Zahlen- und Buchstabensysteme im Dienste religiöser Bildung

Herausgegeben von
Laura V. Schimmelpfennig
und Reinhard G. Kratz

Studies in Education and Religion in Ancient and Pre-Modern History in the Mediterranean and Its Environs 5

Mohr Siebeck

SERAPHIM
Studies in Education and Religion
in Ancient and Pre-Modern History
in the Mediterranean and Its Environs

5

Zahlen- und Buchstabensysteme im Dienste religiöser Bildung

Herausgegeben von

Laura V. Schimmelpfennig
und Reinhard G. Kratz

Mohr Siebeck

Laura V. Schimmelpfennig, geboren 1990; Studium der Ev. Theologie in Göttingen; 2015–2019 Wissenschaftliche Mitarbeiterin im Sonderforschungsbereich 1136 an der Georg-August-Universität Göttingen; seit 2019 Wissenschaftliche Assistentin am Institut für Alttestamentliche Wissenschaft und Biblische Archäologie an der Christian-Albrechts-Universität zu Kiel.

Reinhard G. Kratz, geboren 1957; Studium der Ev. Theologie und Gräzistik in Frankfurt a. M., Heidelberg und Zürich; seit 1995 Professur für Altes Testament an der Georg-August-Universität Göttingen; seit 1999 Mitglied der Akademie der Wissenschaften zu Göttingen.

ISBN 978-3-16-156930-2 / eISBN 978-3-16-158319-3
DOI 10.1628/978-3-16-158319-3

ISSN 2568-9584 / eISSN 2568-9606 (SERAPHIM)

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliographie; detaillierte bibliographische Daten sind im Internet über *http://dnb.dnb.de* abrufbar.

Das Buch wurde von Martin Fischer in Tübingen aus der Minion Pro gesetzt und von Hubert & Co. in Göttingen gedruckt und gebunden.

Der Umschlag wurde von Uli Gleis in Tübingen gesetzt.
Umschlagabbildung: Laura V. Schimmelpfennig.

Printed in Germany.

Vorwort

Der vorliegende Band widmet sich Buchstaben- und/oder Zahlensystemen im Dienste religiöser Bildung und ist Ergebnis einer im Juli 2018 an der Georg-August-Universität Göttingen veranstalteten interdisziplinären Tagung. Die Idee dazu entstand auf einem Klausurtreffen des DFG-Sonderforschungsbereichs 1136 „Bildung und Religion in Kulturen des Mittelmeerraums und seiner Umwelt von der Antike bis zum Mittelalter und zum Klassischen Islam", bei dem ein Vortrag der Herausgeberin zur Zahlensymbolik in den Psalmen auf lebhaftes Interesse bei Mitgliedern anderer Teilprojekte aus anderen geisteswissenschaftlichen Disziplinen stieß. Die interdisziplinäre Anschlussfähigkeit des Themas liegt auf der Hand, da Buchstaben und – vor allem – Zahlen „Sprachen" sind, die nicht an einzelne Fächer oder Disziplinen gebunden sind, sondern von allen „gesprochen" werden und sich damit für einen geisteswissenschaftlich-interdisziplinären Vergleich geradezu aufdrängen. Dementsprechend bildet dieser Band das Spektrum der an dem Sonderforschungsbereich beteiligten Fächer ab. Die meisten der hier versammelten Beiträge wurden im Rahmen der Tagung als Vorträge gehalten und diskutiert und für die Publikation im Band lediglich geringfügig bearbeitet. Darüber hinaus konnten weitere Autoren – namentlich: Christoph Berner, Harald Haarmann, Sarit Kattan Gribetz, Petra Schmidl und Leonid Zhmud – gewonnen werden, den Band mit zusätzlichen Beiträgen zu bereichern. Allen Beitragenden, die ihre Manuskripte zur Verfügung gestellt haben, sowie Dmitrij F. Bumazhnov als Mit-Organisator der Tagung sei herzlich gedankt. Ebenso ist der Deutschen Forschungsgemeinschaft zu danken, ohne deren finanzielle Förderung weder die Tagung noch der vorliegende Band hätten entstehen können.

Weiterhin sei in ganz besonderer Weise unserer SFB-Hilfskraft Georg Stahlmann für die Begleitung der Tagung, die (buchstaben- und) zahl(en)reichen Arbeitstreffen sowie für die darüber hinausreichende unermüdliche Mitarbeit bei der Erstellung des Gesamtmanuskripts gedankt. Sehr herzlich danken möchten wir ebenso unserer Göttinger Institutssekretärin Kirsten Hahne, die uns zu aller Zeit mit unterstützendem Rat und unkomplizierter Tat zur Seite stand. Ebenfalls danken wir den Kieler Hilfskräften Julius Albrecht und Jochen Beckschulte für ihre tatkräftige Mithilfe bei der Enddurchsicht. Den SERAPHIM-Herausgebern sowie dem *Editorial Board* gebührt großer Dank für die Aufnahme dieses Bandes in die Reihe, Florian Wilk für die kritische Durchsicht, Levke Bittlinger für alle organisatorische Hintergrundarbeit und ein stets offenes Ohr im

Sonderforschungsbereich. Schließlich sei auch Susanne Mang und Tobias Stäbler für die Herstellung und die bewährt gute verlegerische Betreuung bei der Umsetzung dieses Bandes gedankt.

Kiel und Göttingen, 22. Juli 2019 (*Pi Approximation Day*)

Laura V. Schimmelpfennig
Reinhard G. Kratz

Inhaltsverzeichnis

Hinweise zu Abkürzungen

Die Beiträge dieses Bandes verwenden Abkürzungen, wie sie im „Internationalen Abkürzungverzeichnis für Theologie und Grenzgebiete“ (Siegfried M. Schwertner; Berlin / Boston, MA: de Gruyter, ^{3}2014) zu finden sind. Darin nicht aufgeführte Reihen sowie fachspezifische Abkürzungen werden aufgrund der Interdisziplinarität des Bandes ausgeschrieben. Aus Rücksicht auf ein breites Publikum wird ebenso auf Abkürzungen von Apokryphen, antiken Quellen und Autoren etc. verzichtet; lediglich die biblischen Bücher werden nach den „Loccumer Richtlinien“ / der „Revised Standard Version“ abgekürzt.

Einführung

Die russische Mathematikerin Sofia Kovalevskaya (1850–1891) soll einmal gesagt haben, dass es unmöglich sei, ein Mathematiker zu sein, ohne die Seele eines Poeten zu haben. Auf manch einen der in diesem Band behandelten Texte scheint nachgerade das Umgekehrte zuzutreffen: dass es unmöglich ist, ein Poet zu sein, ohne die Seele eines Mathematikers zu haben. Buchstaben und Zahlen gehen in diesen Texten eine derart enge Verbindung ein, dass sie kaum noch voneinander zu unterscheiden sind.

Doch fürs Erste bilden Buchstaben Wörter und Zahlen bilden Mengen – obwohl auch das nicht ganz so einfach ist. Einfach ist zunächst einmal nur dies, dass die Fähigkeit zu schreiben und zu rechnen Inhalt und Voraussetzung von Bildung ist. Jegliche Form menschlichen Denkens ist auf Buchstaben und Zahlen angewiesen. Und so können auch Religion und Theologie nicht auf Buchstaben und Zahlen verzichten.

