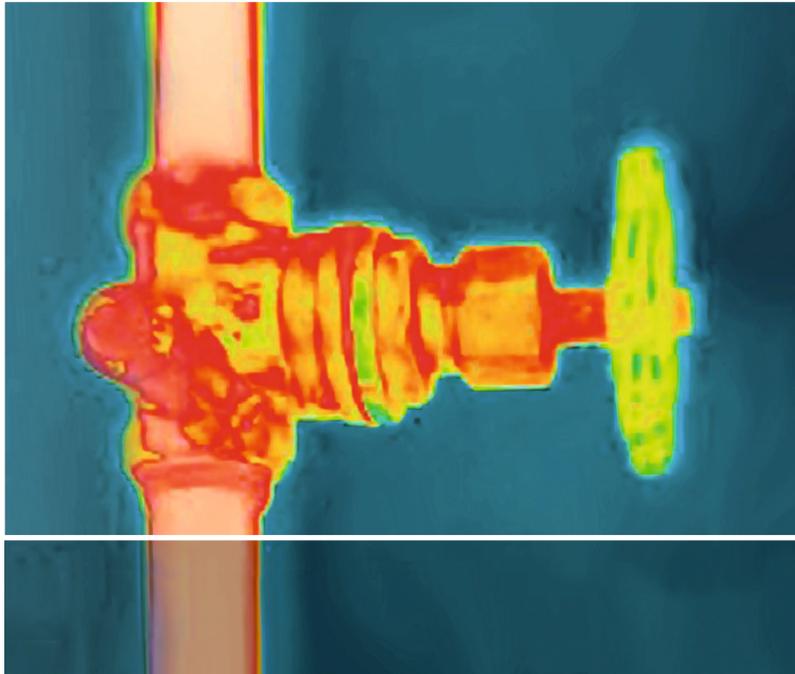


Rudi Marek  
Klaus Nitsche

# Praxis der Wärmeübertragung

Grundlagen – Anwendungen – Übungsaufgaben



5., überarbeitete Auflage

HANSER

### ► I. Grundlagen

- Wiederholung und Vertiefung verständnisrelevanter Zusammenhänge
- übersichtliche Zusammenstellung
- ausführliche verbale Erläuterungen
- anwendungsrelevante Hinweise
- Referenzierung von Gleichungen, Bildern und Tabellen
- mehr als eine Formelsammlung



### ► II. Anwendungen

- umfassend und praxisrelevant
- Anwendung und Vertiefung der Grundlagen
- vollständig ausgearbeitet
- nachvollziehbarer Lösungsweg mit detaillierten Einzelschritten
- verbale Erläuterung formelmäßiger Zusammenhänge
- Beschreibung von Umformschritten
- alternative Lösungswege
- physikalische Interpretationen
- Diskussion der Ergebnisse
- Plausibilitätsprüfungen
- Zusammenfassen wesentlicher Erkenntnisse



### ► III. Übungsaufgaben

- Anwendung der erworbenen Lösungskompetenz wärmetechnischer Fragestellungen
- zur eigenständigen Bearbeitung
- als Lernzielkontrolle
- bei Schwierigkeiten in der Lösung Rückgriff auf vorausgegangene Beispiele
- Ergebnisse mit ausführlichen Lösungshinweisen im Anhang zur Erfolgskontrolle

## Konzept

Dieses Buch stellt den **Wissensgewinn durch praxisrelevante Beispiele** in den Vordergrund und unterscheidet sich dadurch im Ansatz von klassischen Lehrbüchern. Das dreistufige Konzept „Grundlagen – Anwendungen – Übungsaufgaben“ spannt dabei in 9 Kapiteln einen Bogen von den Grundlagen der Wärmeübertragung und der praktischen Aufstellung und Lösung von Energiebilanzen, über die Wärmeleitung und Konvektion bis zur Wärmestrahlung. Das abschließende Kapitel 9 vereint komplexere Aufgaben verschiedener Themengebiete und zielt auf die integrative Problemlösefähigkeit ab. Auf eine ausführliche und sorgfältige Darstellung der Lösungswege und die Erläuterung der relevanten Zusammenhänge wird besonderer Wert gelegt. Dazu stehen auf der Homepage des Verlags ausführliche Lösungen als geschützter Download zur Verfügung (Link auf S. 161 unten).

## Benutzungshinweise

Zunächst empfiehlt sich die sorgfältige Durcharbeitung bzw. Wiederholung der Grundlagen des jeweiligen Kapitels. In einem zweiten Schritt sollte das erworbene Wissen anhand der dargestellten ausführlichen Beispiele angewendet und vertieft werden. Die Aufgabensammlung in jedem Kapitel ermöglicht in einem dritten Schritt die selbstständige Überprüfung der erworbenen Kompetenzen. Sollten bei der Lösung Verständnisschwierigkeiten auftreten, empfiehlt sich als Zwischenschritt die eigenständige Nachrechnung der vorangegangenen passenden Beispiele ohne Zuhilfenahme des dargestellten Lösungsweges. Die zum Aufgabenteil in den Lösungsdateien angegebenen Ergebnisse und Lösungshinweise ermöglichen eine weitere Erfolgskontrolle. Für Leser aus der Praxis lohnt auch ein Blick in das Stichwortverzeichnis. Eventuell wurde ihr Problem sogar hier diskutiert.

## Symbolik

In Bezug auf eine durchgängige und einprägsame Darstellung findet die folgende Symbolik Verwendung:

	Wärmestrom
	Massenstrom
	Strahlung
	adiabate Systemgrenze
	Informationen und allgemeine Hinweise
	Hinweise auf Fallstricke und fehlerträchtige Stellen
	Verweise auf Excel-Programme im Downloadbereich
	Downloadbereich auf der Homepage des Verlags

## Berechnungssoftware

Im geschützten Downloadbereich des Verlags stehen umfassende ausgewählte Programmbeispiele der weit verbreiteten Software Microsoft Excel<sup>®</sup> zur Verfügung, die eine anschauliche und interaktive Vertiefung ermöglichen. Insbesondere kann damit der Einfluss der Eingangsparameter auf das Ergebnis des jeweiligen Problems untersucht werden, was das Verständnis der komplexen Zusammenhänge weiter fördert. Eine Anpassung der Spreadsheets für eigene Anwendungen ist leicht möglich, woraus insbesondere in der Praxis Tätige Gewinn ziehen können.



Ähnlichkeiten mit noch lebenden oder bereits verstorbenen Personen, materiellen oder immateriellen Wesen, geschützten Bezeichnungen, Markennamen, eingetragenen Warenzeichen o. ä. sind nicht beabsichtigt und wären rein zufällig.

# Lösungsmethodik von Wärmeübertragungsvorgängen

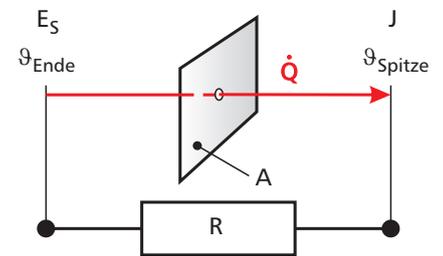
Die folgende systematische Vorgehensweise hat sich bei der Lösung von Fragestellungen der Wärmeübertragung bewährt:

1. Lesen Sie die Fragestellung sorgfältig durch und formulieren Sie das Problem in eigenen Worten unter Benutzung der zentralen Begriffe, Fachausdrücke und Größen. Dies setzt voraus, dass Sie die grundlegenden Begrifflichkeiten kennen und diese auch sprachlich zielgerichtet verwenden können. Die Problemformulierung mit eigenem Wortlaut (Verbalisierung) bietet den immensen Vorteil, dass Verständnisdefizite frühzeitig entdeckt werden.
2. Erkennen Sie dabei bekannte Größen und Umstände und identifizieren Sie die gesuchten Größen. Erfassen Sie dabei auch Größen, die jeweils konstant bleiben.
3. Fertigen Sie eine möglichst realitätsnahe Skizze der vorliegenden Problemstellung mit allen relevanten Informationen an. Bezeichnen Sie den an der Systemgrenze auftretenden Energie- und Massenfluss unter Wahl einer geeigneten Vorzeichenkonvention (vgl. Randspalte) mit beschrifteten Pfeilen und tragen Sie auch Speicher- und Quellterme in die Skizze ein. Kennzeichnen Sie bekannte und unbekannte Größen mit verschiedenen Farben. Wählen Sie für unterschiedliche Zeiten bei instationären Vorgängen sowie für unterschiedliche Orte bei stationären Problemen eine geeignete Nomenklatur.
4. Stellen Sie die zur Problemvereinfachung getroffenen Annahmen zusammen und plausibilisieren Sie diese entsprechend. Nutzen Sie ggf. ingenieurmäßige Annahmen oder Erfahrungswerte für unbekannte Größen.
5. Stellen Sie die benötigten Stoffwerte unter Angabe der verwendeten Quellen zusammen. Beachten Sie dabei eventuelle Druck- und Temperaturabhängigkeiten. Vielfach ist eine lineare Interpolation von Tabellenwerten in der Praxis ausreichend. Eine erste grobe Lösung lässt sich meist mit konstanten Stoffwerten gewinnen.
6. Formulieren Sie alle relevanten physikalischen Gesetze und Prinzipien. Vereinfachen Sie diese unter Beachtung der getroffenen Annahmen und der bekannten Größen. Konkrete Hinweise dazu enthalten die Arbeitshilfen im Anhang. Prüfen Sie, ob die Anzahl der verfügbaren Berechnungsgleichungen der Anzahl der Unbekannten entspricht und das Problem prinzipiell lösbar ist.
7. Berechnen Sie die Unbekannten durch Einsetzen der bekannten Größen bzw. Lösung der auftretenden Gleichungen und Differenzialgleichungen. Formen Sie die jeweiligen Beziehungen so weit wie möglich symbolisch um und setzen Sie Zahlenwerte erst ganz am Schluss ein.
8. Stellen Sie das Ergebnis mit einer angemessenen Genauigkeit dar und überprüfen Sie die Dimensionen der berechneten Größen.
9. Überprüfen Sie die Ergebnisse auf Plausibilität und Sinnhaftigkeit. Sondern Sie unmögliche Ergebnisse aus und nutzen Sie dies als Ausgangspunkt zur Fehlersuche.
10. Diskutieren Sie die Ergebnisse bezüglich der daraus ableitbaren Folgerungen. Überprüfen Sie kritisch die getroffenen Annahmen. Übertragen Sie die Ergebnisse auf Ihnen bekannte ähnliche Situationen. Prüfen Sie die Sensitivität der Ergebnisse auf bestimmte Eingangsparameter mittels EDV-Unterstützung.

## kennen ≠ können

Ähnlich, aber nicht gleich: Ein kleiner Buchstabe macht einen großen Unterschied!

Formale Regel zur Vorzeichenbestimmung von Wärmeflüssen und Temperaturdifferenzen:



In Analogie zum Fourier'schen Wärmeleitungsansatz

$$\dot{Q}_\lambda = -\lambda \cdot A \cdot \frac{\vartheta_{\text{Spitze}} - \vartheta_{\text{Ende}}}{|\Delta a|}$$

wird **Anfängern** als formale Regel für Wärmeströme infolge von Konvektion

$$\dot{Q}_\alpha = -\alpha \cdot A \cdot (\vartheta_{\text{Spitze}} - \vartheta_{\text{Ende}})$$

bzw. infolge von Strahlung

$$\dot{Q}_\epsilon = -\sigma_{12} \cdot A_1 \cdot (T_{\text{Spitze}}^4 - T_{\text{Ende}}^4)$$

bzw. bei Oberflächenwiderständen für Strahlung

$$\dot{Q} = -\frac{1}{R} \cdot (J - E_S)$$

empfohlen. Ist dann eine entsprechende Sicherheit in der Anwendung der grundlegenden Wärmetransportgleichungen vorhanden, können die Wärmeflüsse und Temperaturdifferenzen auch **vorzeichenrichtig** angesetzt werden, was physikalisch anschaulicher ist.

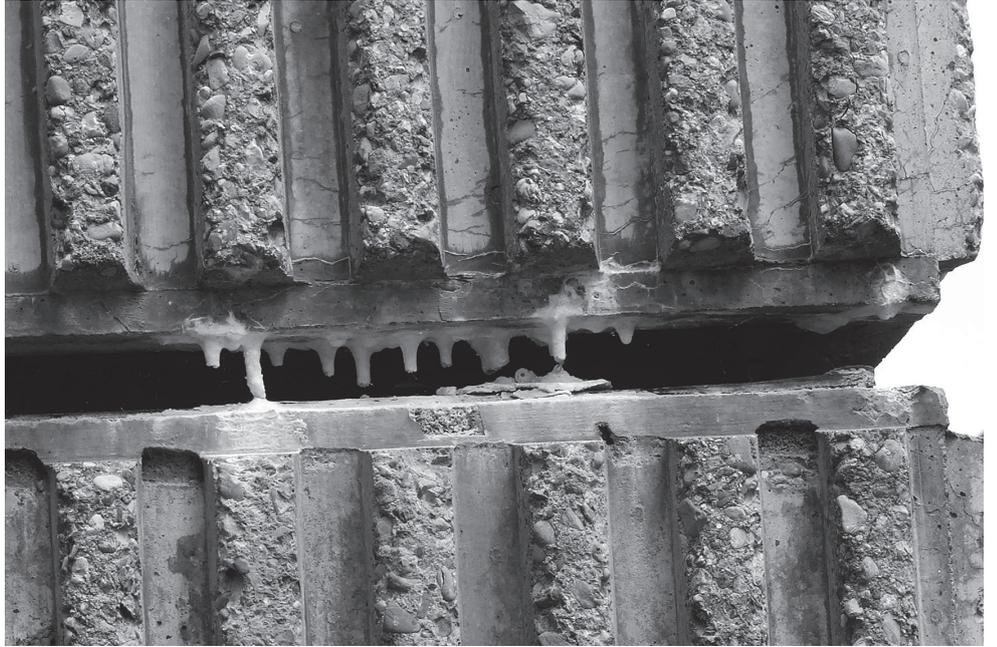
Ein negativer Wärmestrom im Ergebnis bedeutet eine Wärmestromrichtung entgegen des Ansatzes bzw. einen Wärmefluss entgegen der eingetragenen Richtung.



**Blieben Sie auf dem Laufenden!**

Hanser Newsletter informieren Sie regelmäßig über neue Bücher und Termine aus den verschiedenen Bereichen der Technik. Profitieren Sie auch von Gewinnspielen und exklusiven Leseproben. Gleich anmelden unter

**[www.hanser-fachbuch.de/newsletter](http://www.hanser-fachbuch.de/newsletter)**



Steter Tropfen höhlt den Stein!

