bedeutet demnach: *„Nachforschen bei denen, die aus eigener Anschauung Bescheid wissen“* (*B. Snell*, op. cit., S. 62), und ist daher auch eine treffende Bezeichnung für die Geometrie, so wie sie im alten Ägypten und Babylon betrieben wurde. In dieser alten Geometrie durfte man, wenn es darum ging, die Gültigkeit (oder Wahrheit) einer geometrischen Behauptung einzusehen, auf die sinnliche Anschauung zurückgreifen (Aufeinanderlegen geometrischer Figuren zum Beweis ihrer Kongruenz, Herumschieben und Einschieben vorgegebener Längen, Verwendung mechanisch gezeichneter Kurven, etc.). Es ist bemerkenswert, daß in der späteren griechischen Geometrie Rückgriffe auf die sinnliche Anschauung nicht mehr zulässig waren und Beweise nur noch begrifflich mit rationalen Argumenten geführt werden durften.

1.3 Das Auftreten ontologischer Probleme

Wir haben die Entwicklung, die die Geometrie genommen hat, recht unkritisch geschildert. Der Bereich der Gegenstände, von denen die Geometrie handelt, war von den Pythagoräern an nicht mehr „von dieser Welt", sondern ein Bereich von *ge*dachten (?), *er*dachten (?), unwirklichen Dingen. Aber damit waren auch neuartige Probleme entstanden. Sind die unwirklichen, ausdehnungslosen geometrischen Punkte überhaupt „Dinge", sind sie wirkliche Gegenstände, oder sind sie vielleicht lediglich „Nichtse"? Sind die *ge*dachten (oder *er*dachten) Punkte, Geraden, Kreise, Flächen, Winkel etc. reale Objekte?

- In welchem Sinne können sie als „Dinge" angesehen werden? Das sind Fragen, die die Ontologie betreffen, die die Seinsweise der mathematischen Gegenstände betreffen. Sind die ausdehnungslosen Punkte, die breitenlosen Linien etc. denn überhaupt konstruiert worden? In welcher Welt gibt es sie? Gibt es sie unabhängig von unserem Denken? Gehören sie zur erschaffenen Welt oder sind wir es, die sie erschaffen? Wem verdanken sie ihr Da-Sein?
- MORITZ SCHLICK (1882–1936) schrieb in seiner *„Allgemeinen Erkenntnislehre"* (Berlin 1918, S. 117): *„Linien ohne Breite sind nicht wirklich vorstellbar."* Es stellt sich die Frage, ob die Geometrie noch einen Wirklichkeitsgehalt hat. Worüber spricht sie: über anschaulich gegebene Sachverhalte oder vielmehr über ein Geflecht von Begriffen?
- Auf welchem Wege können wir die Beziehungen, die zwischen den verschiedenen mathematischen Gegenständen bestehen, erkennen? Das ist eine Frage, die die Epistemologie betrifft, d. h. die Art und Weise des Erkennens mathematischer Sachverhalte.

Bereits in der Antike wurde über all diese Fragen sehr kontrovers diskutiert und die Geometrie wurde seither immer wieder angegriffen und sogar verspottet, vergl. etwa *Aristophanes* in seinem Theaterstück *‚Die Vögel'*, *Cicero* in seinen *‚Academiae Questiones'* (Buch II, liber Lucullus, XXXVI, 116–118), *Seneca* (im 88.Brief) und *Lukian* (ca.120–180 u.Z.) in seinem Dialog *‚Hermotios oder Von den Philosophischen Sekten'*. *Lukian* beispielsweise schrieb dort:

„(…) denn auch die hoch bewunderte Geometrie verlangt gleich von vornherein, daß man ihr offenbar absurde Bedingungen zugestehe, da sie gewisse unteilbare Punkte und Linien ohne Breite und dergleichen Undinge zugegeben haben will, und in dem sie auf ein so wurmstichiges Fundament baut, sich doch mit Demonstration und Evidenz breit macht.“

Auch anderthalbtausend Jahre später wurde die Geometrie immer noch für ihre ausdehnungslosen Punkte und unendlich-dünnen Linien verspottet. *Voltaire* macht sich in seiner Satire ‚*L'Homme aux quarante écus*‘ (‚*Der Vierzigtalermann*‘, geschrieben 1768) über die Linien, die eine Länge, aber keine Breite haben (*„des lingnes qui ont de la longueur sans largeur“*) lustig und nennt die ganze Geometrie eine „Scharlatanerie“:

„Je fus très-content de l'aveu de ce sage mathématicien, et je me mis à rire, dans mon malheur, d'apprendre qu'il y avait de la charlatanerie jusque dans la science qu'on appelle la haute science.“

[Ich war mit dem Geständnis dieses weisen Mathematikers sehr zufrieden und begann in meinem Unglück zu lachen, denn ich mußte erfahren, daß es selbst in der sogenannten „hohen Wissenschaft“, Scharlatanerie gibt.]

(VOLTAIRE: *‚Oeuvres Complètes‘* Kehl 1785, Band 45, Seite 13–14)

Auch wenn der Spott von *Lukian* und *Voltaire* ziemlich oberflächlich ist, so ist es dennoch ein Problem,

(1.) worüber man denn in der Geometrie überhaupt spricht, und
(2.) woher man die Einsicht in geometrische Wahrheiten bezieht.