Kultur- und religionsübergreifend faszinieren Zahlen und Buchstaben von alters her. Sie formen und konstruieren unsere Welt und unsere Wirklichkeit. Buchstaben bilden Sprache ab, sind Voraussetzung für menschliche Kommunikation. Zahlen geben Struktur, ordnen Zusammenhänge und kategorisieren. Auch der Versuch, sich dem Göttlichen anzunähern, geschieht mithilfe von Buchstaben und Zahlen. Was wäre die Welt ohne Buchstaben und Zahlen? Ohne Buchstaben und Zahlen würde der Mensch verloren zu gehen drohen. Beide prägen Raum und Zeit, stiften Sicherheit und Orientierung, sodass es nicht fern liegt, ihnen schöpferische und göttliche Kraft zuzuschreiben, sie gar als göttlich inspiriert zu betrachten. Undefinierbares wird definierbar mithilfe von Buchstaben. Unfassbares wird fassbar anhand von Zahlen. Doch die Funktionen lassen sich auch umkehren, wie einzelne Beiträge dieses Bandes zeigen. So kann auch Buchstaben ordnende Funktion zukommen, und Zahlen können Texte mit zusätzlichem Inhalt füllen. Buchstaben können als Zahlen fungieren und Zahlen in gewisser Weise als Buchstaben. Ihre Rollen können ineinandergreifen oder gar verschmelzen – dies alles auch im Dienste religiöser Bildung. Dies führt zum Thema des vorliegenden Bandes, dessen Beiträge sich erstmals verschiedenartigen Systemen von Zahlen und Buchstaben aus Kulturen und Religionen des historischen Mittelmeerraums von der Antike bis zum Mittelalter und zum Klassischen Islam widmen und nach deren Implikationen für Religion und Bildung fragen.

Obwohl Zahlen- und Buchstabensysteme einen recht klar umgrenzten Gegenstand darstellen, ist es zugleich ein sehr weites Feld, was die vielfältigen und verschiedenen literarischen Phänomene anbelangt. Dies liegt nicht zuletzt an dem in diesem Band vertretenen breiten Fächerspektrum; doch auch innerhalb der Disziplinen können die Phänomene stark variieren. Interdisziplinäre Studien zu Zahlensymbolik und insbesondere zu Zahlen- und Buchstabensystemen liegen nur sehr vereinzelt vor; beispielhaft seien die Bände „Silent Poetry. Essays in Numerological Analysis" (hg. von Alastair Fowler; London: Routledge & Kegan Paul, 1970), „Die Zahl Sieben im Alten Orient" (hg. von Gotthard G. G. Reinhold; Frankfurt a. M.: Peter Lang, 2008) und „The Theology of Arithmetic. Number Symbolism in Platonism and Early Christianity" (hg. von Joel Kalvesmaki; Hellenic Studies Series 59; Cambridge, MA: Harvard University Press / Washington, DC: Center for Hellenic Studies, 2013) genannt. Die Frage nach dem Gebrauch solcher Systeme für das Zusammenspiel von Bildung und Religion ist dagegen eine neue Fragestellung. Der vorliegende Band versteht sich entsprechend als eine erste Bestandsaufnahme dazu und spannt einen weiten Bogen: von Zahlenmystik und Zahlensymbolik über Chiffrierungen durch Buchstaben oder Zahlen bis hin zu graphischen Mustern, die durch bewussten Gebrauch von Buchstaben oder Zahlen in den Text eingearbeitet sind, um nur eine Auswahl zu nennen. Gefragt wird nach den Hintergründen sowie Entstehungs-, Verwendungs-, Tradierungs- und Rezeptionsorten solcher Systeme im Spannungsfeld zwischen Bildung und Religion.

Trotz der Vielfältigkeit der Systeme fällt als eine Gemeinsamkeit auf, dass es häufig „weisheitlich" geprägte Texte sind, in denen Zahlen- und Buchstabenspielereien begegnen. Das Gebiet der antiken (altorientalischen und griechisch-römischen) Weisheit vereint nicht nur Religion und Bildung, sondern weist mit ihrem Anspruch, die Welt mit den ihr zur Verfügung stehenden Mitteln zu erklären, eine besondere Affinität zu der Frage auf, wie Buchstaben und Zahlen die Welt konstruieren. Weisheit hat durch ihr hohes Maß an Erfahrungs- und Gelehrtenwissen ein sehr enges Verhältnis zu Bildung, was wiederum Auswirkungen auf Religion hat. Denn durch die Sprachfähigkeit der Weisheit wird Religion vermittelbar. Allen dargestellten Phänomenen ist gemeinsam, dass sie sich bestimmter Mittel und Gehalte von Bildung bedienen, um damit religiösen Inhalten Ausdruck zu verleihen.

Eröffnet wird der Band durch einen die mathematischen Grundlagen erörternden Beitrag von Albrecht Beutelspacher, der grundlegend in die Welt der Zahlen, ihre Herkunft und ihre Bedeutung einführt. Aus mathematischer Perspektive wird nach dem spezifischen Charakter einzelner Zahlen gefragt und danach, woher ihre jeweils individuelle Bedeutung rührt. Der Beitrag wirft eine Grundfrage auf, die stellvertretend für den gesamten Band stehen und gleichsam auf Buchstaben übertragen werden kann: Welche Zahlen/Buchstaben sind wichtig und was zeichnet sie gegenüber – für den jeweiligen Kontext – unwichtigen Zahlen/Buchstaben aus? Was macht Zahlen/Buchstaben zu wichtigen bzw. bedeutenden Zahlen/Buchstaben?

Auch die drei ersten fachspezifischen Beiträge befassen sich mit der Bedeutung von Zahlen im Allgemeinen. Leonid Zhmud zeichnet die Entwicklung von der

Zahlensymbolik zur Arithmologie nach und beschäftigt sich mit der platonischen und pythagoreischen Arithmologie in Konzentration auf die Eigenschaften der ersten zehn Zahlen. Angelika Bönker-Vallon gibt einen Überblick über die Bedeutung von Zahlen in der philosophischen Tradition von der Antike über die Spätantike bis hin zur frühen christlichen Theologie. Dabei konzentriert sie sich vor allem auf das Verhältnis von Einheit und Vielheit sowie das von endlicher und unendlicher Zahl, worin die „Schnittstelle zwischen göttlicher und menschlicher Erkenntnis" gesehen wurde. Die Bedeutung von Zahlen im religiösen Gebrauch führt der Beitrag von Petra Schmidl vor, die am Beispiel des 27. Kapitels aus al-Ashraf Umars *Tabṣira* aus dem 13. Jahrhundert n. Chr. Zahlen als „Orientierung in Raum und Zeit" für den vormodernen Islam beschreibt. Hier waren astronomische und mathematische Berechnungen unerlässlich für die Durchführung von Ritualen des täglichen religiösen Lebens wie die Einhaltung bestimmter Gebetszeiten oder die Ermittlung der Himmelsrichtung nach Mekka. Zahlen als ordnungsgebendes Prinzip spielen dabei weniger in ihrer semantischen Bedeutung als vielmehr in ihrer praktischen Funktion eine entscheidende Rolle.

Die drei folgenden Beiträge sind der Zahl Sieben gewidmet. Matti Borchert untersucht die Zahl Sieben in den *Historien* Herodots aus dem 5. Jahrhundert v. Chr. und erkennt darin einen „apollinischen Marker". Die Zahl Sieben als Zahl des Gottes Apollon sei allgemeingültiges Bildungsgut gewesen, an dem Herodot teilgehabt und das er als solches bewusst in seiner Geschichtsschreibung verarbeitet habe. Der Beitrag von Christoph Berner zeigt, dass die Zahl Sieben auch in der Periodisierung von Geschichte im frühen Judentum eine zentrale Rolle spielt. Die Zahl Sieben gelte hier als eine von Gott in der Schöpfung gestiftete Ordnung, die die Wirklichkeit zum einen regele und ihr zum anderen ein Ziel gebe. Durch die Gebundenheit der Siebenerstruktur an die Geschichte Gottes mit seinem Volk sei die Zahl aber nicht nur ordnungsstiftend, sondern auch existenz- und identitätsgebend. Auch Sarit Kattan Gribetz beschäftigt sich mit dem frühen Judentum und konzentriert sich auf das im 2. Jahrhundert v. Chr. entstandene *Jubiläenbuch*, auf das schon der Beitrag von Christoph Berner Bezug nimmt. Neben der Zahl Sieben steht hier – ebenfalls in Verbindung zur Schöpfung – die Zahl Zweiundzwanzig im Fokus. Sarit Kattan Gribetz vermutet in dem Zusammenhang der Zahlen Sieben und Zweiundzwanzig die Aufnahme einer hellenistischen Zahlentheorie über die Zahl π. Die Zahlen sollen die Perfektion der göttlichen, hinter allem stehenden Ordnung abbilden, die im Kontrast zur menschlichen Sündhaftigkeit stehe.