---

*Rudi Marek*

*Klaus Nitsche*

# Praxis der Wärmeübertragung

Grundlagen – Anwendungen – Übungsaufgaben

5., überarbeitete Auflage

Mit 778 Abbildungen, 62 Tabellen, 50 vollständig durchgerechneten Beispielen sowie 168 Übungsaufgaben mit über 300 Seiten ausführlicher Lösungen zum Download

HANSER

---

## **Autoren:**

Prof. Dr.-Ing. Rudi Marek  
Prof. Dr.-Ing. Klaus Nitsche, M. Sc.  
Technische Hochschule Deggendorf  
Fakultät Bauingenieurwesen und Umwelttechnik  
Fakultät Maschinenbau und Mechatronik

Alle in diesem Buch enthaltenen Informationen wurden nach bestem Wissen zusammengestellt und mit Sorgfalt geprüft und getestet. Dennoch sind Fehler nicht ganz auszuschließen. Aus diesem Grund sind die im vorliegenden Buch enthaltenen Informationen mit keiner Verpflichtung oder Garantie irgendeiner Art verbunden. Autor(en, Herausgeber) und Verlag übernehmen infolgedessen keine Verantwortung und werden keine daraus folgende oder sonstige Haftung übernehmen, die auf irgendeine Weise aus der Benutzung dieser Informationen – oder Teilen davon – entsteht.

Ebenso wenig übernehmen Autor(en, Herausgeber) und Verlag die Gewähr dafür, dass die beschriebenen Verfahren usw. frei von Schutzrechten Dritter sind. Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek:

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt.

Alle Rechte, auch die der Übersetzung, des Nachdruckes und der Vervielfältigung des Buches, oder Teilen daraus, vorbehalten. Kein Teil des Werkes darf ohne schriftliche Genehmigung des Verlages in irgendeiner Form (Fotokopie, Mikrofilm oder ein anderes Verfahren) – auch nicht für Zwecke der Unterrichtsgestaltung – reproduziert oder unter Verwendung elektronischer Systeme verarbeitet, vervielfältigt oder verbreitet werden.

© 2019 Carl Hanser Verlag München

Internet: [www.hanser-fachbuch.de](http://www.hanser-fachbuch.de)

Lektorat: Dipl.-Ing. Natalia Silakova

Herstellung: Anne Kurth

Einbandgestaltung: Max Kostopoulos

Titelbild: © istockphoto.com/Marccophoto

Coverkonzept: Marc Müller-Bremer, [www.rebranding.de](http://www.rebranding.de), München

Satz: Prof. Dr.-Ing. Rudi Marek

Druck und Bindung: Firmengruppe Appl, aprinta druck Wemding

Printed in Germany

ISBN 978-3-446-46124-6

E-Book-ISBN 978-3-446-46125-3

## Vorwort

Die Wärmeübertragung gehört traditionell zu den eher als schwierig empfundenen Fächern im Studium des Maschinenbaus und der Verfahrenstechnik. Zum einen verlangt sie wie die Thermodynamik eine analytische und abstrakte Denkweise in Systemen, Systemgrenzen, Systemvariablen und Bilanzen, die den Studierenden zunächst schwer fällt. Die einzelnen Mechanismen der Wärmeübertragung sind zudem meist miteinander gekoppelt und teilweise nichtlinear. Zum anderen setzt die Lösung wärmetechnischer Fragestellungen die sichere und zielgerichtete Anwendung mathematischer Methoden voraus. Auch der heute weit verbreitete Einsatz von Computern und Programmen zur numerischen Berechnung und Simulation von Wärmetransportvorgängen verlangt fundierte Grundkenntnisse und den Einsatz analytischer Methoden zur Verifikation und Plausibilitätsprüfung der Ergebnisse.

Ein vertieftes Verständnis der Wärmeübertragung erfordert ein intensives Studium der Grundlagen und der Wärmeübertragungsmechanismen. Wie gut diese theoretischen Kenntnisse wirklich verstanden wurden, zeigt die erfolgreiche und zielorientierte Lösung praktischer Anwendungen und Aufgabenstellungen. Auf diesem teilweise beschwerlichen Weg will das reichlich illustrierte Werk aus den umfangreichen Lehrerfahrungen der Autoren an der Technischen Hochschule Deggendorf (THD) die Studierenden unterstützen und leiten. Die Leser finden zum Einstieg 50 ausführlich vorgerechnete Beispiele sowie 168 Übungsaufgaben mit mehr als 300 Seiten Lösungen zur Vertiefung, Prüfungsvorbereitung und Nachbereitung von Lehrveranstaltungen. Gleichzeitig liefern sie auch Anregungen, Informationen und wertvolle Hinweise für in der Praxis tätige Ingenieure, Physiker und Techniker. Zahlreiche umfassende und leicht erweiterbare MS Excel<sup>®</sup>-Programme ermöglichen eigene Berechnungen und Parametervariationen für Sensitivitätsanalysen.

Die mit der 4. Auflage begonnenen Präzisierungen und Ergänzungen wurden fortgesetzt (Wärmedurchgang in Teilgeometrien, Wärmestrom bei Rippen und Nadeln, Dreieck-Stern-Transformation im Helligkeitsverfahren, Periodische Randbedingungen beim HUK, RB 2. Art bei NGZ etc.). Die bewährten Arbeitshilfen wurden um drei neue Abschnitte mit den Schwerpunkten Instationäre Wärmeleitung, Mathematische Grundlagen und Methoden sowie Wirtschaftlichkeit von Wärmedämmmaßnahmen erweitert. 32 neue Aufgaben konnten aufgenommen und die MS Excel<sup>®</sup>-Programme erweitert werden. Die umfangreichen Lösungen und die Programmcodes stehen auf der Homepage des Verlags zum Download bereit.

Dem Carl Hanser Verlag, besonders Frau Dipl.-Ing. *Natalia Silakova* und ihrer Assistentin *Christina Kubiak* sowie Herrn *Frank Katzenmayer* danken wir für die gute Zusammenarbeit und das offene Ohr für unsere Wünsche. Bei zahlreichen Lesern aus der Praxis sowie von anderen Hochschulen und Ausbildungseinrichtungen bedanken wir uns für das erhaltene positive Feedback und die zahlreichen Hinweise und Anregungen. Die Studierenden der Technischen Hochschule Deggendorf lieferten abermals mit ihren Ideen, Fragen und fruchtbaren Diskussionen in unseren Lehrveranstaltungen und den Kursforen wertvolle Beiträge. Herr cand. bac. *Tobias Bürde* hat uns mit seiner Korrekturlesung gewinnbringend unterstützt. Großer Dank gebührt auch wieder unseren Familien für den Verzicht zugunsten des „MaNi“. Möge auch die 5. Auflage den Leserinnen und Lesern viele Erkenntnisgewinne und positive Aha-Erlebnisse bescheren. Für Fehlermeldungen, konstruktive Anregungen sowie Verbesserungsvorschläge sind wir stets dankbar.

Deggendorf, August 2019

*Rudi Marek*  
*Klaus Nitsche*

»Longum iter est per praecepta,  
breve et efficax per exempla.«  
»Lang ist der Weg durch Lehren,  
kurz und erfolgreich durch Beispiele.«  
(L.A. Seneca, Epistulae morales ad Lucilium, 6)

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Grundlagen der Wärmeübertragung</b>	<b>15</b>
1.1	Praktische Bedeutung . . . . .	15
1.2	Wärme, Wärmestrom, Wärmestromdichte . . . . .	16
1.3	Temperatur und Temperaturfelder . . . . .	17
1.4	Wärmetransportmechanismen . . . . .	18
1.4.1	Arten des Wärmetransports . . . . .	19
1.4.2	Wärmeleitung . . . . .	19
1.4.3	Konvektion . . . . .	20
1.4.4	Wärmestrahlung . . . . .	21
1.5	Fourier'sche Wärmeleitungsgleichung . . . . .	22
1.5.1	Mehrdimensionale instationäre Wärmeleitung mit inneren Wärmequellen . . . . .	22
1.5.2	Koordinatenunabhängige Schreibweise . . . . .	23
1.5.3	Eindimensionale instationäre Wärmeleitung . . . . .	23
1.5.4	Stationäre Wärmeleitung mit Wärmequellen . . . . .	23
1.5.5	Stationäre Wärmeleitung ohne Wärmequellen . . . . .	23
1.6	Anfangs- und Randbedingungen . . . . .	24
1.6.1	Anfangsbedingungen . . . . .	24
1.6.2	Randbedingungen . . . . .	24
1.6.3	Koppelbedingungen . . . . .	25
1.7	Elektrische Analogie . . . . .	25
1.7.1	Thermische Widerstände und Leitwerte . . . . .	26
1.7.2	Spezifische thermische Widerstände und Leitwerte . . . . .	26
1.7.3	Wärmedurchgangskoeffizient und Wärmedurchgangswiderstand . . . . .	27
1.7.4	Reihenschaltung thermischer Widerstände . . . . .	27
1.7.5	Parallelschaltung thermischer Widerstände . . . . .	28
1.7.6	Thermischer Kontaktwiderstand . . . . .	28
1.7.7	3/4-Regel . . . . .	28
1.8	Beispiele . . . . .	29
1.9	Aufgaben zum Selbststudium . . . . .	45
<b>2</b>	<b>Massen- und Energiebilanzen</b>	<b>49</b>
2.1	Grundlagen . . . . .	49
2.1.1	System . . . . .	49
2.1.2	Kontinuitätsgleichung . . . . .	49
2.1.3	Erster Hauptsatz der Thermodynamik . . . . .	50
2.1.4	Hinweise zur Aufstellung von Energiebilanzen . . . . .	57
2.1.5	Innere Energie und Enthalpie . . . . .	59
2.1.6	Enthalpieströme . . . . .	59
2.2	Beispiele . . . . .	61
2.3	Aufgaben zum Selbststudium . . . . .	94

<b>3 Stationäre Wärmeleitung</b>	<b>99</b>
3.1 Grundlagen	99
3.1.1 Péclet-Gleichungen für mehrschichtige Bauteile	99
3.1.2 Mehrschichtige ebene Platte	99
3.1.3 Zylinderschalen	99
3.1.4 Kugelschalen	100
3.1.5 Oberflächen- und Schichttemperaturen	101
3.1.6 Stationäre eindimensionale Wärmeleitung mit inneren Wärmequellen	101
3.1.7 Ebene Platte mit Wärmequellen	101
3.1.8 Vollzylinder und Zylinderschale mit Wärmequellen	101
3.1.9 Vollkugel und Kugelschale mit Wärmequellen	102
3.1.10 Stationäre zweidimensionale Wärmeleitung ohne innere Wärmequellen	102
3.2 Beispiele	106
3.3 Aufgaben zum Selbststudium	117
<b>4 Rippen und Nadeln</b>	<b>120</b>
4.1 Grundlagen	120
4.1.1 Kenngrößen von Rippen	120
4.1.2 Universelle Rippendifferenzialgleichung	121
4.1.3 Rechteckrippen	121
4.1.4 Zylindrische Nadeln	122
4.1.5 Kreisringrippen	122
4.1.6 Weitere Formen von Rippen und Nadeln	122
4.1.7 Optimale Rippen	124
4.1.8 Thermischer Widerstand von Rippen und Nadeln	124
4.2 Beispiele	125
4.3 Aufgaben zum Selbststudium	136
<b>5 Instationäre Wärmeleitung</b>	<b>138</b>
5.1 Grundlagen	138
5.1.1 Dimensionslose Kennzahlen	138
5.1.2 Dimensionslose Grundgleichung	139
5.1.3 Dimensionslose Anfangs- und Randbedingungen	140
5.1.4 Modelle der instationären Wärmeleitung	141
5.1.5 Ideal gerührter Behälter	143
5.1.6 Halibunendlicher Körper	144
5.1.7 Exakte Lösung für Platte, Zylinder und Kugel	147
5.1.8 Näherungslösung für große Zeiten	149
5.1.9 Kurzzeitznäherung des erweiterten ideal gerührten Behälters für RB 3. Art	151
5.1.10 Produktansatz bei mehrdimensionaler Wärmeleitung	155
5.2 Beispiele	158
5.3 Aufgaben zum Selbststudium	181

<b>6 Konvektion</b>	<b>185</b>
6.1 Grundlagen	185
6.1.1 Arten von Konvektion	185
6.1.2 Ähnlichkeitstheorie und dimensionslose Kennzahlen	186
6.1.3 Erzwungene Konvektion	187
6.1.4 Längs angeströmte ebene Platte und Kreisscheibe	187
6.1.5 Quer und schräg angeströmte Zylinder und Profile	187
6.1.6 Quer angeströmte Profile	188
6.1.7 Umströmte Kugel	188
6.1.8 Einlaufproblematik bei der Rohr- und Kanalströmung	188
6.1.9 Vollständig ausgebildete laminare Rohrströmung	189
6.1.10 Thermischer Einlauf bei laminarer Rohrströmung	189
6.1.11 Hydrodynamischer und thermischer Einlauf bei laminarer Rohrströmung	190
6.1.12 Vollständig ausgebildete turbulente Rohrströmung	190
6.1.13 Ausgebildete Rohrströmung im Übergangsbereich	191
6.1.14 Nichtkreisförmige Querschnitte	191
6.1.15 Fluidtemperaturänderung in Strömungsrichtung	191
6.1.16 Freie Konvektion	192
6.1.17 Vertikale ebene Platte	193
6.1.18 Vertikaler Zylinder	193
6.1.19 Geneigte ebene Platte	193
6.1.20 Horizontale ebene Platte und Kreisscheibe	194
6.1.21 Horizontaler Zylinder	194
6.1.22 Kugel	194
6.1.23 Freie Konvektion in geschlossenen Fluidschichten	195
6.1.24 Horizontale ebene Schichten	195
6.1.25 Geneigte ebene Schichten	196
6.1.26 Vertikale ebene Schichten	196
6.1.27 Freie Konvektion in offenen Fluidschichten	197
6.1.28 Senkrechte Kanäle	197
6.1.29 Geneigte Kanäle	198
6.1.30 Parallele vertikale Platten	199
6.1.31 Mischkonvektion an umströmten Körpern	199
6.2 Beispiele	201
6.3 Aufgaben zum Selbststudium	214
<b>7 Wärmeübertrager</b>	<b>216</b>
7.1 Grundlagen	216
7.1.1 Begriffe und Nomenklatur	216
7.1.2 Bauformen von Wärmeübertragern	217
7.1.3 Einseitig konstante Fluidtemperatur	217
7.1.4 Beidseitige Temperaturänderung	218
7.1.5 Wärmeübertrager-Hauptgleichung	219
7.1.6 Gleichstrom-Wärmeübertrager	219
7.1.7 Gegenstrom-Wärmeübertrager	220
7.1.8 Kreuzstrom-Wärmeübertrager	221
7.1.9 Wärmewirkungsgrade von Wärmeübertragern	222
7.1.10 Korrekturfaktor	223
7.1.11 Wärmeübertrager mit Phasenübergang	223
7.1.12 Ablagerungen (Fouling)	223
7.2 Beispiele	224
7.3 Aufgaben zum Selbststudium	236