Das war ja auch unsere oben gestellte Frage:

In welchem Sinne existieren die Objekte der verschiedenen mathematischen Theorien und aus welchen Quellen dürfen wir schöpfen, wenn wir Sätze (Theoreme) beweisen?

Ist das Fundament der Geometrie so wurmstichig wie *Lukian* meint? Ist auch das Fundament, das *Euklid* in seinen *‚Elementen‘* gelegt hat, wurmstichig? – Das wollen wir in den folgenden Kapiteln prüfen.

Die Mathematiker selbst haben kaum etwas über die Natur der mathematischen Gegenstände gesagt. Dabei ist der Umgang mit den mathematischen Objekten keineswegs unproblematisch. Wenn sich alle Überlegungen nur auf gedachte Punkte, gedachte Linien etc. beziehen, welche Rolle spielen dann die mechanischen Hilfsmittel (verallgemeinerte Zirkel zur Konstruktion von Parabeln etc, Einschiebe-Lineal zur Trisektion beliebiger Winkel etc.) in der Geometrie? Sind Kurven, die *nur* auf mechanische Weise erzeugt werden können, in der Geometrie überhaupt zulässig? Solche Kurven existieren doch gar nicht ‚in den Gedanken‘. Die *Quadratrix* des *Hippias* von Elis (um 420 v.u.Z.) ist eine solche mechanisch erzeugte Kurve, mit der die Winkeltrisektion (ja sogar die Teilung von beliebigen Winkeln in n gleiche Teile, $n \geq 2$ beliebig) und die Quadratur des Kreises möglich ist. Ist die Quadratrix in geometrischen Existenz-Beweisen zulässig? Ist die *Kissoide* von *Diokles* (um 100 v.u.Z.), mit der die Würfelverdopplung ausgeführt werden kann, in der Geometrie zulässig? Die gleiche Frage stellt sich genauso für viele weitere Kurven.

Was meinen wir damit, wenn wir sagen, daß die Punkte ohne Ausdehnung, die Geraden ohne Breite, die Flächen ohne Dicke etc. „in den Gedanken existieren“

würden. Was soll das eigentlich heißen? Oder existieren die geometrischen Objekte nur in den axiomatisch aufgebauten Geometrien *Euklids* und *Hilberts*? In welchem Sinne sind die Punkte und Geraden, von denen HIPPASOS gesprochen hat, „Objekte" (Gegenstände) der Geometrie? – Was ist der ontologische Status der geometrischen Objekte?

Es stellen sich Fragen über Fragen. Sie betreffen aber nicht nur die geometrischen Objekte. Ähnliche Fragen betreffen ganz genauso die „imaginären Zahlen" (*R.Bombelli*, *L.Euler*, *C.F.Gauss*), die „infinitesimalen Größen" (*B. Cavalieri*, *G.W.Leibniz*), die „idealen Zahlen" der algebraischen Zahlentheorie (*E.E.Kummer*, *R.Dedekind*), die unendlichen Mengen und die „Alephs" (*G.Cantor*), etc. – Wir wollen prüfen, welche Antworten im Laufe der Geschichte gefunden wurden. Das wird uns helfen, unsere eigene Antwort zu finden.

Eine Reihe von Philosophen haben die Entwicklung und Neugestaltung der Mathematik aufmerksam verfolgt (und zum Teil auch beeinflußt) und ihre Auffassungen ausführlich dargelegt. An erster Stelle sind hier für die Zeit der klassischen Antike bis hin zur Wiedergeburt der Antike im 15., 16. und 17. Jahrhundert

> PLATON (ca. 427–347 v.u.Z.), ARISTOTELES (384–322 v.u.Z.), PLOTIN (205–270 u.Z.), AUGUSTINUS (354–430 u.Z.) und PROKLOS DIADOCHOS (ca. 411–485 u.Z.), RENÉ DESCARTES (1596–1650),

und für die Zeit der Aufklärung

> JOHN LOCKE (1632–1704), GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ (1646–1716), EHRENFRIED WALTER VON TSCHIRNHAUS (1651–1708), GEORGE BERKELEY (1685–1753) und IMMANUEL KANT (1724–1804)

zu nennen.

In der Neuzeit haben sich Philosophen und Mathematiker gemeinsam um die grundlegenden Probleme, die die Mathematik aufwirft, gekümmert. Es waren dies vor allem

> BERNARD BOLZANO (1781–1848), RICHARD DEDEKIND (1831–1916), GOTTLOB FREGE (1848–1925), EDMUND HUSSERL (1859–1938), DAVID HILBERT (1862–1943), BERTRAND RUSSELL (1872–1970), LUITZEN E.J. BROUWER (1881–1966), PAUL BERNAYS (1888–1977), LUDWIG WITTGENSTEIN (1889–1951) und KURT GÖDEL (1906–1978).

Wir werden auf ihre Bemühungen in den folgenden Kapiteln eingehen.

Literatur

FRITZ, KURT VON: *Die Entdeckung der Inkommensurabilität durch Hippasos von Metapont.* In: O. Becker (Herausgeber): *Zur Geschichte der Griechischen Mathematik,* Wiss. Buchges. Darmstadt, 1965, pp. 271–307. Ursprünglich erschienen in den Annals of Math. Band 46 (1945), pp. 242–264.

FRITZ, KURT VON: *Der gemeinsame Ursprung der Geschichtsschreibung und der exakten Wissenschaften bei den Griechen*. Philos. Nat. 2 (1952), pp. 200–223 & pp. 376–379.