Vier weitere Beiträge wenden sich dem Phänomen der sogenannten „Gematrie" bzw. ersten Ansätzen davon zu, womit nun auch die Buchstaben ins Spiel kommen. Laura V. Schimmelpfennig untersucht die Psalmen 9/10 und 145 auf Zahlensysteme, die von der akrostichischen Struktur der Psalmen ausgehen und mit den Zahlenwerten der hebräischen Buchstaben zusammenhängen. Die darin enthaltenen Buchstaben- und Zahlensysteme seien zusätzliche Manifestation des Inhalts und Abbild der göttlichen Ordnung, die hinter allem stehe. Auch Jan

Dochhorn beschäftigt sich mit dem semantischen Gehalt von Zahlen in antiken jüdischen Zeugnissen. Beispielhaft untersucht er das mit der Zahl 666 verbundene Rätsel in Offb 13,18, das auf den wiederkommenden Kaiser Nero verweise, und wertet dies als Zeugnis dafür aus, dass es um die Zeitenwende bereits ein aus dem Griechischen bekanntes und von dort entlehntes dezimalalphabetisches System für die hebräische und aramäische Sprache gegeben habe. Saverio Campanini befasst sich in seinem Beitrag mit El'azar von Worms aus dem 12.–13. Jahrhundert n. Chr., der Zahlenmystik und Gematrie sowohl für seine Exegese als auch für den Unterricht von Schülern verwendete. Dahinter stehe die Auffassung, dass die Welt aus den Buchstaben des hebräischen Alphabets geschaffen sei und dementsprechend sowohl in den Buchstaben als auch in den damit verbundenen Zahlen Spuren der Schöpfung zu erkennen seien. Auch Ulrich Rebstock behandelt schließlich die Ansätze von Gematrie in heiligen Texten der islamischen Tradition. Er untersucht an mehreren Beispielen arabische Kryptologie und das sogenannte „Zahlenwunder des Korans".

Die folgenden fünf Beiträge richten den Fokus nun ganz auf die Buchstaben. Anhand der Keilschrift zeigt Eckart Frahm auf, inwieweit einzelne Schriftzeichen nicht nur in ihrer Zusammensetzung als Wort Inhalt vermitteln, sondern bereits für sich alleine als einzelnes Zeichen stehend eine Bedeutung haben. Die in der Keilschrift angelegte Mehrdeutigkeit von Schrift ist nach Frahm gleichzeitig für die mesopotamischen Religionen charakteristisch und wurde zu Auslegungszwecken fruchtbar gemacht. Um Pluralität bzw. Mehrdeutigkeit von Schriftsystemen geht es auch in dem Beitrag von Michael M. Pozdnev, der sich mit der Entstehung und Fixierung des lateinischen Alphabets beschäftigt und zeigt, dass der Ausbau und die Durchsetzung der lateinischen Sprache und Kultur nur durch ein einheitliches Schriftsystem bildungsgeschichtlich möglich gewesen seien. Die Probe aufs Exempel sind die von Anna-Lena Körfer bearbeiteten panegyrischen Gittergedichte Optatians aus dem 4. Jahrhundert n. Chr. In ihnen wird auf zwei bis drei Text- und Bildebenen mithilfe von gezielt gesetzten Buchstaben und bewusst konzipierter Dichtung ein semantischer Raum geschaffen. Auf oberster Textebene sei ein Christogramm eingearbeitet, das für die Sieghaftigkeit Kaiser Konstantins, des Adressaten der Texte, stehe und ihn im Leseakt performativ erneut zu Sieghaftigkeit führe. Ein an die Gittergedichte erinnerndes Buchstabenquadrat findet sich in den Briefen Pachoms und der darin enthaltenen „Geheimschrift" aus dem 4. Jahrhundert n. Chr., mit denen sich der Beitrag von Christoph Joest befasst. Zusätzlich zum Fließtext stechen im Text einzelne koptische Buchstaben heraus, die – nach Entschlüsselung dieser „Geheimschrift" – zur Erläuterung oder überhaupt erst zum Verständnis des Fließtexts verhelfen. Aufschluss dazu biete ein Buchstabenquadrat, das in Verbindung zum Heilsweg Christi stehe. Um geheime Botschaften in bzw. von Buchstaben geht es auch in dem Beitrag von Dmitrij F. Bumazhnov über den Traktat *Über das Mysterium der Buchstaben* des Ps.-Sabas aus dem 6. Jahrhundert, in dem der Autor berichtet, wie er von Gott auf dem Berg Sinai über geheime Botschaften belehrt wurde, die im Alphabet enthalten seien.

Der Beitrag des Kulturwissenschaftlers Harald Haarmann richtet den Fokus abschließend und gleichzeitig ausblickend von den Buchstaben wieder zurück auf die Zahlen. An verschiedenen Zahlen wird exemplarisch „Das Heilige in den Zahlen" untersucht, wobei der Beitrag über die Kulturen des Mittelmeerraums hinaus auch antike Kulturen Asiens und Südamerikas mit einbezieht. Haarmann weist darauf hin, dass die Trennung zwischen Rationalität und Religiösem erst in der Zeit der Aufklärung strikt vollzogen worden sei; seitdem sei die Mathematik von Magisch-Mystischem und Spirituell-Religiösem getrennt. In den antiken Kulturen hingegen seien Religion und Bildung fest miteinander verbunden und ineinander verwoben gewesen, was als Charakteristikum für sämtliche in diesem Band vorgestellten Phänomene gelten darf.

Haben Zahlen eine Bedeutung?

Beobachtungen aus Sicht der Mathematik

Albrecht Beutelspacher

1. Vorspann

Dass Zahlen insgesamt wichtig sind und eine große Bedeutung haben, wird kaum jemand in Frage stellen. Die Bedeutung der Zahlen liegt in zwei Bereichen des menschlichen Lebens. Der erste ist der Bereich der Praxis, also der praktischen Bewältigung der Herausforderungen des Lebens. Der zweite ist der Bereich der Theorie, also der Versuch, die Welt mental zu erfassen, zu erkennen, was die Welt im Innersten zusammenhält.[1]

Zahlen wurden – vermutlich – aus praktischen Gründen erfunden. Schon vor 20.000 bis 30.000 Jahren wurden Strichlisten angelegt, mit denen offenbar etwas gezählt wurde. Aus der Zeit um 2000 v. Chr. sind sowohl aus Ägypten als auch aus Mesopotamien elaborierte mathematische Verfahren, wie zum Beispiel der Satz des Pythagoras, zur Berechnung von Flächeninhalten bekannt. Diese hatten ihren Ursprung und auch Anwendungen bei der Bestimmung der Größe von Anbauflächen von Getreide und ähnlichem.

Die Erfindung der Zahlen markiert den Übergang von qualitativen, subjektiv gefärbten Einschätzungen zu quantitativen und damit objektiven Feststellungen. Man kann die Frage nach mehr, weniger oder gleich durch Zahlen und damit „gerecht" entscheiden, ohne Rücksicht auf Rang, Macht oder Ansehen eines der Kontrahenten.

- Zum Beispiel wird die subjektive und damit anfechtbare Behauptung „ich habe mehr Fische als du" durch Zählen zweifelsfrei festgestellt oder widerlegt.
- Im altägyptischen Reich waren die Grenzen der Felder nach der jährlichen Überschwemmung durch den Nil nicht mehr zu erkennen. Daher war es entscheidend, jedem wieder ein Feld gleicher Größe zuweisen zu können. Dazu waren explizite Kenntnisse von Geometrie, insbesondere die Berechnung des Flächeninhalts – auch von komplizierten Flächenformen –, nötig.

---

[1] Als (auch für Laien verständliche) Referenz für mathematische Hintergründe s. Beutelspacher [2]2016.