<b>8 Wärmestrahlung</b>	<b>238</b>
8.1 Grundlagen	238
8.1.1 Wellenlängenbereiche der Strahlung	238
8.1.2 Modell des schwarzen Körpers	239
8.1.3 Strahlungsfunktion des schwarzen Körpers	240
8.1.4 Strahlungsintensität und emittierte Strahlung	241
8.1.5 Auftreffende Strahlung	242
8.1.6 Helligkeit	242
8.1.7 Spektrale Kenngrößen	243
8.1.8 Emissionsgrad	244
8.1.9 Absorption, Reflexion und Transmission	245
8.1.10 Graue und selektive Strahler	246
8.1.11 Kirchhoff'sches Gesetz	248
8.1.12 Helligkeit grauer opaker Oberflächen	249
8.1.13 Oberflächenwiderstand für Strahlung	249
8.1.14 Raumwiderstand zweier strahlender Oberflächen	250
8.1.15 Helligkeitsverfahren für Wärmestrahlungsprobleme	251
8.1.16 Wärmestrahlung zwischen zwei Oberflächen	252
8.1.17 Wärmestrahlung zwischen drei Oberflächen	253
8.1.18 Wärmeübergangskoeffizient für Strahlung	254
8.1.19 Strahlungsaustauschkoeffizient	255
8.1.20 Einstrahlzahlen	255
8.1.21 Einstrahlzahlen zwischen zwei Flächen	255
8.1.22 Eigeneinstrahlzahlen	257
8.1.23 Einstrahlzahlen-Algebra	257
8.1.24 Methode der gekreuzten Fäden	259
8.1.25 Einstrahlzahlen einfacher Konfigurationen	259
8.1.26 Strahlungsschutzschirme	263
8.2 Beispiele	266
8.3 Aufgaben zum Selbststudium	283
<b>9 Aufgaben aus verschiedenen Themengebieten</b>	<b>286</b>
<b>10 Anhang</b>	<b>331</b>
10.1 Gauß'sche Fehlerfunktion	331
10.2 Bessel-Funktionen	332
10.2.1 Bessel-Funktionen 1. Art	332
10.2.2 Modifizierte Bessel-Funktionen 1. und 2. Art	332
10.2.3 Zahlentafeln der Bessel-Funktionen	334
10.3 Näherungslösung der eindimensionalen instationären Wärmeleitung	338
10.4 Stoffwerte	343
<b>11 Lösungen der Übungsaufgaben</b>	<b>↻</b>
<b>Literatur</b>	<b>345</b>
<b>Arbeitshilfen</b>	<b>346</b>
<b>Index</b>	<b>353</b>

# Formelzeichen und Abkürzungen

## ► Lateinische Buchstaben

Symbol	Dimension	Bedeutung
$\overset{!}{=}$	–	muss gleich sein (Forderung)
$(\dots)$	problembezogen	Mittelwert einer Größe
$(\dots)^T$	problembezogen	transponierter Vektor (Zeilenvektor)
$a$	–	Absorptionskoeffizient (Absorptionsgrad)
$a$	$\text{m}^2/\text{s}$	Temperaturleitfähigkeit
$\mathbf{A}$	–	Koeffizienten-Matrix (Helligkeitsverfahren)
$A$	$\text{m}^2$	(wärmeübertragende) Fläche
$\hat{A}$	K	Temperaturamplitude (HUK mit periodischer RB)
$a_2, a_4$	–	Koeffizienten des Temperaturprofils (EIGB)
$a_{\text{sol}}$	–	solarer Absorptionskoeffizient
$A_{\perp}$	$\text{m}^2$	Querschnittsfläche bei der freien Konvektion in Kanälen
$A_{\text{O}}$	$\text{m}^2$	Oberfläche
$A_{\text{U}}$	$\text{m}^2$	Umfangsfläche eines Rohres oder Kanals
$b$	m	Breite
$\vec{b}$	$\text{W}/\text{m}^2$	Vektor der rechten Seite (Helligkeitsverfahren)
$B$	m	Breite
$Bi$	–	Biot-Zahl
$Bi^*$	–	modifizierte Biot-Zahl (NGZ)
$Bi_{\delta}$	–	modifizierte Biot-Zahl (HUK)
$\tilde{Bi}$	–	mit $\tilde{L}$ gebildete Biot-Zahl
$c$	$\text{J}/(\text{kg K})$	spezifische Wärmekapazität
$c$	$\text{m}/\text{s}$	Schallgeschwindigkeit
$c$	$\text{m}/\text{s}$	Wellenausbreitungsgeschwindigkeit
$C$	problembezogen	Konstante
$c_p$	$\text{J}/(\text{kg K})$	spezifische isobare Wärmekapazität
$c_v$	$\text{J}/(\text{kg K})$	spezifische isochore Wärmekapazität
$C_{1,2}$	$\text{W}/(\text{m}^2 \text{K}^4)$	Strahlungsaustauschkoeffizient zwischen den Oberflächen 1 und 2
$C_m$	–	Konstante für die Zentrumstemperatur (NGZ)
$C_q$	–	Konstante für die kalorische Mitteltemperatur (NGZ)
$C_w$	–	Konstante für die Wandtemperatur (NGZ)
$d$	m	Dicke, Tiefe
$d$	–	gewöhnlicher Differenzialoperator
$d\omega$	sr	differenzieller Raumwinkel
$D$	m	Durchmesser
$D_{\text{H}}$	m	hydraulischer Durchmesser
$\text{div}$	$1/\text{m}$	Divergenz
$e$	m	Exzentrizität
$E$	$\text{W}/\text{m}^2$	Emission
$E$	J	Gesamtenergie
$E$	–	Quadrat des ersten Eigenwerts (NGZ)
$\dot{e}_q$	$\text{W}/\text{m}^3$	volumenbezogene Dichte innerer Wärmequellen
$\text{erf}(x)$	–	(Gauß'sche) Fehlerfunktion (error function)
$\text{erfc}(x)$	–	komplementäre Fehlerfunktion
$\exp(x)$	–	Exponentialfunktion
$\dot{E}_q$	W	Leistung innerer Wärmequellen
$E_{\text{S}}$	$\text{W}/\text{m}^2$	Emission des schwarzen Körpers
$E_{\text{S},\lambda}$	$\text{W}/(\text{m}^2 \mu\text{m})$	spektrale Emission des schwarzen Körpers
$f$	Hz	Frequenz
$F$	–	Korrekturfaktor bei Wärmeübertragern
$f_{\lambda}$	–	Strahlungsfunktion des schwarzen Körpers
$f_j$	–	Flächenanteil der Fläche $j$
$f(x)$	–	(beliebige) Funktion
$Fo$	–	Fourier-Zahl
$\tilde{Fo}$	–	mit $\tilde{L}$ gebildete Fourier-Zahl
$Fo^*$	–	Grenzwert der Fourier-Zahl für große Zeiten (NGZ)
$\hat{Fo}$	–	Grenzwert der Fourier-Zahl für sehr kurze Zeiten (HUK)
$\widehat{\widehat{Fo}}$	–	Grenzwert der Fourier-Zahl für kurze Zeiten (EIGB)
$g$	$\text{m}/\text{s}^2$	Schwerebeschleunigung ( $g = 9,81 \text{ m}/\text{s}^2$ )

Symbol	Dimension	Bedeutung
$G$	$W/m^2$	auftreffende Strahlung
$G_{el}$	S	elektrischer Leitwert
$G_{th}$	$W/K$	thermischer Leitwert
$Gr$	–	Grashof-Zahl
$Gr_s$	–	mit der Spaltweite $s$ gebildete Grashof-Zahl
<b>grad</b>	$1/m$	Gradient
$Gz$	–	Graetz-Zahl
$h$	$J/kg$	spezifische Enthalpie
$H$	J	Enthalpie
$H$	m	Höhe
$\dot{H}$	W	Enthalpiestrom
$h_{fg}$	$J/kg$	spezifische Verdampfungswärme
$I$	A	elektrischer Strom
$I$	$W/m^2$	Intensität (Strahlung)
$\vec{I}$	$(kg\ m)/s$	Impuls
$I_0(x)$	–	modifizierte Bessel-Funktion 1. Art 0. Ordnung
$I_1(x)$	–	modifizierte Bessel-Funktion 1. Art 1. Ordnung
$I_{-\frac{1}{3}}(x)$	–	modifizierte Bessel-Funktion 1. Art gebrochener Ordnung
$I_{\frac{2}{3}}(x)$	–	modifizierte Bessel-Funktion 1. Art gebrochener Ordnung
$iBi$	–	inverse Biot-Zahl
$I_e$	$W/m^2$	Intensität der emittierten Strahlung
$I_i$	$W/m^2$	Intensität der auftreffenden Strahlung
$J$	$W/m^2$	Helligkeit
$J$	J	Streuenergie
$\dot{j}$	W	Streuleistung
$\vec{J}$	$W/m^2$	Helligkeitsvektor
$\mathbf{J}(\vec{x})$	problembezogen	Jacobi-Matrix (Funktionalmatrix)
$J_0(x)$	–	Bessel-Funktion 1. Art 0. Ordnung
$J_1(x)$	–	Bessel-Funktion 1. Art 1. Ordnung
$k$	$W/(m^2\ K)$	Wärmedurchgangskoeffizient
$k^*$	$W/(m\ K)$	längenbezogener Wärmedurchgangskoeffizient
$K$	$W/K$	Übertragungsfähigkeit (Wärmeübertrager)
$K_0(x)$	–	modifizierte Bessel-Funktion 2. Art 0. Ordnung
$K_1(x)$	–	modifizierte Bessel-Funktion 2. Art 1. Ordnung
$K_L$	–	Korrekturwert für die Einlauflänge
$K_T$	–	Korrekturwert für temperaturabhängige Stoffwerte
$L$	m	Anströmlänge bei der freien Konvektion
$L$	m	(charakteristische) Länge
$L$	m	Überströmlänge bei der erzwungenen Konvektion
$\tilde{L}$	m	Verhältnis Körpervolumen zu wärmeübertragender Oberfläche
$\hat{L}$	m	Diffusionslänge
$L_{hyd}$	m	hydrodynamische Einlauflänge
$L_{th}$	m	thermische Einlauflänge
$L_{th}$	$W/K$	thermischer Leitwert
$m$	kg	Masse
$\dot{m}$	$kg/s$	Massenstrom
$\mathcal{M}$	–	dimensionsloser Rippenparameter
$Ma$	–	Mach-Zahl
$\max[a,b]$	problembezogen	Maximum zweier Größen $a$ und $b$
$n$	–	Geometrie Kennzahl der Wärmeleitung (Platte, Zylinder, Kugel)
$n$	m	Normalenrichtung
$N$	–	Anzahl der Oberflächen in einem Mehrkörpersystem
$N$	problembezogen	Nenner eines Bruchs
$NTU$	–	Anzahl der Übertragungseinheiten
$Nu$	–	Nußelt-Zahl
$Nu_0$	–	Grundwert der Nußelt-Zahl
$Nu_\infty$	–	Nußelt-Zahl der vollausbildeten Strömung
$Nu_i$	–	„innere“ Nußelt-Zahl (EIGB)
$Nu_{ges}$	–	„resultierende“ Nußelt-Zahl (EIGB)
$Nu_s$	–	mit der Spaltweite $s$ gebildete Nußelt-Zahl
$p$	$N/m^2$	Druck
$P_1, P_2$	–	Betriebscharakteristiken der Fluide 1 und 2 (Wärmeübertrager)

Symbol	Dimension	Bedeutung
$P_t$	W	technische Leistung
$Pe$	–	Péclet-Zahl
$Pr$	–	Prandtl-Zahl
$q^*$	J/m <sup>2</sup>	flächenbezogene Wärme
$\dot{q}$	W/m <sup>2</sup>	Wärmestromdichte
$Q$	J = W s	Wärme(menge)
$\dot{Q}$	W	Wärmestrom
$\dot{Q}_L$	W/m	längenbezogener Wärmestrom
$r$	m	Radialkoordinate
$R$	m	Radius
$R$	(m <sup>2</sup> K)/W	Wärmedurchlasswiderstand (spezifischer Wärmeleitwiderstand)
$R$	J/(kg K)	(spezielle) Gaskonstante
$r_S$	J/kg	spezifische Schmelzwärme
$r_V$	J/kg	spezifische Verdampfungswärme
$R_1, R_2$	–	Wärmekapazitätsstromverhältnisse der Fluide 1 und 2 (Wärmeübertrager)
$R_\alpha$	(m <sup>2</sup> K)/W	(spezifischer) Wärmeübergangswiderstand
$R_\lambda$	(m <sup>2</sup> K)/W	Wärmedurchlasswiderstand (spezifischer Wärmeleitwiderstand)
$R_{el}$	$\Omega$	elektrischer Widerstand
$R_f$	(m <sup>2</sup> K)/W	spezifischer Verschmutzungswiderstand (Wärmeübertrager)
$R_i$	1/m <sup>2</sup>	Oberflächenwiderstand für Strahlung der Fläche $i$
$R_{i,j}$	1/m <sup>2</sup>	Raumwiderstand für Strahlung zwischen den Flächen $i$ und $j$
$R_T$	(m <sup>2</sup> K)/W	(spezifischer) Wärmedurchgangswiderstand
$R_{th}$	K/W	thermischer Widerstand
$R_{th}^*$	(m <sup>2</sup> K)/W	spezifischer thermischer Widerstand
$R_{th,C}^*$	(m <sup>2</sup> K)/W	spezifischer Kontaktwiderstand
$Ra$	–	Rayleigh-Zahl
$Ra_s$	–	mit der Spaltweite $s$ gebildete Rayleigh-Zahl
$Ra_s^*$	–	modifizierte Rayleigh-Zahl bei parallelen Platten
$Re$	–	Reynolds-Zahl
$Re_D$	–	mit dem Durchmesser $D$ gebildete Reynolds-Zahl
$Re_L$	–	mit der Länge $L$ gebildete Reynolds-Zahl
$s$	m	charakteristische Spaltweite bei Fluidschichten
$s$	m	Dicke, Tiefe
$s$	m	Wandstärke bei Rohren und Kanälen
$S$	m	Formfaktor der Wärmeleitung
$S_\ell$	–	längenbezogener Formfaktor der Wärmeleitung
$t$	s	Zeit
$t_A$	a	Amortisationsdauer
$t_{1/2}$	s	Halbwertszeit
$T$	K	absolute Temperatur
$T_0$	K	Temperatur des Gefrierpunkts von Wasser ( $T_0 = 273,15$ K)
$T_B$	K	absolute Bezugstemperatur für die Stoffwerte
$u$	J/kg	spezifische innere Energie
$U$	V	elektrische Spannung
$U$	J	innere Energie
$U$	m	Umfang
$U$	W/(m <sup>2</sup> K)	Wärmedurchgangskoeffizient (Bauphysik)
$\dot{U}$	W	innerer Energiestrom
$v$	m <sup>3</sup> /kg	spezifisches Volumen
$V$	m <sup>3</sup>	Volumen
$\dot{V}$	m <sup>3</sup> /s	Volumenstrom
$w$	m/s	Geschwindigkeit
$W$	J	Arbeit
$W_R$	J	(innere) Reibungsarbeit
$\dot{W}$	W/K	Wärmekapazitätsstrom
$w_\infty$	m/s	Freistrom- bzw. Anströmgeschwindigkeit
$x$	m	Ortskoordinate
$\vec{x} = (x, y, z)^T$	m	Ortsvektor
$y$	m	Ortskoordinate
$z$	m	Ortskoordinate
$Z$	problembezogen	Zähler eines Bruchs