Die Zahlen haben aber auch von Anfang an eine große Bedeutung für das Verständnis der Welt gehabt. Dies bezieht sich insbesondere auf die Kosmologie. Die Frage „Warum und wie bewegen sich die Himmelskörper?“ wurde in allen Kulturen gestellt und in vielen Mythen aufgegriffen. Die wissenschaftliche Astronomie begann, als man versuchte, Beobachtungen festzuhalten. Dies geschah mit Hilfe von Zahlen, und aus den Zahlenfolgen wurden Vorhersagen generiert. Hier leisteten die Menschen in Mesopotamien ab dem 3. Jahrtausend v. Chr. Bahnbrechendes, insbesondere im Hinblick auf Genauigkeit und Systematik.

Bei den Pythagoreern (ca. 600 v. Chr.) gewannen die Zahlen eine neue Bedeutung. Bei den vorsokratischen Philosophen, zu denen wir die Pythagoreer zählen müssen, stand die Frage nach dem Urgrund des Seins (*arché*) im Zentrum. Bekanntlich wurden darauf sehr unterschiedliche Antworten gegeben: bei Thales das Wasser, bei Anaximander das Unbegrenzte (*apeiron*), bei Demokrit das Unteilbare (Atome), bei Heraklit der Wandel (*panta rhei*, *logos*). Für Pythagoras war die Antwort klar: Die *Zahl* ist die entscheidende Grundlage. Das bedeutete nicht nur, dass man in den Phänomenen der Welt Zahlen entdecken (etwa bei den Tönen eines musikalischen Intervalls) und die Welt mit Zahlen beschreiben kann, sondern vor allem, dass Zahlen dem Getriebe der Welt zugrunde liegen, dass die Welt durch Zahlen strukturiert ist und ohne Zahlen gar nicht funktionieren könnte.

Dass der Kosmos insgesamt zahlenmäßig geordnet ist, kommt in dem Begriff der „Sphärenharmonie“ zum Ausdruck. Zunächst wird damit die Modellvorstellung beschrieben, dass die Himmelskörper auf durchsichtigen Kugelschalen („Sphären“) befestigt sind. Durch die Bewegungen der Sphären entstehen Töne, die zwar unhörbar sind, aber harmonisch zueinander passen. Nun wussten die Pythagoreer, dass harmonische (hörbare) Töne eng mit Zahlenverhältnissen zu tun haben: Je reiner der Klang, desto einfacher ist das Längenverhältnis der entsprechenden Saiten oder Flöten. Insofern drückt die Idee der Sphärenharmonie die Vorstellung aus, dass der gesamte Kosmos nach Maß und Zahl geordnet ist.

Zahlen haben, so können wir das bisher Gesagte zusammenfassen, insgesamt eine große Bedeutung. In diesem Artikel soll aber ein anderer Blickwinkel eingenommen werden. Die Frage, der wir nachgehen wollen, lautet: Hat eine einzelne Zahl eine spezifische Bedeutung? Oder allgemeiner gefragt: Hat jede Zahl eine Bedeutung, sozusagen einen individuellen Charakter?

Auf diese Frage gibt es mindestens zwei radikale Antworten. Die erste Antwort lautet: Alle Zahlen sind gleichberechtigt. Keine zeichnet sich vor den anderen aus. Alle Zahlen sind gleich interessant und deshalb ist im Grunde keine einzelne Zahl irgendwie interessant. Vor den geistigen Augen der Vertreter dieser These erscheinen die Zahlen zum Beispiel als Punkte auf der Zahlengeraden, die wie auf einer unendlich langen Perlenkette aufgereiht sind. Aus dieser Sicht sind Fragen wie „Bei welcher Zahl beginnen wir mit dem Zählen?“ oder „In welche Richtung zählen wir?“ vollkommen irrelevant, weil man bei jeder Zahl beginnen könnte. Aus dieser Sicht sind die Namen für Zahlen auch nur oberflächliche Bezeichnungen, die nichts mit dem Wesen der Zahl zu tun haben.

Die zweite Antwort (die manchmal von denselben Menschen vorgestellt wird) ist der ersten diametral entgegengesetzt und besagt: Jede Zahl ist etwas Besonderes, keine ist wie die andere und jede hat ihren eigenen, spezifischen Charakter.

Mathematiker untermauern diese Sicht manchmal, indem sie behaupten, dass alle Zahlen interessant seien und für diese Behauptung sogar eine Art „Beweis" angeben: Angenommen, es gäbe uninteressante Zahlen. Dann gäbe es auch eine kleinste uninteressante Zahl – das ist aber zweifellos eine höchst interessante Eigenschaft.

Wir neigen eher der zweiten These zu, wenn auch in abgeschwächter Form: Viele Zahlen sind interessant, und unter den kleinen Zahlen besonders viele.

Was macht eine Zahl aus mathematischer Sicht interessant? Natürlich ihre Eigenschaften. Betrachten wir zum Beispiel die Zahl 8. Aus mathematischer Sicht hat diese Zahl viele Eigenschaften: Sie ist eine gerade Zahl, das heißt, sie ist durch 2 teilbar. Mehr noch: Die Zahl 8 setzt sich multiplikativ gesehen nur aus Zweien zusammen: $8 = 2 \times 2 \times 2$. Die Zahl 8 ist eine Kubikzahl (das heißt von der Form a^3), sie ist um 1 kleiner als eine Quadratzahl ($8 = 9 - 1$), sie ist um 1 größer als eine Primzahl ($8 = 7 + 1$), sie ist eine der berühmten Fibonacci-Zahlen usw. All diese Eigenschaften bündeln sich und bilden den Charakter der Zahl 8.

Im Folgenden werden wir die Zahlen hinsichtlich ihrer mathematischen Eigenschaften betrachten. Wir belassen es aber nicht dabei, sondern werden den sicheren Boden der Mathematik immer wieder verlassen und der Bedeutung der Zahlen in der Welt nachspüren. Wir unternehmen dabei den Versuch, einige der Bedeutungen, die üblicherweise den Zahlen zugerechnet werden, mit ihren mathematischen Eigenschaften zu korrelieren.

Unsere Betrachtungen über die Bedeutung von Zahlen gliedern wir in vier Abschnitte. Zunächst betrachten wir Zahlen nur als Abfolge beim Zählen; dabei werden die Zahlen 1, 2, 3 eine besondere Rolle spielen. Danach wird der Aspekt des Zusammensetzens von Figuren beziehungsweise der Addition der zugehörigen Zahlen in den Vordergrund gestellt; dabei werden wir speziell magische Quadrate und die Tetraktys mit ihrer Verbindung der Zahlen 3, 4 und 10 behandeln. Im dritten Abschnitt geht es um Zahlen, die in viele Faktoren zerlegt werden können. Das sind Zahlen wie 6, 12, 60, 144, die schon immer große Bedeutung hatten. Schließlich werden wir im letzten Abschnitt Zahlen behandeln, die im Grunde gar nicht in Faktoren zerlegt werden können, nämlich die Primzahlen. Hier behandeln wir im speziellen die Zahl 5, aber auch die 7 und die 13.

Noch eine Vorbemerkung: In diesem Artikel verstehen wir unter „Zahlen" nur die „natürlichen Zahlen", also die Zahlen 1, 2, 3, … Wir betrachten weder negative Zahlen noch Bruchzahlen und schon gar nicht Zahlen wie $\sqrt{2}$, π oder i, die Boten ganz anderer Zahlenwelten sind.

2. Zählen

Wann die Menschen zu zählen begonnen haben, weiß man nicht. Sicher ist aber, dass dies schon vor zigtausend Jahren gewesen sein muss. Denn die ersten Zeugnisse schriftlicher Fixierung von Zahlen sind schon 20.000 bis 30.000 Jahre alt (s. u.). Vielleicht war das erste „Zählen" auch nur ein Zählen bis zwei. Es ist gut vorstellbar, dass der erste Schritt zum Zählen eine akustische Umsetzung des Rhythmus beim Gehen oder einer anderen Schaukelbewegung war. Und irgendwann muss jemand auf die Idee gekommen sein, nicht nur die symmetrische Schaukelbewegung rhythmisch abzubilden, sondern auch die lineare Fortbewegung. Das hieß dann, in welcher Sprache auch immer: 1, 2, 3, …

2.1. Die Eins: Es kann nur eine geben

Die Eins wurde lange Zeit nicht als Zahl angesehen, sondern als eine Einheit, aus der Zahlen entstehen. Das ist der Standpunkt Euklids, der zu Beginn des Buches VII seiner *Elemente* zunächst versucht, „Einheit" zu definieren: „Einheit ist das, wonach jedes Ding eines genannt wird." Dann aber schreibt er: „Zahl ist die aus Einheiten zusammengesetzte Menge".

In der Tat kann man durch fortgesetzte Addition der Zahl 1 alle natürlichen Zahlen erhalten: $2 = 1 + 1$, $3 = 1 + 1 + 1$, $4 = 1 + 1 + 1 + 1$ und so weiter. Diese Schreibweise ist auch nichts anderes als der mathematische Ausdruck des Aneinanderfügens von Strichen zu einer Strichliste. Striche beziehungsweise Strichlisten sind als erste Zahlendarstellungen überliefert. Es hat sich eine ganze Reihe von Knochen erhalten, die 20.000 bis 30.000 Jahre alt sind. In diese sind in regelmäßiger und systematischer Weise zahlreiche Kerben eingeritzt, die übereinstimmend als Zahlendarstellungen angesehen werden. Berühmt sind der „Wolfsknochen"[2] (s. Abb. 1) und der „Ishango-Knochen" (s. Abschnitt 5, S. 20). Warum diese Zahlen so aufwändig geschrieben wurden und was damit gezählt wurde, wissen wir nicht.

Abbildung 1: Der Wolfsknochen.

[2] Wickel 2009.

Heute ist die Eins als Zahl anerkannt, und zwar als eine ganz besondere Zahl. Die Eins ist die erste Zahl beim Zählen. Sie ist die erste und, man könnte fast sagen, die einzige, jedenfalls die wichtigste Zahl, denn aus ihr setzen sich alle anderen Zahlen zusammen. Bereits diese Eigenschaft macht sie einzigartig, denn keine andere Zahl hat diese Eigenschaft: Durch sukzessive Addition von 2 erhält man nur die geraden Zahlen, durch mehrfache Addition von 3 nur die durch 3 teilbaren Zahlen und so weiter. Nur mit der Eins erhält man alle Zahlen.

Die Eins hat aber noch ein sensationelles Alleinstellungsmerkmal. Man erkennt es, wenn man viele Zahlen betrachtet. Zum Beispiel die Längen der Flüsse Europas oder die ersten 1.000 Primzahlen oder die Zahlen auf der ersten Seite einer Zeitung. Wenn man sich fragt, wie viele dieser Zahlen mit der Ziffer 1 beginnen, wie viele mit der Ziffer 2, …, und wie viele mit der Ziffer 9, so könnte man vermuten, dass das im Durchschnitt gleich viele sind, also jeweils etwa 11 Prozent. Aber das ist nicht richtig: Über 30 Prozent aller Zahlen beginnen mit 1, nur noch 17 Prozent mit 2 und kümmerliche 4,6 Prozent mit der Ziffer 9. Dieses „Benfordsche Paradoxon" ist nach dem Physiker Frank Benford benannt, der das Phänomen 1938 als Zweiter beschrieben hat. Der eigentliche Entdecker war 1861 der Mathematiker Simon Newcomb. Das Phänomen wird am Beispiel der Einwohnerzahlen der größten Städte Deutschlands deutlich:

Anfangsziffer der Einwohnerzahl	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Anzahl der Städte	340	320	133	87	50	24	20	12	12

Die Eins zeichnet sich als Zahl dadurch aus, dass sie die Erste ist. Das ist zwar eine banale Feststellung, dennoch trägt sie wesentlich zur herausragenden Stellung der Zahl Eins bei. Die Eins ist die beste Zahl, eine Zahl, die nicht übertroffen werden kann.

Jeder möchte der Erste sein. Wem als erstem etwas gelingt, dem wird oft ewiger Ruhm zuteil. Denn erste Ereignisse bleiben auf ewig erste Ereignisse; sie können nicht getoppt werden: Der erste Mensch am Nordpol, der erste Mensch auf dem Mount Everest, „the first man on the moon". Ein Erfinder hat eine bestimmte Lösung für ein Problem als Erster konzipiert und sichert sich die daraus erwachsenden Rechte durch ein Patent.

In der Wissenschaft stellen wir durch aufwändige *peer-review*-Verfahren die Neuigkeit einer Entdeckung fest. Und dennoch gibt es immer wieder Prioritätsstreite. Manche Gedanken allerdings haben, wenn sie erst einmal formuliert und ausgesprochen sind, eine derartig große, oft weltverändernde Wirkung, dass es keiner formalen Verfahren bedarf, um die Priorität festzustellen. Man kann an die Einsteinsche Formel $e = mc^2$ denken, die Energie und Masse gleichsetzt, an Martin Luther Kings „I have a dream" oder auch an die von Günter Schabowski am 9. November 1989 gestammelten Worte „Das tritt nach meiner Kenntnis … ist das sofort, unverzüglich", die unmittelbar die Maueröffnung bewirkten.

2.2. Die Zwei: Die Zahl der Unterscheidung

Während die Eins die Alternativlosigkeit darstellt, ist die Zahl Zwei die Zahl der Alternative. Mit der Zwei kann man unterscheiden. Zwischen ich und du, zwischen mir und der Welt.

Zwei sagen können, heißt unterscheiden können. Wir erfassen und strukturieren die Welt in einem ersten Schritt, indem wir sie in polare Gegensätze einteilen: Tag und Nacht, Sommer und Winter, Himmel und Erde, heiß und kalt, aber auch Freund und Feind, Mann und Frau und schließlich in Gut und Böse, Himmel und Hölle, Gott und Mensch … Zwei ist aber auch die Zahl der Zusammengehörigkeit: Adam und Eva, Bonny und Clyde, Pech und Schwefel.

Mathematisch entfaltet die Zahl Zwei ihre Kraft durch die erstmals durch die Pythagoreer vorgenommene Unterscheidung zwischen geraden und ungeraden Zahlen, wobei die ungeraden als begrenzt (und damit höherrangig) und männlich bezeichnet wurden und die geraden als unbegrenzt und weiblich. Das Interessante ist, dass die Pythagoreer nicht nur definierten, was gerade und was ungerade bedeuten soll, sondern dass sie Beziehungen zwischen diesen beiden Zahlensorten erkannten und – im Rahmen ihrer Möglichkeiten – bewiesen: Gerade plus ungerade ist ungerade, ungerade plus ungerade ist gerade und gerade plus gerade ist gerade.

Das mag uns banal erscheinen, ist aber der erste – gelungene – Versuch, Zahlen nicht nur als der Größe nach angeordnete Objekte passiv wahrzunehmen, sondern durch aktiv eingesetzte Begriffe Eigenschaften der Zahlen zu erschließen. Die Teilung einer Gesamtheit in zwei Teile ist ein Schritt in einem mächtigen Aussonderungsverfahren, das unter der Bezeichnung *divide et impera* bekannt ist. Wie viele ja-nein-Fragen braucht man, um einen unter 1.000 Menschen zu identifizieren? (Antwort: 10). Wie viele Bits braucht man, um jedes Atom des Universums bezeichnen zu können? (Antwort: 200). Dies erreicht man durch fortgesetztes Halbieren der fraglichen Mengen. Was so unschuldig und spielerisch klingt, hat aber auch Anwendungen zum Beispiel bei der Rasterfahndung: Es zeigt sich, dass man schon durch sehr wenige Eigenschaften einen Menschen eindeutig identifizieren kann.