## ► Griechische Buchstaben

Symbol	Dimension	Bedeutung
$\alpha$	$W/(m^2 K)$	Wärmeübergangskoeffizient
$\alpha_i$	$W/(m^2 K)$	„innerer“ Wärmeübergangskoeffizient (EIGB)
$\alpha_K$	$W/(m^2 K)$	konvektiver Wärmeübergangskoeffizient
$\alpha_S$	$W/(m^2 K)$	Wärmeübergangskoeffizient für Strahlung (radiativer WÜK)
$\alpha_x$	$W/(m^2 K)$	lokaler Wärmeübergangskoeffizient
$\beta_P$	$1/K$	isobarer Ausdehnungskoeffizient
$\beta_V$	$1/K$	isochorer Spannungskoeffizient
$\gamma$	$^\circ$	Neigungswinkel bei der freien Konvektion an geneigten Fluidschichten (gegen die Horizontale)
$\gamma$	$^\circ$	Neigungswinkel bei der freien Konvektion an geneigten Platten und Kanälen sowie bei der Mischkonvektion (gegen die Vertikale)
$\Delta$	$1/m^2$	Delta-Operator
$\Delta$	z. B. K	Differenz
$\delta$	m	periodische Eindringtiefe
$\delta_1$	–	erster Eigenwert bei der Näherungslösung für große Zeiten (NGZ)
$\Delta \vartheta_{\log}$	K	logarithmisch gemittelte Temperaturdifferenz
$\varepsilon$	–	Emissionsgrad (Emissionsverhältnis)
$\epsilon$	–	Genauigkeitsschranke
$\epsilon$	–	Wärmekapazitätsverhältnis
$\epsilon$	–	Wärmewirkungsgrad (Austauschgrad) eines Wärmeübertragers
$\epsilon_{R1}, \epsilon_{R2}^*$	–	Leistungsziffer einer Einzelrippe bzw. der Gesamtanordnung
$\zeta$	–	dimensionslose Ortskoordinate
$\zeta$	–	Widerstandsbeiwert (z. B. bei der turbulenten Rohrströmung)
$\eta$	–	dimensionslose Ortskoordinate
$\eta$	$N s/m^2 = Pa s$	dynamische Viskosität
$\eta$	–	Wirkungsgrad
$\eta_R$	–	Rippenwirkungsgrad
$\theta$	K	Übertemperatur (z. B. einer Rippe)
$\theta_0$	K	Übertemperatur am Rippenfuß
$\vartheta$	$^\circ C$	Celsius-Temperatur
$\vartheta_0$	$^\circ C$	Anfangstemperatur
$\vartheta'_1$	$^\circ C$	Eintrittstemperatur von Fluid 1 (Wärmeübertrager)
$\vartheta''_1$	$^\circ C$	Austrittstemperatur von Fluid 1 (Wärmeübertrager)
$\vartheta'_2$	$^\circ C$	Eintrittstemperatur von Fluid 2 (Wärmeübertrager)
$\vartheta''_2$	$^\circ C$	Austrittstemperatur von Fluid 2 (Wärmeübertrager)
$\vartheta_\infty$	$^\circ C$	Umgebungstemperatur bzw. Temperatur nach unendlich langer Zeit
$\vartheta_B$	$^\circ C$	Bezugstemperatur für die Stoffwerte
$\vartheta_W$	$^\circ C$	Wandtemperatur
$\Theta$	$^\circ C$	Differenztemperatur
$\Theta$	–	dimensionslose mittlere Temperaturdifferenz (Wärmeübertrager)
$\Theta$	–	normierte Temperatur (dimensionslose Temperaturdifferenz)
$\Theta^*$	–	normierte Temperatur (dimensionslose Temperaturdifferenz)
$\bar{\Theta}$	–	normierte kalorische Mitteltemperatur
$\tilde{\Theta}$	–	quasistationäre Endtemperatur (NGZ mit RB 2. Art)
$\Theta_m$	–	normierte Zentrumstemperatur (EIGB, ELF, NGZ)
$\Theta_w$	–	normierte Wandtemperatur
$\kappa$	$1/m$	spezifische Anzahl der Übertragungseinheiten
$\kappa$	–	Isentropenexponent
$\lambda$	$W/(m K)$	Wärmeleitfähigkeit
$\lambda$	m	Wellenlänge
$\lambda$	–	Rohrreibungszahl
$\Lambda$	$W/(m^2 K)$	Wärmedurchlasskoeffizient
$\lambda_s$	$W/(m K)$	scheinbare Wärmeleitfähigkeit
$\mu$	–	Ähnlichkeitsvariable beim halbunendlichen Körper (HUK)
$\mu$	$1/m$	Rippenparameter
$\nu$	$m^2/s$	kinematische Viskosität
$\xi$	–	dimensionslose Ortskoordinate
$\rho$	$kg/m^3$	Dichte (Massendichte)
$\rho$	–	Reflexionsgrad (Reflexionskoeffizient)
$\sigma$	$m/\Omega$	spezifische elektrische Leitfähigkeit
$\sigma$	$W/(m^2 K^4)$	Stefan-Boltzmann-Konstante ( $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} W/(m^2 K^4)$ )
$\sigma_{12}$	$W/(m^2 K^4)$	Strahlungskonstante der Anordnung

Symbol	Dimension	Bedeutung
$\tau$	–	dimensionslose Kenngröße beim halbumendlichen Körper (HUK)
$\tau$	–	dimensionslose Zeit
$\tau$	N/m <sup>2</sup>	Schubspannung
$\tau$	–	Transmissionsgrad (Transmissionskoeffizient)
$\tau_0$	s	Zeitkonstante
$\varphi$	–	Azimutwinkel
$\varphi$	rad	Phasenverschiebung (HUK mit periodischer RB)
$\Phi$	–	Einstrahlzahlen-Matrix
$\Phi$	–	Rückwärmzahl
$\varphi_{ij}$	–	Einstrahlzahl zwischen den Oberflächen $i$ und $j$
$\varphi_{i \rightarrow j}$	–	Einstrahlzahl zwischen den Oberflächen $i$ und $j$
$\varphi_{ii}$	–	Eigeneinstrahlzahl der Oberfläche $i$
$\psi$	–	Zenitwinkel
$\Psi$	°C	Summentemperatur
$\chi_T$	1/Pa	isotherme Kompressibilität

### ► Indizes

Index	Bedeutung	Index	Bedeutung
+	Serienschaltung	lam	laminar
	Parallelschaltung	li	links
$\infty$	Umgebung	m	mittel, Mitte
$\alpha$	Konvektion, konvektiv	max	maximal
$\epsilon$	Strahlung	min	minimal, Mindest-
$\lambda$	spektral (wellenlängenabhängig)	Misch	Mischkonvektion
$\lambda$	Wärmeleitung	opt	optimal
$\vartheta$	Temperatur	p	partikulär
a	außen	P	Platte
abs	absorbiert	pot	potenziell
B, Bezug	Bezugswert	re	rechts
dif	diffus	ref	reflektiert
dir	direkt	S	schwarzer Körper
e	außen (external)	se	Oberfläche außen (surface external)
e	emittiert (emitted)	si	Oberfläche innen (surface internal)
el	elektrisch	sol	solar
erf	erforderlich	Str	Strahlung
erzw	erzwungene Konvektion	TP	Taupunkt
frei	freie Konvektion	trans	transmittiert
ges	gesamt, resultierend	turb	turbulent
hom	homogen	w	Geschwindigkeit
i	auftreffend (incident)	w	Wand
i	innen	W	Wasser
inh	inhomogen	WD	Wärmedämmung
K	Konvektion	x	in $x$ -Richtung
K	Kugel	y	in $y$ -Richtung
kin	kinetisch	z	in $z$ -Richtung
krit	kritisch	Z	Zylinder
L	Luft	zul	zulässig

### ► Abkürzungen

Abkürzung	Bedeutung	Abkürzung	Bedeutung
AB(n)	Anfangsbedingung(en)	NGZ	Näherungslösung für große Zeiten
AH	Arbeitshilfen	oH	oberer Halbraum
Dgl(n).	Differenzialgleichung(en)	RB(n)	Randbedingung(en)
EIGB	erweiterter ideal gerührter Behälter	Tab(n).	Tabelle(n)
ELF	exakte Lösung mit Fourier-Reihe	WD	Wärmedurchgang
Gl(n).	Gleichung(en)	WDK	Wärmedurchgangskoeffizient
GS	Gleichstrom	WDW	Wärmedurchgangswiderstand
GG	Gegenstrom	WL	Wärmeleitung
HUK	halbumendlicher Körper	WRG	Wärmerückgewinnung
IGB	ideal gerührter Behälter	WÜ	Wärmeübergang
IWL	instationäre Wärmeleitung	WÜK	Wärmeübergangskoeffizient
		WÜW	Wärmeübergangswiderstand

# 1 Grundlagen der Wärmeübertragung

## 1.1 Praktische Bedeutung

»Die Temperaturunterschiede streben dem Ausgleich zu.« [13]

Dies ist nicht nur eine wissenschaftliche Erkenntnis, sondern beschreibt auch bekannte „thermische“ Alltagserfahrungen, z. B.:

- Die Abkühlung einer heißen Kartoffel lässt sich durch kräftiges Anpusten beschleunigen.
- Beim Öffnen eines Fensters strömt im Winter kalte Außenluft ein und warme Raumluft aus.
- Jeder Automotor benötigt eine Warmlaufphase, bis er seine Betriebstemperatur erreicht.
- In klaren Nächten kann auch bei Temperaturen über  $0\text{ }^{\circ}\text{C}$  Bodenfrost auftreten.
- Eine Kirche mit dicken Steinmauern bietet im Sommer bei hohen Außentemperaturen ein angenehmes Raumklima.

Auch wenn uns diese Vorgänge selbstverständlich und vertraut erscheinen, handelt es sich dabei doch um teilweise komplexe Vorgänge der Wärmeübertragung. Zur erfolgreichen Analyse, Berechnung und Optimierung von Wärmetransportvorgängen sowie zur Entwicklung neuer Verfahren und Technologien sind solide und umfassende Kenntnisse der Wärmeübertragung unerlässlich.

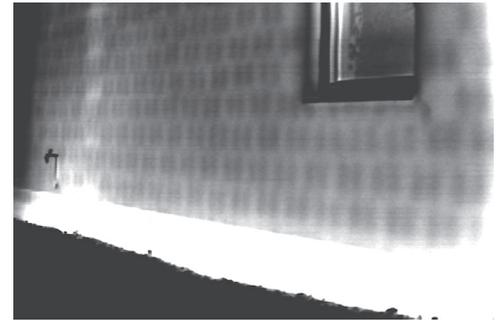
Die Wärmeübertragung ist keineswegs auf die klassischen Bereiche der Technik, wie

- Energietechnik (z. B. Kraftwerke, Turbinen, Fernwärmesysteme)
- Fahrzeugtechnik (z. B. Motorkühlung, Fahrzeugklimatisierung)
- Luft- und Raumfahrttechnik (z. B. Hitzeschilde für Wiedereintritt)
- Gebäudetechnik (z. B. Solarkollektoren, Heizkörper), beschränkt, sondern gewinnt zunehmend auch in angrenzenden Fachgebieten an Bedeutung:
- Elektrotechnik (z. B. energiesparende Kühl- und Gefriergeräte)
- Informationstechnologie (z. B. Hochleistungs-CPU's)
- Produktionstechnik (z. B. Wärmebehandlung von Werkstoffen)
- Messtechnik (z. B. Temperatursensoren, Wärmebildkameras)
- Mechatronik und Nanotechnologie (z. B. Nanoröhren, Nanobots)
- Umwelttechnik (z. B. regenerative Energien, Brennstoffzellen)
- Recycling und Entsorgungstechnik (z. B. thermische Trennverfahren)
- Bio- und Medizintechnik (z. B. Biosensoren, Thermografie zur Lokalisation von Entzündungen, Hyperthermie)
- Lebensmitteltechnologie (z. B. Kühlung von Lebensmitteln, Pasteurisierung, Transportbehälter)
- Meteorologie und Klimatologie (z. B. Treibhauseffekt, globale Erderwärmung)

Eine enge Beziehung der Wärmeübertragung besteht auch zur Stoffübertragung, die hier aber nicht behandelt wird.



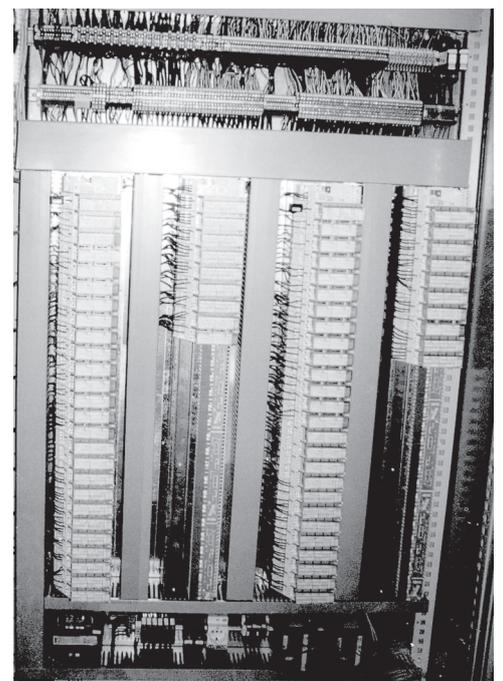
**Bild 1.1:** Rückkühlwerk einer Klimaanlage.