2.3. Die Drei: Die erste Ganzheit

Für die Pythagoreer war die Drei die „Zahl des ‚Ganzen'", da „Ende, Mitte und Anfang die Zahl des Ganzen ausmachen, dieses aber die der Dreiheit".[3] Warum „Ende, Mitte und Anfang" eine kennzeichnende Eigenschaft einer ganzheitlichen Zahl sein soll, wird nicht hinterfragt. Das Warum ist vielleicht auch gar nicht wichtig. Denn völlig unabhängig davon macht die pythagoreische Aussage klar, dass mit der Drei eine neue Qualität von Zahlen erscheint: Während uns die Eins

[3] Riedweg ^{2}2007, 110.

die unstrukturierte Fülle der Zahlen präsentiert und die Zwei ein scharfes Werkzeug zur Beherrschung der Welt bietet, ist die Drei die erste Zahl, die einen Zusammenhalt, einen Abschluss, eine Krönung, kurz: ein Ganzes auf einer höheren Ebene darstellt.

Ob wir an die drei Hexen in Shakespeares Macbeth denken oder an die drei Knaben in Mozarts Zauberflöte oder an die drei Rheintöchter in Wagners Ring des Nibelungen: In jedem Fall schafft die Dreiheit eine Einheit. Eine Figur alleine müsste einen individuellen Charakter haben, zwei Figuren wären fast automatisch auf Komplementarität angelegt, aber drei bilden eine ausgewogene Gruppe.

In den Märchen hören wir, dass die Drei eine Ziel- und Abschlussfunktion hat. Vieles passiert drei Mal, wobei die beiden ersten Male nur Anläufe, Versuche, vorläufige Annäherungen sind, während es beim dritten Mal endgültig klappt und sich insbesondere die Frage nach einem „vierten Mal" gar nicht stellt.

Wenn ein Märchenheld drei Wünsche frei hat, dann kommt es auf den dritten ganz besonders an. Wenn er drei Prüfungen zu bestehen hat, dann kommt es ganz besonders auf die dritte an. (Im Märchen „Rumpelstilzchen" hat die Müllerstochter drei Tage lang Zeit, den Namen des kleinen Männchens herauszubekommen, das ihr in drei Nächten Stroh zu Gold gesponnen hat, sodass der König sie heiratet und sie Königin werden kann. Erst am dritten Tag gelingt es ihr. Die Königin stellt eine dreifache Frage: „Heißt du Kunz? Heißt du Heinz? Heißt du etwa Rumpelstilzchen?") Das dritte Dreiermotiv in Märchen sind die drei Brüder oder drei Schwestern. Bei drei Brüdern ist der jüngste und vermeintlich schwächste letztlich der Sieger und bei drei Schwestern ist die Konstellation oft zwei gegen eine – die den Sieg dann davonträgt.

Eine weitere Form der Dreiheit sind Steigerungsformen: gut, besser, am besten. Quadratisch, praktisch, gut. Der Superlativ ist nicht mehr zu überbieten. In der Dialektik werden These und Antithese in der Synthese „aufgehoben".

Bei der Dreieinigkeit braucht man sogar ein spezielles Wort, um das „drei in eins" auszudrücken – aber unabhängig von den theologischen Herausforderungen zeigt dies noch einmal sehr überzeugend den Ganzheitscharakter der Zahl Drei.

Die Drei ist tatsächlich eine rundweg gute Ganzheit: Aller guten Dinge sind drei. Dies zeigt sich zum Beispiel in der Fülle der dreibuchstabigen Abkürzungen: Von AEG und BGB über GbR und HIV bis VHS und ZDF.

Und die Drei hat noch einen Trumpf; der heißt „Du musst es drei Mal sagen!" Dreigliedrige Phrasen wirken in besonderer Weise überzeugend. Wenn man jemanden lobt und sagt „Er kann viel und er weiß viel", dann ist das gut – aber wie viel überzeugender ist es, wenn man einen dritten Teil hinzufügt: „Er kann viel, er weiß viel und er macht viel". Es ist nicht nur der Informationszuwachs, sondern auch die überzeugende Kraft der Dreiheit.

3. Zahlen zusammenfügen

Schon früh übten Muster eine Faszination auf Menschen aus. Diese speist sich aus verschiedenen Quellen, die von Fall zu Fall unterschiedlich gewichtet sind: Schönheit und innere Stimmigkeit, Vielfalt und Ordnung, Magie und Religion, Zahlen und Rechnen. Wir betrachten zwei Beispiele.

3.1. Tetraktys

Bei den Pythagoreern entstand zum ersten Mal ein Interesse für Eigenschaften von Zahlen. Sie interessierten sich nicht nur für die Größe einer Zahl, sondern auch dafür, ob diese gerade oder ungerade, eine Quadratzahl oder eine Primzahl ist. Mehr noch: Die pythagoreischen Mathematiker untersuchten Beziehungen zwischen diesen Eigenschaften und stellten zum Beispiel fest, dass die Summe der ersten ungeraden Zahlen immer eine Quadratzahl ist; so ist etwa $1 + 3 + 5 + 7 = 16$.

Die Methode, mit der die Pythagoreer solche Eigenschaften definieren und untereinander in Beziehung setzen konnten, war – über zwei Jahrtausende vor der Möglichkeit, solche Eigenschaften symbolisch ausdrücken zu können – die der „figurierten Zahlen". Man hat Zahlen in einer Figur ausgelegt: Zahlen, die man als Quadrat legen kann, waren die Quadratzahlen. Zahlen, die man als Dreieck legen kann, nannte man Dreieckszahlen usw.

Die Tetraktys („Vierheit") zeigt die vierte Dreieckszahl. Sie hat Dreiecksform und besteht aus vier Zeilen. Die Anzahl der benötigten Steinchen ist $1 + 2 + 3 + 4 = 10$ (s. Abb. 2).

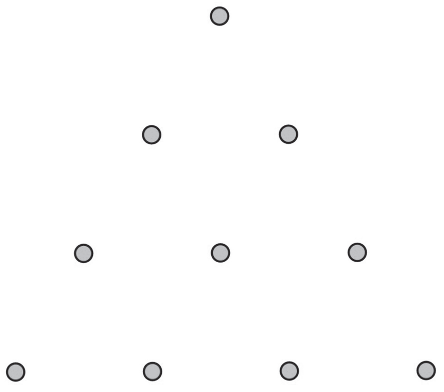

Abbildung 2: Die Tetraktys.

Das geheimnisvolle Zusammenwirken der Zahlen 3, 4 und 10 hat auf die Pythagoreer offenbar tiefen Eindruck gemacht. Für die Pythagoreer enthält die Tetraktys in sich die „Quelle und Wurzel der immerströmenden Natur"; sie ist eine Art geheimer Schlüssel für die Welterklärung.[4] Dafür spricht auch, dass man in der Tetraktys die Verhältnisse 1 : 2, 2 : 3, 3 : 4 erkennen kann, die für die wichtigsten musikalischen Intervalle Oktave, Quinte und Quarte stehen.

Exkurs

Die Zehn: Die Zahl der Rationalität

Obwohl die Zahl Zehn aus mathematischer Sicht eher zu den langweiligeren Zahlen gehört, ist sie die mit Abstand wichtigste Zahl für uns Menschen. Schon die Pythagoreer waren überzeugt, dass die Zehn eine „vollkommene Zahl“ ist, da sie „die gesamte Natur der Zahlen zu umfassen scheint“.[5]

Die Bedeutung der Zehn kommt schlicht davon, dass wir Menschen zehn Finger haben. Und da die Finger das naheliegendste Zähl- und Rechenhilfsmittel sind, spielt in fast allen Kulturen, die ein nennenswertes Zahlensystem entwickelt haben, die Zehn eine zentrale Rolle. Die Babylonier setzten ihre Ziffern durch ein Zeichen für 1 und eines für 10 zusammen. In der ägyptischen Hochkultur gab es Zeichen für 1, 10, 100, …, 1.000.000. Im Griechischen und Hebräischen werden Buchstaben für die Zahlen 1, …, 9, 10, …, 90 und 100, …, 900 verwendet. Die Maya schrieben ihre Ziffern durch eine Kombination eines Zeichens für 1 und eines für 5. Schließlich wurde das Dezimalsystem vor etwa 2.000 Jahren in Indien erfunden. Diese Erfindung ermöglicht es nicht nur, beliebig große Zahlen mit den zehn Ziffern 0, 1, …, 9 zu schreiben, sondern bietet auch die Chance, effizient zu rechnen. Denn alle Rechenaufgaben mit großen Zahlen (Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division) kann man auf das Rechnen mit den Ziffern (also sehr kleinen Zahlen) zurückführen.

Einen wahren Triumph erlebte das Dezimalsystem im Nachgang der französischen Revolution. Die Idee war, die historisch überkommenen Längen- und Gewichtsmaßeinheiten zu vereinheitlichen und auf eine vernünftige Grundlage zu stellen. Dabei kam auch der Kalender in den Blick, der – nach Meinung der Revolutionäre – auf religiösen Setzungen basierte.

Das Licht der Vernunft wurde im Dezimalsystem gesehen. Daher wurden alle alten Maßsysteme durch „republikanische“ (= dezimale) Maßsysteme abgelöst: Am 1. August 1793 wurde das Urmeter zu 100 cm und 1.000 mm eingeführt sowie das Volumenmaß Liter (= 1 Kubikdezimeter) etabliert.

Da diese Größen beliebig definiert werden können, ist man frei, auch „vernünftige“ dezimale Einheiten einzuführen. Bei der Zeitenteilung ist das anders. Was ein Jahr und was ein Tag ist, können wir Menschen nicht willkürlich festsetzen, sondern die entsprechenden Zeiten sind durch astronomische Tatsachen

[4] Riedweg ^{2}2007, 110.
[5] Riedweg ^{2}2007, 110.

unmanipulierbar gegeben. Dazu kommt, dass die entsprechenden Zahlen alles andere als „schön“ sind: Ein Jahr besteht aus (ungefähr) 365,242 Tagen, ein Mondzyklus setzt sich im Mittel aus 29,5 Tagen zusammen. Aus diesen Gründen ist es ausgesprochen schwierig, einen Kalender zu konzipieren, der lange, im Idealfall ewig, gelten soll. Die französischen Revolutionäre handelten auch hier radikal. Sie teilten das Jahr in 12 Monate. Jeder Monat bestand aus 3 „Dekaden“ zu je 10 Tagen. Übrig blieben 5 oder 6 Schalttage, die am Ende jeden Jahres wohl oder übel abgearbeitet werden mussten. Dieser Kalender galt immerhin bis 1806. Eine weitere Idee war die Einteilung des Tages in Stunden. Ab 1794 sollte jeder Tag in 10 Stunden mit jeweils 100 Minuten, von denen jede aus 100 Sekunden besteht, eingeteilt sein. Diese Idee war allerdings zu radikal, denn man hätte von einem Tag auf den anderen alle Uhren durch neue ersetzen müssen. Daher trat das entsprechende Gesetz nie in Kraft.

3.2. Magische Quadrate

Vor langer Zeit – in manchen Quellen wird von 4.000 Jahren gesprochen – soll auf dem Panzer einer Schildkröte folgende, „Lo Shu“ genannte, Zeichnung gefunden worden sein (Abb. 3):

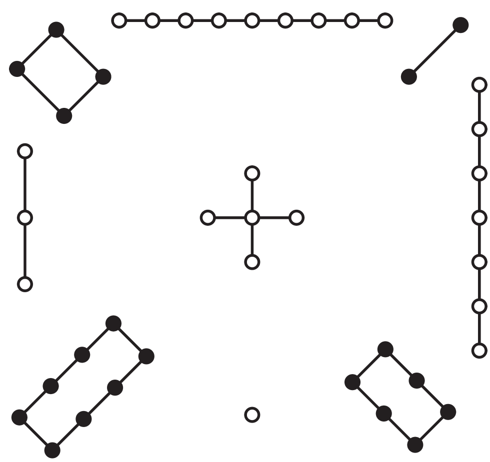

Abbildung 3: Lo Shu.

Wenn man die Anzahl der Punkte in den neun Symbolen zählt, erkennt man, dass diese die Zahlen 1, 2, 3, …, 9 repräsentieren. Ferner ist die Anzahl der Punkte in jeder der drei Zeilen, jeder der drei Spalten und in den beiden Diagonalen jeweils gleich 15. Diese Eigenschaft macht das Quadrat zu einem „magischen“. In Abb. 4 ist das gleiche Quadrat in moderner Weise dargestellt.

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Abbildung 4: Das magische 3×3-Quadrat.

Magische Quadrate markieren den Übergang vom kombinatorisch-spielerischen Experimentieren mit Mustern zu einer nüchternen Darstellung durch Zahlen. Aber auch in letzterer Form wirken magische Quadrate geheimnisvoll – vor allem deswegen, weil sie schwierig zu konstruieren sind.

Ein weiteres berühmtes magisches Quadrat mit vier Zeilen und vier Spalten findet sich in Albrecht Dürers rätselhaftem Kupferstich *Melencolia I* aus dem Jahre 1514 (s. Abb. 5).

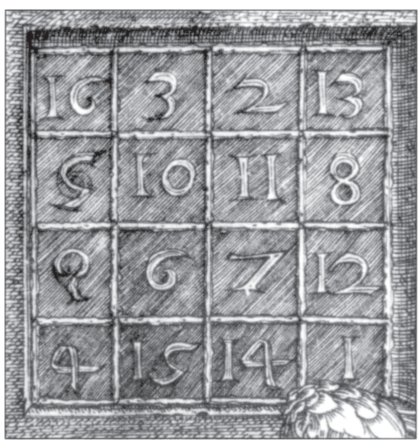

Abbildung 5: Das magische Quadrat aus Dürers *Melencolia I*.

Die Zahlen 1, …, 16 sind hier so eingetragen, dass sich in jeder Zeile, jeder Spalte und jeder Diagonalen die Summe 34 ergibt. Besonderes Augenmerk legen wir auf die mittleren Zahlen der letzten Zeile, wo wir das Entstehungsjahr 1514 des Stiches erkennen, und auf die Zahlen 4 und 1 rechts und links unten, die die Zahlen der Initialen Albrecht Dürers sind.

4. Zahlen zerlegen

Wenn man die ersten natürlichen Zahlen unter der Fragestellung „Wie viele Teiler $\neq 1$ hat sie?“ untersucht, stellt man schnell fest, dass sich die Zahlen zum einen sehr unterschiedlich verhalten und dass zum zweiten keine Systematik zu erkennen ist. Einerseits gibt es Zahlen, die viele Teiler haben (wie etwa die 12, die durch 2, 3, 4, 6 und sich selbst ohne Rest teilbar ist), andererseits findet man Zahlen, die nur durch sich selbst (und durch 1) teilbar sind, die sogenannten Primzahlen. Und schließlich beobachtet man, dass sich Zahlen beider Typen in unmittelbarer Nachbarschaft befinden können:

Zahl	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Teiler $\neq 1$	2	3	2, 4	5	2, 3, 6	7	2, 4, 8	3, 9	2, 5, 10	11	2, 3, 4, 6, 12	13

Zahlen, die viele Teiler haben, waren von jeher attraktiv, denn man konnte entsprechend viele Gegenstände flexibel auf unterschiedliche Personenanzahlen aufteilen. Diese Zahlen werden in bemerkenswerter Weise mit einem abgeschlossenen, in sich stimmigen, durch nichts zu erschütternden Ganzen identifiziert, das sich durch innere Harmonie auszeichnet. Wir werden dieses Phänomen an den Zahlen 12, 6 und 60 studieren.

4.1. Die Zwölf

Die Zwölf hat fünf echte Teiler: 2, 3, 4, 6 und 12 – so viele wie keine Zahl vor ihr. Daher eignet sich diese Zahl wunderbar als Maßeinheit: ein Dutzend. (Bei der 60 ist es ähnlich: Diese Zahl hat 12 echte Teiler, ebenfalls mehr als jede Zahl vor ihr. Daher bot sich eine Mengeneinheit für 60 Objekte an, im europäischen Mittelalter wurde diese „Schock“ genannt.)