**Bild 1.2:** Thermogramm einer Fassade.

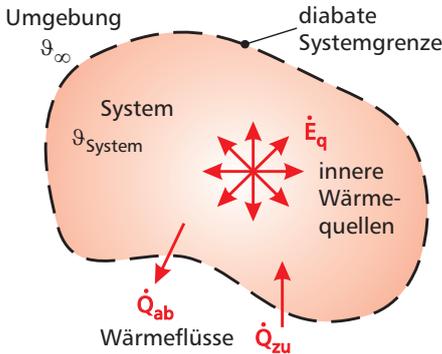


**Bild 1.3:** Glaskuppel des Reichstags Berlin.



**Bild 1.4:** Elektrischer Schaltschrank.

Im Folgenden bezeichnet  $\vartheta$  die Celsius-Temperatur,  $T$  die absolute Temperatur,  $t$  die Zeit,  $\dot{Q}$  den Wärmestrom und  $\dot{q}$  die Wärmestromdichte.



**Bild 1.5:** Wärmeübertragung durch Wärme-flüsse über eine diatherme Systemgrenze.

**Ströme** (z. B. Massen-, Volumen-, Wärme-, Enthalpieströme) werden mit einem über das betreffende Symbol gesetzten **Punkt** gekennzeichnet, also  $\dot{m}$ ,  $\dot{V}$ ,  $\dot{Q}$ ,  $\dot{H}$ , während die vom jeweiligen Strom geänderten Quantitäten  $m$ ,  $V$ ,  $Q$ ,  $H$  ohne Punkt notiert werden.

Die Aussage „Das System enthält 10 MJ Wärme.“ ist eigentlich unzutreffend. Besser ist die Sprechweise: „Dem System wurden 10 MJ Wärme zugeführt, wodurch sich die innere Energie um 10 MJ erhöhte.“



Die Begriffe „Temperaturaufnahme“ und „Temperaturabgabe“ entspringen der Fehlvorstellung eines „Temperaturflusses“. Tatsächlich führt ein Wärmefluss bzw. ein Wärmestrom zu Temperaturänderungen (Anstieg/Abnahme).

Thermodynamisch ist die Wärme wie die Arbeit keine Zustands-, sondern eine Prozessgröße. **Zustandsgrößen** (z. B. Temperatur  $T$ , innere Energie  $U$ ) kennzeichnen als wegunabhängige Systemeigenschaften einen bestimmten Zustand eines thermodynamischen Systems. Demgegenüber beschreiben **Prozessgrößen** (z. B. Wärme  $Q$ , Arbeit  $W$ ) die Form der Energieübertragung und hängen vom gewählten thermodynamischen Weg ab.

**Intensive** Zustandsgrößen hängen im Unterschied zu **extensiven** Zustandsgrößen nicht von der Masse bzw. der Stoffmenge des Systems ab. Bei Teilung eines Systems in zwei gleich große Teile besitzen beide Teile dieselben Werte der intensiven Zustandsgrößen wie das Ausgangssystem, während sie nur die halben Werte der extensiven Zustandsgrößen aufweisen.

Es wird davon ausgegangen, dass der (die) Leser(in) im Wesentlichen mit den Grundlagen der Wärmeübertragung vertraut ist. Die umfangreiche Literatur [1]–[23] bedient sich teilweise unterschiedlicher Bezeichnungen und Symbole, wobei sich das vorliegende Buch auf die gängige Nomenklatur stützt und diese bei Bedarf sinnvoll ergänzt.

## 1.2 Wärme, Wärmestrom, Wärmestromdichte

**Wärme** ist Energie, die an der diathermen (wärmedurchlässigen) Grenze zwischen Systemen verschiedener Temperatur auftritt und allein aufgrund des Temperaturunterschiedes ohne Arbeitsleistung zwischen den Systemen übertragen wird (Bild 1.5). Die **Thermodynamik** beschäftigt sich mit der Wärme  $Q$  in J (Joule) =  $W \cdot s$ , die bei verschiedenen **Gleichgewichtszuständen** eines Systems auftritt. Der gelegentlich verwendete Begriff Wärmemenge entstammt der unzutreffenden Vorstellung, Wärme bestünde aus einem Stoff, dem man eine gewisse Stoffmenge zuweisen könne. Die Wärme  $Q$  wird dadurch übertragen, dass in der Zeit  $t = t_1 - t_0$  ein **Wärmestrom**  $\dot{Q}$  in W (Watt) =  $1 \text{ J/s}$  fließt:

$$Q = \int_{t_0}^{t_1} \dot{Q}(t) dt; \quad \text{bzw.} \quad Q = \dot{Q} \cdot (t_1 - t_0), \quad \text{falls } \dot{Q} = \text{const.} \quad (1.1)$$

Häufig wird mit der **Wärmestromdichte**  $\dot{q}$  der auf die Fläche  $A$  bezogene Wärmestrom zur Beschreibung von Systemen verwendet:

$$\dot{q} = \frac{\dot{Q}}{A} \quad \text{und} \quad \dot{Q} = \dot{q} \cdot A \quad [\dot{q}] = \frac{W}{m^2} \quad (1.2)$$

**Wärme fließt** nach dem 2. Hauptsatz der Thermodynamik selbsttätig entlang eines Temperaturgefälles stets von höherer zu niedrigerer Temperatur. Besitzen zwei Systeme in Abwesenheit thermoelektrischer Effekte (z. B. Peltier-Effekt) dieselbe Temperatur (thermisches Gleichgewicht nach dem 0. Hauptsatz), kommt der Wärmefluss zum Erliegen. Die Energieform Wärme tritt damit nur bei der Überschreitung der Systemgrenze in Erscheinung. Im System selbst ist die Wärme nicht feststellbar, sondern sie trägt zur Änderung der inneren Energie  $U$  des Systems bei. Die Erfassung der Änderung der inneren Energie  $\Delta U$  (bei Festkörpern und Flüssigkeiten näherungsweise auch der Enthalpie  $\Delta H$ ) erfolgt indirekt über die Temperaturmessung.

Der Systembegriff der Thermodynamik ist auch in der Wärmeübertragung von zentraler Bedeutung. Das **thermodynamische System** ist ein durch eine **Systemgrenze** festgelegtes Gebiet, das zum Zweck der Analyse von seiner **Umgebung** gedanklich abgegrenzt wird (Bild 1.5). In Bezug auf das gesteckte Untersuchungsziel sollte die Systemgrenze so gewählt werden, dass eine möglichst einfache Lösung erreicht wird. Die Grenzen eines Systems können fest oder variabel, materiell oder imaginär, durchlässig oder undurchlässig sein. Thermodynamische Systeme lassen sich nach ihren Wechselwirkungen hinsichtlich des Energie- und Stofftransports mit der Umgebung einteilen.

**Geschlossene Systeme** sind massedicht und ermöglichen keinen Stofftransport über die Systemgrenze. Bei **offenen Systemen** treten Massenströme (ggf. an verschiedenen Stellen) über die Systemgrenze. Bei halboffenen Systemen erfolgt der Massentransport nur in eine Richtung über die Systemgrenze (z. B. Ausströmen aus einem Behälter).

Hinsichtlich des Wärmetransports ist zwischen **adiabaten** (wärmedichten) und **diathermen** (wärmedurchlässigen) Systemen zu unterscheiden. Da eine thermisch ideale Wärmedämmung nicht möglich ist, stellt der Begriff „adiabat“ eine Idealisierung dar und wird in der Praxis für Systeme verwendet, bei denen der Wärmefluss über die Systemgrenze vernachlässigbar klein ist, wie z. B. bei sehr gut gedämmten Rohrleitungen (Bild 1.7).

### 1.3 Temperatur und Temperaturfelder

Im thermodynamischen Sinne ist die **Temperatur** eine intensive Zustandsgröße, die als Grundgröße nicht auf andere Größen zurückgeführt werden kann, sondern eindeutig definiert werden muss. Dies gelingt mithilfe des thermischen Gleichgewichts thermodynamischer Systeme (0. Hauptsatz). Danach haben zwei Systeme im thermischen Gleichgewicht immer dieselbe Temperatur, während Systeme, die nicht im thermischen Gleichgewicht miteinander stehen, stets unterschiedliche Temperaturen aufweisen.

Die Temperatur charakterisiert damit den **thermischen Zustand eines Systems**. Durch den Wärmesinn besitzt der Mensch mit „heiß“, „warm“ und „kalt“ qualitative und relative Vorstellungen über den thermischen Zustand von Systemen. Eine Quantifizierung dieser Empfindungen war jedoch erst mit der Einführung des Temperaturbegriffs und der Erfindung funktionierender Thermometer mit geeigneten Skalen möglich.

Temperaturen können entweder als **Celsius-Temperaturen**  $\vartheta$  oder als **absolute (thermodynamische) Temperaturen**  $T$  notiert werden:

$$T = \frac{\vartheta}{^{\circ}\text{C}} \cdot \text{K} + T_0; \quad [T] = \text{K} \quad \text{mit} \quad T_0 = 273,15 \text{ K} \quad (1.3)$$

$$\vartheta = \frac{T - T_0}{\text{K}} \cdot ^{\circ}\text{C}; \quad [\vartheta] = ^{\circ}\text{C} \quad (1.4)$$

Im Folgenden werden Temperaturen bis auf die Wärmestrahlung als Celsius-Temperaturen angegeben und mit dem Symbol  $\vartheta$  notiert. Da sich beide Temperaturen nur um die additive Konstante  $T_0$  unterscheiden, ist es unerheblich, ob **Temperaturdifferenzen** zwischen Celsius- oder Kelvin-Temperaturen berechnet werden.

$$\Delta T = T_1 - T_2 \quad (1.5)$$

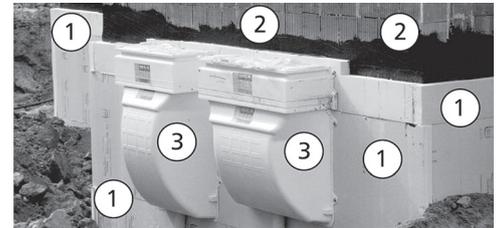
$$\Delta \vartheta = \vartheta_1 - \vartheta_2 \quad (1.6)$$

$$\Delta T = T_1 - T_2 = (\vartheta_1 + T_0) - (\vartheta_2 + T_0) = \vartheta_1 - \vartheta_2 = \Delta \vartheta \quad (1.7)$$

Es ist allerdings zu beachten, dass **Temperaturdifferenzen generell in K** angegeben werden, unabhängig davon, auf welcher Temperaturskala sie berechnet wurden. Der scheinbare Widerspruch, dass die Gln. (1.3) und (1.4) mit K und  $^{\circ}\text{C}$  zwei unterschiedliche Einheiten verknüpfen, lässt sich dadurch auflösen, dass jede Celsius-Temperatur als Temperaturunterschied zum Nullpunkt der Celsius-Skala interpretiert und damit in K angegeben werden kann. In der Praxis sind daher auch Schreibweisen etabliert, die K und  $^{\circ}\text{C}$  direkt verknüpfen, z. B. :

$$20 \text{ }^{\circ}\text{C} + 273,15 \text{ K} = 293,15 \text{ K} \quad \text{oder} \quad 300 \text{ K} - 273,15 \text{ K} = 26,85 \text{ }^{\circ}\text{C}$$

 Die Begriffe „Isolation“ bzw. „isolieren“ kennzeichnen Schutzmaßnahmen gegen den elektrischen Strom. Im Zusammenhang mit wärmetechnischen Maßnahmen spricht man besser von „**Wärmedämmung**“ bzw. „**dämmen**“, auch wenn der Begriff „Isoliertechnik“ in der Praxis eingeführt ist.



**Bild 1.6:** Beispiel für eine Wärmedämmung: Perimeterdämmung ① aus extrudiertem Polystyrol (XPS) an einer betonierten Kellerwand mit darüber liegender ungedämmter Ziegelwand ② sowie Aussparungen im Bereich der Lichtschächte ③. Oberhalb der Wärmedämmung ist eine Feuchtesperre in Form einer Bitumendickbeschichtung (schwarz) erkennbar, die ebenfalls keine „Isolierung“ darstellt.



**Bild 1.7:** Gedämmte Rohrleitungen.

 Im Unterschied zum Winkelmaß  $^{\circ}$  (Grad) wird die Dimension  $^{\circ}\text{C}$  mit einem Leerzeichen an die Maßzahl gesetzt, also  $45^{\circ}$ , aber  $45 \text{ }^{\circ}\text{C}$ . Die Einheit  $^{\circ}$  ist für Celsius-Temperaturen ebenso unzutreffend wie C.

► **Beispiel:** ◀

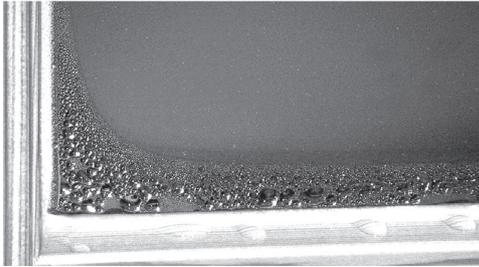
Zwischen der Temperatur im Wohnzimmer von Frieda Frostig von  $25 \text{ }^{\circ}\text{C}$  und der Außenlufttemperatur von  $-5 \text{ }^{\circ}\text{C}$  besteht eine Differenz von  $\Delta \vartheta = \vartheta_{\text{innen}} - \vartheta_{\text{außen}} = 25 \text{ }^{\circ}\text{C} - (-5 \text{ }^{\circ}\text{C}) = 30 \text{ K}$  (30 Kelvin).

 Die Angabe  $^{\circ}\text{K}$  für eine Temperaturdifferenz ist falsch, richtig ist K.

 Das große griechische  $\Delta$  wird sowohl als Vorsatz für Differenzen als auch für den Laplace-Operator verwendet.

► **Beispiel:** ◀

Bei einer im siedenden Wasser gekochten Kartoffel weist zunächst jeder Volumenpunkt eine einheitliche Temperatur von 100 °C auf. Auf einem Teller kühlt sie vom Rand her ab. An der Außenseite herrschen niedrigere Temperaturen als im Zentrum. Jeder Punkt hat eine eigene Temperatur, die sich mit der Zeit ändert. Es liegt ein instationäres dreidimensionales Temperaturfeld  $\vartheta(x,y,z,t)$  vor.