Uns fallen viele Gesamtheiten aus 12 Objekten ein, die ein unauflösbares Ganzes darstellen: die 12 Stämme Israels, die 12 Jünger Jesu, die 12 Tierkreiszeichen, die 12 Töne der chromatischen Tonleiter.

Mathematisch zwingend taucht die Zahl 12 am Dodekaeder auf. Dies ist einer der fünf platonischen Körper, die sich durch besondere Regelmäßigkeit auszeichnen: Jede Seitenfläche ist ein reguläres n-Eck und an jeder Ecke stoßen gleich viele, gleichartige Flächen zusammen. Das Dodekaeder ist der einzige platonische Körper, der aus Fünfecken besteht (und zwar aus genau 12); alle anderen platonischen Körper sind aus Dreiecken beziehungsweise Quadraten zusammengesetzt.

Der klassische schwarz-weiße Fußball ist aus Fünfecken und Sechsecken zusammengesetzt, genauer gesagt besitzt er genau 12 Fünfecke. Allgemein kann man beweisen, dass jeder Körper, der aus Fünfecken und Sechsecken zusammengesetzt ist, immer genau 12 Fünfecke hat, während man über die Anzahl der Sechsecke keine genaue Aussage treffen kann.

Die Einteilung des Jahres in Monate war naheliegend. Der Mond und seine stetige Verwandlung vom Vollmond über den Halbmond zum fast unsichtbaren Neumond bis wieder zum Vollmond muss in Zeiten ohne elektrisches Licht ein eindrücklicher, das Leben bestimmender Rhythmus gewesen sein. Wenn man die gut 365 Tage eines Jahres durch die etwa 29,5 Tage eines Mondzyklus gutwillig teilt, erhält man 12 Monate.

In jedem Fall hat man das Gefühl, dass die zwölf Einzelelemente – bei all ihrer Verschiedenheit – eine unverbrüchliche Gemeinschaft bilden: Ein Element weniger würde als Defizit empfunden, ein Element mehr ist unvorstellbar.

4.2. Die Sechs: Die kleine Schwester der Zwölf

Auch die Zahl 6 hat viele Teiler: 1, 2, 3 und 6. Das heißt, über die Hälfte der Zahlen < 6 sind Teiler von 6. Die Sechs ist die einzige Zahl mit dieser Eigenschaft.

Aus zwei gegeneinander gedrehten Dreiecken kann man einen sechszackigen Stern, den Davidsstern, bilden.

Die große Bedeutung, die dem Sechseck in der Natur zukommt, rührt daher, dass sich in vielen Fällen „automatisch“ Parkettierungen aus Sechsecken bilden. Jeder hat das Parkett aus Sechsecken von den Bienenwaben vor dem inneren Auge. Dieses ist vollkommen gleichmäßig aus regulären Sechsecken zusammengesetzt. Insbesondere stoßen an jeder Ecke einer Sechseckzelle zwei andere Zellen an, sodass an jeder Ecke drei Sechsecke und also auch insgesamt drei Kanten zusammenlaufen. Die drei Kanten bilden drei gleich große Winkel, also jeweils Winkel von 120 Grad.

Auf diesen gleich großen Eckenwinkeln beruht die Bedeutung, die Sechsecksparkette in der Natur haben. Man kann sagen, die Natur organisiert sich automatisch in Sechseckstrukturen. Dies liegt an folgendem Phänomen: Wenn man drei weiche Klumpen (Teig, Erde, Knete, …) zusammendrückt, bildet sich zwischen je zwei Klumpen eine ebene Fläche (die von oben als Kante wirkt). Die Kanten zwischen allen drei Klumpen treffen sich in gleichgroßen Winkeln. Diese 120 Grad-Winkel bilden das Grundmaterial für Sechsecke.

Eine kleine mathematische Besonderheit der Zahl 6 führt uns noch auf ein anderes Feld. Man kann 6 schreiben als $6 = 1 \times 2 \times 3$ und $6 = 1 + 2 + 3$; die Zahl 6 ist also sowohl das Produkt als auch die Summe ihrer echten Teiler. Vor allem die letzte Eigenschaft teilt sie mit einigen wenigen anderen Zahlen; zum Beispiel ist auch 28 die Summe der echten Teiler: $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$. Zahlen mit dieser Eigenschaft nannten die griechischen Mathematiker im Umfeld von Pythagoras *vollkommen*. Man kennt bis heute keine einzige ungerade vollkommene Zahl. Die geraden vollkommenen Zahlen kennt man hingegen sehr genau. Sie sind das Produkt einer Primzahl p von der Form $p = 2^n - 1$ und dem Faktor 2^{n-1}. Zum Beispiel ergibt sich für n = 2 die Zahl $(2^2 - 1) \times 2^{2-1} = 3 \times 2 = 6$, und für n = 3 erhält man $(2^3 - 1) \times 2^{3-1} = 7 \times 4 = 28$.

Primzahlen der Form 2^n-1 nennt man „Mersennesche Primzahlen“ (nach dem französischen Priester und Mathematiker Marin Mersenne, 1588–1648). Man kennt derzeit nur 51 Mersennesche Primzahlen.

Augustinus schreibt in seiner berühmten Schrift *Gottesstaat*: „Diese Werke [die Schöpfung] wurden aber […] in sechs Tagen […] vollendet, und zwar wegen der Vollkommenheit der Sechszahl. Nicht als hätte Gott eines Zeitraums bedurft und könnte nicht alles zugleich schaffen, […] sondern weil durch die Sechszahl die Vollkommenheit der Werke angezeigt wird.“[6]

4.3. Die Sechzig: Eine wahrhaft runde Zahl

Irgendwann um das Jahr 2.000 v. Chr. hatte jemand in Mesopotamien eine geniale Idee. Eine Idee, ohne die weite Teile unserer Technik und Zivilisation nicht existieren würden. Eine Idee, die für uns aber so selbstverständlich ist, dass sie uns nicht einmal als Idee bewusst ist. Die Idee war die Erfindung des Stellenwertsystems.

Ein Stellenwertsystem kommt mit einem endlichen Satz von Ziffern aus (im Dezimalsystem sind das die zehn Ziffern 0, 1, …, 9). Mittels dieser Ziffern kann man jede natürliche Zahl darstellen. Alle Rechenoperationen (z. B. Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division) werden auf das Rechnen mit Ziffern (also sehr kleinen Zahlen) zurückgeführt.

Das erste Stellenwertsystem, das vor 2.000 Jahren in Mesopotamien erfunden wurde, ist allerdings kein System zur Basis 10, sondern ein System zur Basis 60. Es hat also die Ziffern 1, 2, …, 59.

Die Gründe, weshalb die Babylonier die Basis 60 gewählt haben, sind historisch nicht überliefert, wir sind also auf Spekulationen und Vermutungen angewiesen. Es werden vor allem zwei Argumentationslinien geltend gemacht: Zum einen passt die Zahl Sechzig gut zu einem Kalender. Denn das Jahr hat ungefähr 360 Tage, die man in 60 Teile einteilen könnte. Zum anderen hat die Zahl Sechzig sehr viele Teiler: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30; so viele wie keine Zahl vor der Sechzig. Das ist vor allem nützlich beim Rechnen mit „Kommazahlen“, also Bruchteilen. Im Dezimalsystem können wir nur die Brüche $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{5}$ schön als Dezimalbruch darstellen, nämlich als 0,5 und 0,2. Das liegt daran, dass 2 und 5 Teiler von 10 sind. Im babylonischen Hexagesimalsystem können daher die Brüche $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{15}$, $\frac{1}{20}$ und $\frac{1}{30}$ schön mit nur einer Nachkommastelle geschrieben werden. Daher, so die Vorstellung, konnten die Babylonier einen Großteil der praktischen Bruchrechnung durch das Rechnen mit „Kommazahlen“ ersetzen.

Sei dem wie es wolle, jedenfalls prägt das mesopotamische 60-er System bis heute die Weise, wie wir die Uhrzeit angeben (60 Minuten und 60 Sekunden) und wie wir Winkel, Längen- und Breitengrade messen.

---

[6] Thimme 1997, XI 50.