**Bild 1.8:** Tauwasser und mehrdimensionales Temperaturfeld an einer Verglasung.

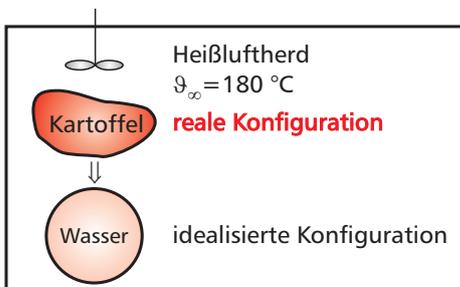


Da ein Wärmestrom gemäß dem 2. Hauptsatz der Thermodynamik selbsttätig stets in einem Temperaturgefälle (von warm nach kalt) fließt, gibt der Temperaturgradient die **negative** Richtung des Wärmestroms an.

Bei eindimensionaler Geometrie lautet der Temperaturgradient  $d\vartheta/dx$ . Die hier gewählte allgemeinere Schreibweise  $\partial\vartheta/\partial x$  gewährleistet die leichtere Übertragbarkeit der Ergebnisse auf den mehrdimensionalen Fall.

**Tabelle 1.1:** Analogie zwischen dem Transport von Wärme und Wasser.

Wärme ...	Wasser ...
... benötigt zum Fließen ...	... benötigt zum Fließen ...
ein Temperaturgefälle.	ein natürliches Gefälle.
... fließt ...	... fließt ...
von warm nach kalt.	vom Berg ins Tal.
... kann nur durch Arbeit ...	... kann nur durch Arbeit ...
von kalt nach warm	vom Tal bergauf
... transportiert werden.	... transportiert werden.



**Bild 1.9:** Modellierung einer Kartoffel als Kugel mit den Eigenschaften von Wasser.

Die Temperatur ist eine **skalare** Größe, d.h. sie besitzt keine Richtung. Hängt die Temperatur vom Ort ab, spricht man von einem **Temperaturfeld** (skalares Feld):

- eindimensionales Temperaturfeld  $\vartheta = \vartheta(x)$
- zweidimensionales Temperaturfeld  $\vartheta = \vartheta(x,y)$
- dreidimensionales Temperaturfeld  $\vartheta = \vartheta(x,y,z)$

Hängt die Temperatur nur vom Ort und nicht von der Zeit ab, spricht man von einem **stationären** Temperaturfeld, anderenfalls von einem **instationären** (zeitabhängigen) Temperaturfeld:

- stationäres Temperaturfeld  $\vartheta = \vartheta(\vec{x})$
- instationäres Temperaturfeld  $\vartheta = \vartheta(\vec{x},t)$

Im Allgemeinen sind Temperaturfelder zeit- und ortsabhängig. Allerdings werden in der Praxis vielfach stationäre Zustände betrachtet, insbesondere wenn Gleichgewichtszustände interessieren (z. B. stationäre Betriebstemperatur in einem Verbrennungsmotor).

Der **Temperaturgradient** ist ein Vektor, der die Richtung des größten Temperaturanstiegs in einem Temperaturfeld angibt. Er berechnet sich aus den partiellen Ableitungen des Temperaturfeldes nach den Ortskoordinaten, z. B. gilt in kartesischen Koordinaten:

$$\text{grad } \vartheta = \left( \frac{\partial \vartheta}{\partial x}, \frac{\partial \vartheta}{\partial y}, \frac{\partial \vartheta}{\partial z} \right)^T = \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \cdot \vec{e}_x + \frac{\partial \vartheta}{\partial y} \cdot \vec{e}_y + \frac{\partial \vartheta}{\partial z} \cdot \vec{e}_z \quad (1.8)$$

Der Nabla-Operator erlaubt eine **koordinatenunabhängige** Notation:

$$\text{grad } \vartheta = \nabla \vartheta \quad (1.9)$$

## 1.4 Wärmetransportmechanismen

Um eine bessere Vorstellung des in der Regel nicht sichtbaren Wärmeflusses zu erhalten, verwendet man in der Praxis **Analogien** (vgl. Tabellen 1.1 und 1.2), die auf bekannte bzw. einfachere Vorgänge zurückgreifen. Eine bekannte Modellvorstellung ist der Vergleich zwischen Wärme- und Wasserstrom (Tabelle 1.1). Wärmeübertragungsvorgänge spielen in vielen alltäglichen, aber auch in zahlreichen technischen Prozessen eine überaus wichtige Rolle. Das qualitative Verständnis der zugrunde liegenden Mechanismen und die Fähigkeit, auch quantitative Aussagen in Form ingenieurmäßiger Berechnungen vornehmen zu können, sind wichtige Voraussetzungen zur Dimensionierung und Optimierung technischer Systeme.

Zur Analyse von Wärmetransportvorgängen werden in der Praxis Modelle eingesetzt, die je nach Genauigkeitsanforderungen und vertretbarem Aufwand mehr oder weniger genaue Abbilder der komplexen realen Systeme darstellen. Teils sind entsprechende Modelle bereits verfügbar (z. B. in der Literatur), teils müssen sie im Rahmen von Forschungs- und Entwicklungsarbeiten erst an den jeweiligen technischen Systemen erstellt werden. Um die Komplexität der Modelle sinnvoll zu begrenzen, werden geeignete Vereinfachungen und Vernachlässigungen durchgeführt (z. B. wie in Bild 1.9), wozu vertiefte Kenntnisse der Grundlagen der Wärmeübertragung notwendig sind.

Die mathematische Behandlung physikalischer Probleme führt auf Ausdrücke, die Unterschiede der maßgeblichen Variablen zueinander beinhalten (z. B.  $\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} \approx \frac{\Delta \vartheta}{\Delta x^2}$ ,  $\frac{\partial \vartheta}{\partial t} \approx \frac{\Delta \vartheta}{\Delta t}$ ). Je kleiner die Inkremente (z. B.  $\Delta x$ ,  $\Delta t$ ) gewählt werden, desto genauer ist die jeweilige Beschreibung.

Im Grenzfall infinitesimaler und differentieller Änderungen erhält man Differenzialgleichungen, die eine exakte Formulierung der zugrunde liegenden physikalischen Gesetzmäßigkeiten darstellen, wobei die jeweiligen Änderungsraten als Differenziale erscheinen. Daher werden zahlreiche Probleme im Ingenieurbereich durch **Differenzialgleichungen** beschrieben, zu deren Lösung die Mathematik die Grundlagen und Hilfsmittel (z. B. Trennung der Variablen, *e*-Funktionsansatz, Substitution, Potenzreihenansatz, Finite Differenzen, Finite Elemente etc.) bereitstellt. Jedoch sind zahlreiche praktische Probleme der Wärmeübertragung auch ohne Differenzialgleichungen lösbar.

### 1.4.1 Arten des Wärmetransports

Generell ist zwischen **stoffgebundenem** (Leitung und Konvektion) und **nichtstoffgebundenem** Wärmetransport (Strahlung) zu unterscheiden, so dass drei Transportmechanismen auftreten können:

- ▶ **Wärmeleitung** (in Festkörpern, untergeordnet in Flüssigkeiten und Gasen; z. B. Wärmetransport durch die Wandung eines Heizkörpers oder eine Zylinderbuchse in einem Verbrennungsmotor, winterliche Wärmeverluste durch eine Gebäudeaußenwand, s. a. Bild 1.10)
- ▶ **Konvektion** (Wärmemitführung durch Strömung, in Flüssigkeiten und Gasen; z. B. Wärmetransport durch Warmwasser vom Heizkessel zu den Heizkörpern, Umwälzung der Raumluft durch thermischen Auftrieb, Kühlwasser im Kühler eines Autos, s. a. Bild 1.12)
- ▶ **Wärmestrahlung** (zwischen zwei Körpern; z. B. Infrarotstrahler in einem Festzelt, Sonne, Glühlampe, Kachelofen, s. a. Bild 1.13)

Da sich die drei Wärmetransportmechanismen überlagern, ist die exakte Behandlung schwierig, und es sind in der Praxis meist Vereinfachungen notwendig (Modellbildung).

Die **Transportgesetze** der einzelnen Wärmeübertragungsarten lassen sich universell als Verknüpfung zwischen Wirkung (Strom bzw. Fluss) und Ursache (treibendes Gefälle) formulieren:

$$\text{Strom der Transportgröße} = \text{Transportkoeffizient} \times \text{Gefälle} \quad (1.10)$$

### 1.4.2 Wärmeleitung

**Wärmeleitung** stellt einen Energietransport infolge atomarer und molekularer Wechselwirkung unter dem Einfluss ungleichförmiger Temperaturverteilung dar. Sie ist vor allem in Festkörpern von Bedeutung (Bild 1.10), tritt aber auch in Flüssigkeiten und Gasen auf.

Der empirische **Fourier'sche Wärmeleitungsansatz** (1.11) (*J.B. Biot*, 1804, 1816; *J.B.J. Fourier*, 1822) verknüpft den **Wärmestrom**  $\vec{Q}(\vec{x})$  in *W* bzw. die **Wärmestromdichte**  $\vec{q}(\vec{x})$  (flächenbezogener Wärmestrom)

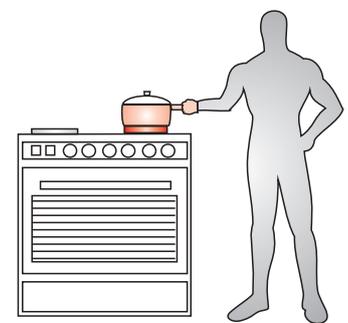
 Wärmetransportvorgänge werden prinzipiell in **3 Schritten** analysiert:

1. Identifikation aller maßgeblichen Variablen (z. B. instationäres 3dimensionales Temperaturfeld  $\vartheta = \vartheta(x,y,z,t)$ ), Festlegung zutreffender Annahmen und Näherungen (z. B. Symmetrie in *y* und *z*), Anwendung relevanter physikalischer Gesetze und Prinzipien (z. B. Energiebilanz) zur mathematischen Problemformulierung.
2. Problemlösung mit geeigneten mathematischen Methoden (z. B. analytische oder numerische Lösung einer Dgl.). Als Lösung bezeichnet man
  - (a) eine Funktion  $\vartheta(x,y,z,t)$ , mit der die Berechnung der Temperatur in jedem Punkt (*x,y,z*) eines Körpers und zu jeder Zeit möglich ist (analytische Lösung).
  - (b) eine endliche Anzahl von Temperaturwerten, die bestimmten Punkten des Körpervolumens zugeordnet sind und entweder gemessen oder mit Computerprogrammen errechnet wurden (numerische Lösung).
3. physikalische Interpretation und Prüfung der Ergebnisse auf Plausibilität (z. B. Entfall nicht plausibler Lösungen bei quadratischen Gleichungen)

 Der in der Praxis für **Wärmetransport** gängige, physikalisch unzutreffende Begriff „**Wärmeaustausch**“ impliziert im Widerspruch zum 2. Hauptsatz einen gleichzeitigen Fluss in zwei Richtungen.

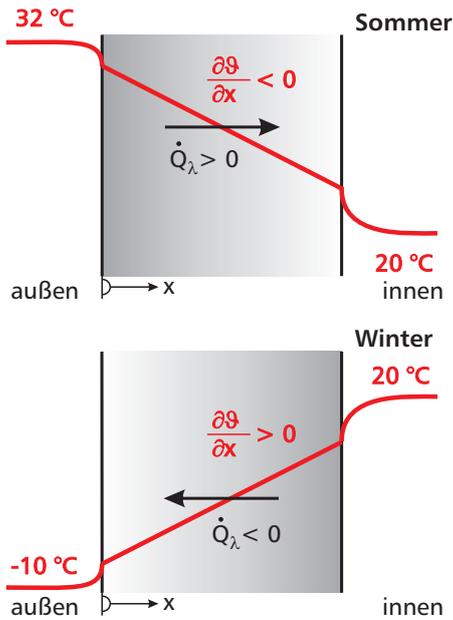
**Tabelle 1.2:** Analogie zwischen Wärmetransport und dem Transport von Wasser beim Löschen eines Feuers.

Wärmetransport	Wassertransport
Wärmeleitung	Eimerkette
Konvektion	mit Eimer laufende Person
Wärmestrahlung	Feuerwehrschauch



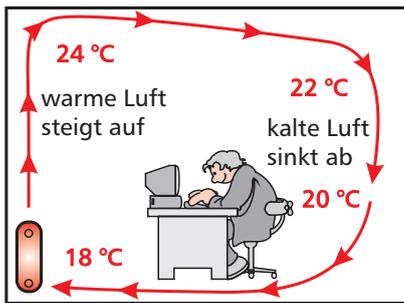
Herdplatte → Topf → Hand

**Bild 1.10:** Wärmetransport durch Leitung.



**Bild 1.11:** Stationäre Wärmeleitung in einer Außenwand mit beidseitigem Wärmeübergang (oben: im Sommer; unten: im Winter).

Das **negative Vorzeichen** in den Gl. (1.11) und (1.12) bedeutet, dass ein **positiver Wärmestrom** (in Richtung der positiven x-Achse, vgl. Bild 1.11) stets in Richtung **abnehmender Temperatur** (d. h. in Richtung eines negativen Temperaturgradienten von warm nach kalt) fließt. Im eindimensionalen Fall entspricht der Temperaturgradient  $\partial\vartheta/\partial x = d\vartheta/dx$  der Steigung der Temperaturkurve (Tangente, Steigungsdreieck) in einem bestimmten Punkt.



**Bild 1.12:** Wärmetransport in einem Raum durch freie Konvektion.

Analog zum **Wärmeübergang** gemäß Gl. (1.13) gilt beim **Stoffübergang** mit dem Stoffübergangskoeffizienten  $\beta$  (in m/s) für den **Massenstrom**  $\dot{m}$  bzw. die **Massenstromdichte**  $\dot{m}^*$  als Funktion der **Partialdichtedifferenz**  $(\varrho_w - \varrho_\infty)$ :

$$\dot{m} = \beta \cdot A \cdot (\varrho_w - \varrho_\infty) \quad \text{bzw.} \quad (1.14)$$

$$\dot{m}^* = \beta \cdot (\varrho_w - \varrho_\infty) \quad (1.15)$$

in  $\text{W}/\text{m}^2$  infolge Wärmeleitung mit dem zum Temperaturunterschied proportionalen Temperaturgradienten  $\text{grad } \vartheta$  in  $\text{K}/\text{m}$  und der durchströmten Fläche  $A(\vec{x})$  in  $\text{m}^2$ , wobei die jeweiligen Größen im allgemeinen Fall ortsabhängig sein können:

$$\vec{Q}_\lambda(\vec{x}) = -\lambda(\vec{x}) \cdot A(\vec{x}) \cdot \text{grad } \vartheta \quad \text{bzw.} \quad \vec{q}_\lambda(\vec{x}) = -\lambda(\vec{x}) \cdot \text{grad } \vartheta \quad (1.11)$$

Im **eindimensionalen Fall** (Ortskoordinate  $x$ ) vereinfacht sich Gl. (1.11):

$$\dot{Q}_\lambda(x) = -\lambda(x) \cdot A(x) \cdot \frac{\partial\vartheta}{\partial x} \quad \text{bzw.} \quad \dot{q}_\lambda(x) = -\lambda(x) \cdot \frac{\partial\vartheta}{\partial x} \quad (1.12)$$

Weitere Vereinfachungen von Gl. (1.12) sind bei konstanter Wärmeleitfähigkeit  $\lambda$  bzw. konstanter Fläche  $A$  möglich.

Die **Wärmeleitfähigkeit**  $\lambda$  in  $\text{W}/(\text{m K})$  ist eine Proportionalitätskonstante, die den maßgeblichen Transportkoeffizienten der stationären Wärmeleitung darstellt.  $\lambda$  ist als Stoffeigenschaft im Allgemeinen temperaturabhängig, allerdings ist dies in der Praxis aufgrund begrenzter Temperaturunterschiede häufig vernachlässigbar. In isotropen Stoffen ist  $\lambda$  zudem richtungsunabhängig. Holz besitzt als anisotroper Stoff quer zur Faser eine andere Wärmeleitfähigkeit als längs zur Faser.

### 1.4.3 Konvektion

**Konvektion** (Wärmemitführung) bezeichnet einen massegebundenen Energietransport in einem strömenden Fluid (Flüssigkeit, Gas) durch makroskopische Teilchenbewegung, der stets auch von Wärmeleitung (meist untergeordnet) begleitet wird. Je nach Antriebskraft ist zwischen **freier Konvektion** (natürlicher Konvektion) und **erzwungener Konvektion** (Zwangskonvektion) zu unterscheiden. Bei **Mischkonvektion** überlagern sich beide Konvektionsformen.

Der Wärmefluss zwischen einem Festkörper und einem bewegten Fluid wird als **konvektiver Wärmeübergang** bezeichnet. Bei einem Wärmetransport zwischen zwei durch einen Festkörper getrennten Fluiden (z. B. Wasser und Luft in einem Kühler) liegt ein **Wärmedurchgang** (Wärmetransmission, vgl. Bild 1.11) vor.

Bei der freien Konvektion (Bild 1.12) sind Strömungs- und Temperaturfeld über den thermischen Auftrieb gekoppelt, was die numerische Berechnung erschwert. Bei der erzwungenen Konvektion sind beide Felder voneinander entkoppelt, da der Antrieb durch einen äußeren Druckgradienten erfolgt.

Gemäß dem **Newton'schen Abkühlungsgesetz** (1.13) (I. Newton, 1701) ist der konvektiv übertragene Wärmestrom proportional zur wärmeübertragenden Fläche  $A$  und zum Temperaturunterschied zwischen Wand und Fluid  $(\vartheta_w - \vartheta_\infty)$ :

$$\dot{Q}_\alpha = \alpha_K \cdot A \cdot (\vartheta_w - \vartheta_\infty) \quad \text{bzw.} \quad \dot{q}_\alpha = \alpha_K \cdot (\vartheta_w - \vartheta_\infty) \quad (1.13)$$

Die Wärmestromrichtung ergibt sich aus dem Vorzeichen der wirksamen Temperaturdifferenz, wobei auch hier der 2. Hauptsatz der Thermodynamik (Wärmefluss von warm nach kalt) zu beachten ist.

Die Proportionalitätskonstante  $\alpha_K$  in  $W/(m^2 K)$  heißt **konvektiver Wärmeübergangskoeffizient** (Wärmeübergangszahl). Er hängt von einer Vielzahl von Parametern ab und ist somit nur mit großem Aufwand bzw. entsprechender Unsicherheit berechenbar. In der Praxis werden daher überwiegend experimentelle Daten in Korrelationen mit **dimensionslosen Kennzahlen** (Nußelt-, Rayleigh-, Grashof-, Reynolds-, Pécelet-, Graetz-, Prandtl-Zahl) im Rahmen einer **Ähnlichkeitstheorie** für die Berechnung des Wärmeübergangs herangezogen (vgl. Abschnitt 6.1.2).

$$Nu = \frac{\alpha \cdot L}{\lambda_{Fluid}} \quad \text{bzw.} \quad \alpha = \frac{Nu \cdot \lambda_{Fluid}}{L} \quad (1.16)$$

Die Bezugsgröße  $L$  in der Nußelt-Zahl  $Nu$  (dimensionsloser Wärmeübergangskoeffizient) ist problembezogen sinnvoll zu wählen. Meist stellt sie eine, den jeweiligen Konvektionsvorgang charakterisierende, geometrische Länge (charakteristische Länge, s. Abschnitt 6.1) dar (z. B. Heizkörperhöhe).

Tabelle 1.3 gibt Größenordnungen von Wärmeübergangskoeffizienten an. Der VDI-Wärmeatlas [24] enthält eine umfassende und aktuelle Zusammenstellung abgesicherter Korrelationen für den Wärmeübergang, wobei die jeweiligen Gültigkeitsbereiche zu beachten sind.

### 1.4.4 Wärmestrahlung

**Wärmestrahlung** (Thermische Strahlung) kennzeichnet einen nicht-stoffgebundenen Energietransport durch elektromagnetische Schwingungen (Wellen, vgl. Bild 1.13), der auch im Vakuum (z. B. im Weltall) möglich ist. Kennzeichnend ist die Wellenlänge  $\lambda$  der elektromagnetischen Strahlung (Tabelle 1.4). Wärmestrahlung ist langwellig und damit für das menschliche Auge unsichtbar. Sie kann aber mit speziellen Detektoren (Thermografie, vgl. Bild 1.2) sichtbar gemacht werden.

Thermische Strahlung findet zwischen zwei (oder ggf. mehr) Körperoberflächen statt, wobei die einzelnen Körper nach dem **Sender-Empfänger-Prinzip** Strahlung sowohl aussenden (emittieren) als auch einen Teil der auftreffenden Strahlung aufnehmen (absorbieren).

Der zwischen zwei Körpern 1 und 2 fließende (Netto-)Strahlungswärmestrom beträgt nach dem **Stefan-Boltzmann'schen Strahlungsgesetz** (1.18) (*J. Stefan, 1879; L. Boltzmann, 1884*):

$$\dot{Q}_{\varepsilon 12} = \sigma_{12} \cdot A_1 \cdot (T_1^4 - T_2^4) \quad \text{bzw.} \quad \dot{q}_{\varepsilon 12} = \sigma_{12} \cdot (T_1^4 - T_2^4) \quad (1.18)$$

Die **Strahlungskonstante der Anordnung**  $\sigma_{12}$  in  $W/(m^2 K^4)$  ist ein Proportionalitätsfaktor für die Geometrie und Oberflächeneigenschaften der betreffenden Körper. Sie hängt von der Stefan-Boltzmann-Konstante  $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} W/(m^2 K^4)$  ab.

Im Unterschied zum Fourier'schen Wärmeleitungsansatz (1.11) und zum Newton'schen Abkühlungsgesetz (1.13) gehen die Temperaturen beim Stefan-Boltzmann'schen Gesetz (1.18) in der 4. Potenz ein, wodurch eine **nichtlineare Abhängigkeit** des Wärmestroms  $\dot{Q}_{\varepsilon 12}$  von den Temperaturen bzw. Temperaturdifferenzen resultiert. Weiterhin sind **absolute Temperaturen** einzusetzen (K statt °C!). Daher ist Strahlung bei höheren Temperaturen wirksamer als bei niedrigeren.

**Tabelle 1.3:** Typische Größenordnungen von Wärmeübergangskoeffizienten.

Medium	$\alpha_K$ in $W/(m^2 K)$
<b>freie Konvektion</b>	
Gase	$3 \div 20$
Wasser	$100 \div 600$
<b>erzwungene Konvektion</b>	
Gase	$10 \div 100$
Wasser	$500 \div 10\,000$
<b>Phasenübergang</b>	
siedendes Wasser	$2\,000 \div 25\,000$
kondensierender Wasserdampf	$5\,000 \div 100\,000$

 Analog zur Nußelt-Zahl verwendet man beim Stoffübergang die Sherwood-Zahl  $Sh$  (Diffusionskoeffizient  $D$ ):

$$Sh = \frac{\beta \cdot L}{D} \quad (1.17)$$

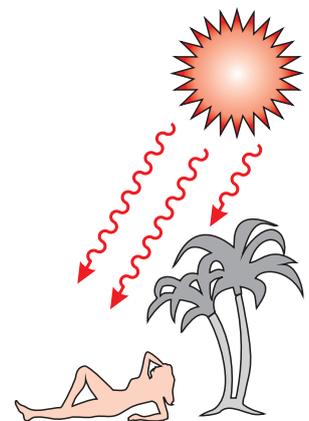
 Die bei der Nußelt-Zahl auftretende Wärmeleitfähigkeit des Fluids  $\lambda_{Fluid}$  darf nicht mit der Wärmeleitfähigkeit der festen Wand  $\lambda_{Wand}$  verwechselt werden.

In der Biot-Zahl  $Bi = \frac{\alpha \cdot L}{\lambda_{Wand}}$  wird hingegen die Wärmeleitfähigkeit des Festkörpers verwendet.

**Tabelle 1.4:** Relevante Wellenlängenbereiche der elektromagnetischen Strahlung.

Strahlungsart	$\lambda$ in nm
Ultraviolett (UV)	$280 \div 380$
sichtbares Licht (VIS)	$380 \div 780$
Infrarot (IR)	$> 780$

 Für die Wellenlänge wird dasselbe Symbol  $\lambda$  verwendet wie für die Wärmeleitfähigkeit.



Sonne → Haut → Sonnenbrand

**Bild 1.13:** Wärmetransport durch Strahlung.

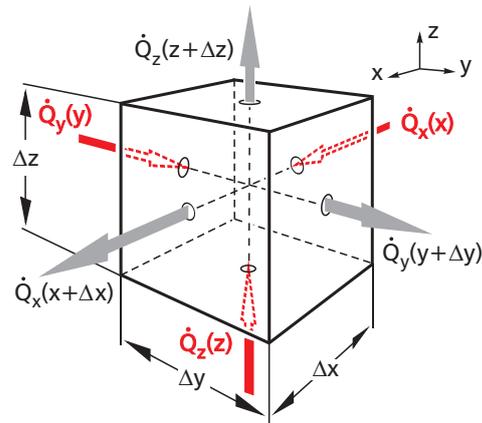


Der in Gl. (1.20) definierte Wärmeübergangskoeffizient für Strahlung hängt von den Temperaturen der beteiligten Körper ab:

$$\alpha_{\text{Str}} = \alpha_{\text{Str}}(T_1, T_2)$$

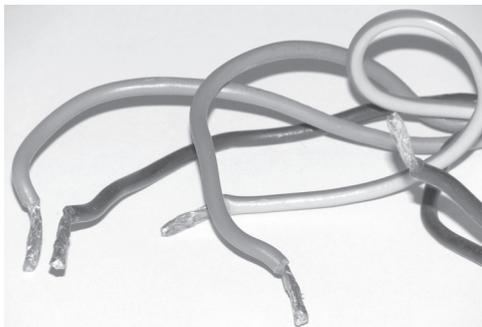


**Bild 1.14:** Begehbare doppelschalige Fassade als Beispiel für das simultane Auftreten der Wärmeübertragungsmechanismen.



→ zufließend    ← abfließend

**Bild 1.15:** Zu- und abfließende Wärmeströme am infinitesimalen Kontrollvolumen.



**Bild 1.16:** Stromkabel als Beispiel für Wärmeleitung mit inneren Wärmequellen.

Aus der Temperaturdifferenz  $T_1^4 - T_2^4$  kann mit binomischer Formel ein linearer Faktor abgespalten werden:

$$\dot{q}_{\varepsilon 12} = \sigma_{12} \cdot (T_1 + T_2) \cdot (T_1^2 + T_2^2) \cdot (T_1 - T_2) \quad (1.19)$$

Durch die formale Definition des **Wärmeübergangskoeffizienten für Strahlung** (radiativer Wärmeübergangskoeffizient)

$$\alpha_{\text{Str}} := \sigma_{12} \cdot (T_1 + T_2) \cdot (T_1^2 + T_2^2) \quad (1.20)$$

folgt eine zur Konvektion analoge lineare Beziehung für die Strahlungswärmestromdichte  $\dot{q}_{\varepsilon 12}$ :

$$\dot{q}_{\varepsilon 12} = \alpha_{\text{Str}} \cdot (T_1 - T_2) \quad (1.21)$$

Vielfach sind der zwischen zwei Flächen 1 und 2 übertragene Netto-Strahlungswärmestrom  $\dot{Q}_{\varepsilon 12}$  und der konvektive Wärmestrom  $\dot{Q}_{\alpha}$  an die Umgebungsluft (Temperatur  $\vartheta_{\infty}$ ) parallel gerichtet und addieren sich daher ( $A = A_1$ ):

$$\dot{Q}_{\text{ges}} = \dot{Q}_{\varepsilon 12} + \dot{Q}_{\alpha} = \alpha_{\text{Str}} \cdot A_1 \cdot (\vartheta_1 - \vartheta_2) + \alpha_{\text{K}} \cdot A_1 \cdot (\vartheta_1 - \vartheta_{\infty}) \quad (1.22)$$

Für geringe Unterschiede zwischen der Oberflächentemperatur der zweiten Fläche  $A_2$  und der Umgebungstemperatur  $\vartheta_2 \approx \vartheta_{\infty}$  lässt sich diese Gleichung vereinfachen:

$$\begin{aligned} \dot{Q}_{\text{ges}} &\approx \alpha_{\text{Str}} \cdot A_1 \cdot (\vartheta_1 - \vartheta_{\infty}) + \alpha_{\text{K}} \cdot A_1 \cdot (\vartheta_1 - \vartheta_{\infty}) \\ &= (\alpha_{\text{Str}} + \alpha_{\text{K}}) \cdot A_1 \cdot (\vartheta_1 - \vartheta_{\infty}) \end{aligned} \quad (1.23)$$

Dann ist die Einführung des **Gesamtwärmeübergangskoeffizienten**  $\alpha_{\text{ges}}$  zweckmäßig:

$$\alpha_{\text{ges}} = \alpha_{\text{Str}} + \alpha_{\text{K}} \quad (1.24)$$

## 1.5 Fourier'sche Wärmeleitungsgleichung

### 1.5.1 Mehrdimensionale instationäre Wärmeleitung mit inneren Wärmequellen

Im allgemeinen Fall liegt ein mehrdimensionales und zeitabhängiges Temperaturfeld  $\vartheta(\vec{x}, t)$  vor. Aus einer Energiebilanz am differentiellen Kontrollvolumen (Bild 1.15) lässt sich die allgemeine Fourier'sche Wärmeleitungsdifferentialgleichung herleiten, die den instationären Wärmetransport in einem homogenen Festkörper mit inneren Wärmequellen beschreibt. Sie lautet für konstante Stoffwerte  $\lambda, \varrho, c_p$  in kartesischen Koordinaten  $(x, y, z)$ :

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = a \cdot \left( \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2} \right) + \frac{\dot{e}_q}{\varrho \cdot c_p} \quad (1.25)$$

$$a := \frac{\lambda}{\varrho \cdot c_p} \quad (1.26)$$

Die **Temperaturleitfähigkeit**  $a$  in  $\text{m}^2/\text{s}$  stellt den Transportkoeffizienten der instationären Wärmeleitung dar.  $\varrho$  ist die Massendichte (Dichte) in  $\text{kg}/\text{m}^3$ ,  $c_p$  die spezifische isobare Wärmekapazität in  $\text{J}/(\text{kg K})$  und  $\dot{e}_q$  die **volumenbezogene Dichte der inneren Wärmequellen** (Wärmequellendichte) in  $\text{W}/\text{m}^3$  (z. B. Ohm'sche Verluste in einem elektrischen Leiter, vgl. Bild 1.16).

### 1.5.2 Koordinatenunabhängige Schreibweise

Der Nabla-Operator  $\nabla$  und der Delta-Operator  $\Delta = \nabla^2$  gestatten eine koordinatenunabhängige Darstellung von Gl. (1.25):

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = a \cdot \Delta \vartheta + \frac{\dot{e}_q}{\rho \cdot c_p} = a \cdot \nabla^2 \vartheta + \frac{\dot{e}_q}{\rho \cdot c_p} \quad (1.27)$$

Der Laplace-Operator (Delta-Operator) lautet für

► **kartesische Koordinaten**  $(x, y, z)$  gemäß Bild 1.17:  $\vartheta = \vartheta(x, y, z)$

$$\Delta \vartheta = \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2} \quad (1.28)$$

► **Zylinderkoordinaten**  $(r, \varphi, z)$  gemäß Bild 1.18:  $\vartheta = \vartheta(r, \varphi, z)$

$$\Delta \vartheta = \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left( r \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2} \quad (1.29)$$

► **Kugelkoordinaten**  $(r, \varphi, \psi)$  gemäß Bild 1.19:  $\vartheta = \vartheta(r, \varphi, \psi)$

$$\Delta \vartheta = \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \varphi^2} + \frac{\cot \psi}{r^2} \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial \psi} + \frac{1}{r^2 \cdot \sin^2 \psi} \cdot \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \psi^2}$$

$$= \frac{1}{r^2} \cdot \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \psi} \cdot \frac{\partial}{\partial \psi} \left( \sin \psi \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial \psi} \right) + \frac{1}{\sin^2 \psi} \cdot \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \varphi^2} \right\} \quad (1.30)$$

### 1.5.3 Eindimensionale instationäre Wärmeleitung

Eindimensionale zeitabhängige Temperaturfelder  $\vartheta = \vartheta(r, t)$ , die nur von einer Ortskoordinate  $r$  abhängen, lassen sich mit der **verallgemeinerten Gleichung** (1.31) mittels Geometrieparameter  $n$  beschreiben:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = a \cdot \left( \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial r^2} + \frac{n}{r} \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial r} \right) \quad \begin{array}{l} n = 0 \text{ (ebene Platte)} \\ n = 1 \text{ (Zylinder)} \\ n = 2 \text{ (Kugel)} \end{array} \quad (1.31)$$

### 1.5.4 Stationäre Wärmeleitung mit Wärmequellen

Die **Poisson'sche Differenzialgleichung** (1.32) gilt für stationäre Temperaturfelder  $\left( \frac{\partial \vartheta}{\partial t} = 0 \right)$  mit Wärmequellen:

$$a \cdot \nabla^2 \vartheta + \frac{\dot{e}_q}{\rho \cdot c_p} = a \cdot \Delta \vartheta + \frac{\dot{e}_q}{\rho \cdot c_p} = 0 \quad (1.32)$$

### 1.5.5 Stationäre Wärmeleitung ohne Wärmequellen

Bei stationärer Wärmeleitung  $\left( \frac{\partial \vartheta}{\partial t} = 0 \right)$  ohne Wärmequellen ( $\dot{e}_q = 0$ ) gilt die **Laplace'sche Differenzialgleichung** (Potenzialgleichung):

$$\nabla^2 \vartheta = \Delta \vartheta = 0 \quad (1.33)$$

In einer **homogenen ebenen Platte ohne Wärmequellen** liegt im stationären eindimensionalen Fall ein lineares Temperaturprofil und ein konstanter Temperaturgradient vor:

$$\frac{d^2 \vartheta}{dx^2} = 0 \Rightarrow \frac{d\vartheta}{dx} = C_1 \Rightarrow \vartheta(x) = C_1 \cdot x + C_2 \quad (1.34)$$

Die Konstanten  $C_1$  und  $C_2$  (Integrationskonstanten) sind aus 2 Randbedingungen zu bestimmen.

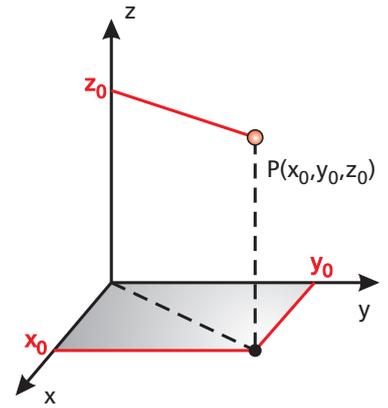


Bild 1.17: Kartesische Koordinaten  $x, y, z$ .

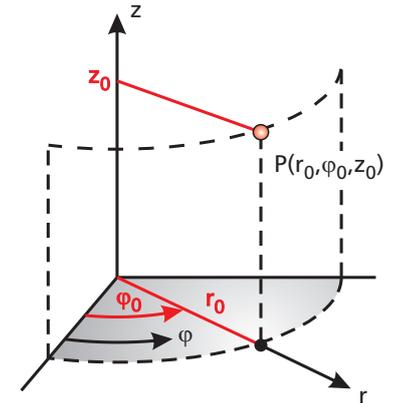


Bild 1.18: Zylinderkoordinaten  $r, \varphi, z$  (Radius  $r$ , Azimutwinkel  $\varphi$ , Axialkoordinate  $z$ ).

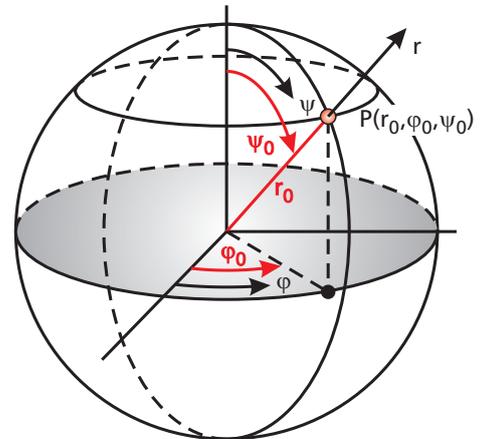


Bild 1.19: Kugelkoordinaten  $r, \varphi, \psi$  (Radius  $r$ , Azimutwinkel  $\varphi$ , Zenitwinkel  $\psi$ ).

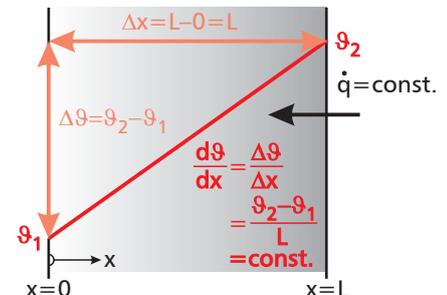
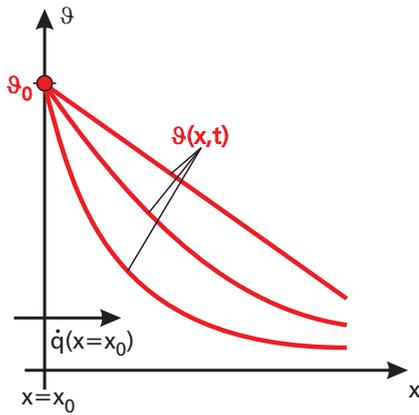
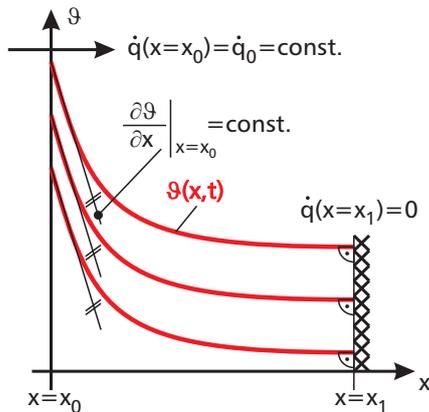


Bild 1.20: Lineares Temperaturprofil einer homogenen Wand ohne Wärmequellen.

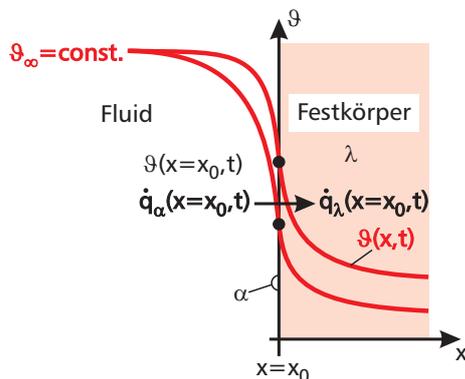


**Bild 1.21:** Eindimensionaler oberflächennaher Temperaturverlauf bei RB 1. Art.



**Bild 1.22:** Eindimensionaler oberflächennaher Temperaturverlauf bei RB 2. Art.

 Gl. (1.38) gilt auch in der Mitte ( $x_0 = 0$ ) eines symmetrischen Körpers (s. a. Bild 5.9), da ein Wärmefluss über die Körpermitte nur bei einem entsprechenden Gradienten möglich wäre, was allerdings die Symmetriebedingung verletzen würde.



**Bild 1.23:** Eindimensionaler oberflächennaher Temperaturverlauf bei RB 3. Art.

 Die Koppelung von zwei Fluiden über einen Wärmedurchgangskoeffizienten  $k$  stellt eine **verallgemeinerte RB 3. Art** dar (vgl. Abschnitt 1.7.3).

## 1.6 Anfangs- und Randbedingungen

### 1.6.1 Anfangsbedingungen

Die **Anfangsbedingung (AB)** ist stets eine **zeitliche Bedingung**, die nur bei instationären Wärmetransportvorgängen auftritt. Sie beschreibt die Temperaturverteilung an allen Körperpunkten  $(x,y,z)$  zur Zeit  $t_0$  (meist ist  $t_0 = 0$ ):

$$\vartheta(x,y,z,t=t_0) = \vartheta_0(x,y,z) \quad \text{oder}$$

$$\vartheta(x,y,z,t=t_0) = \vartheta_0 = \text{const.} \quad (1.35)$$

### 1.6.2 Randbedingungen

Demgegenüber sind **Randbedingungen (RBn)** **örtliche Bedingungen**, die sowohl bei instationären als auch bei stationären Wärmetransportvorgängen auftreten. Bei der Lösung instationärer mehrdimensionaler Wärmetransportprobleme können bis zu 7 Bedingungen gestellt werden (je 2 RBn pro Koordinatenrichtung und 1 AB in der Zeit). Bei stationären Wärmetransportvorgängen sind maximal 6 Randbedingungen (je 2 pro Koordinate) möglich. Bei entsprechender Unabhängigkeit des Temperaturfelds bezüglich einer Koordinatenrichtung entfallen jeweils 2 RBn. So sind für die instationäre eindimensionale Wärmeleitung 2 RBn und 1 AB notwendig.

Die **Randbedingung 1. Art** (Dirichlet'sche Randbedingung) beinhaltet gemäß Bild 1.21 die **Temperaturvorgabe** am jeweiligen Rand (Vorgabe des Funktionswertes):

$$\vartheta(x=x_0,y,z,t) = \vartheta_0(y,z,t) \quad (1.36)$$

Die **Randbedingung 2. Art** (Neumann'sche Randbedingung) beinhaltet gemäß Bild 1.22 die **Vorgabe der Wärmestromdichte und damit des Temperaturgradienten** am jeweiligen Rand (eindimensional: Vorgabe der Kurvensteigung bzw. Tangente der Temperaturfunktion):

$$\dot{q}(x=x_0,y,z,t) = -\lambda \cdot \left. \frac{\partial \vartheta(x,y,z,t)}{\partial x} \right|_{x=x_0} \quad (1.37)$$

Ein besonderer Fall der RB 2. Art ist die **adiabate Oberfläche**:

$$\dot{q}(x=x_0) = 0 \iff \left. \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right|_{x=x_0} = 0 \quad (1.38)$$

Die **Randbedingung 3. Art** (Newton'sche oder Robin'sche Randbedingung) kennzeichnet den **Wärmeübergang von einer festen Oberfläche an ein Fluid** der Temperatur  $\vartheta_\infty$  mit dem Wärmeübergangskoeffizienten  $\alpha$  (Bild 1.23). Sie koppelt damit Funktionswert (Oberflächentemperatur) und Steigung (Temperaturgradient an der Oberfläche):

$$\dot{q}_\alpha(x=x_0,t) = \dot{q}_\lambda(x=x_0,t) \iff \alpha \cdot [\vartheta_\infty - \vartheta(x=x_0,t)] = -\lambda \cdot \left. \frac{\partial \vartheta(x,t)}{\partial x} \right|_{x=x_0} \quad (1.39)$$

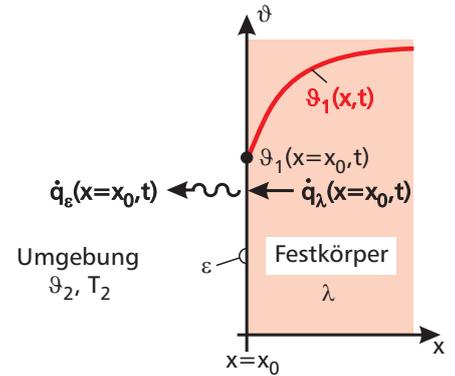
Die Randbedingung 1. Art lässt sich für den Grenzübergang  $\alpha \rightarrow \infty$  aus der Randbedingung 3. Art ableiten:

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} (\text{RB 3. Art}) = \text{RB 1. Art} \quad \alpha \rightarrow \infty \iff \vartheta(x=x_0,t) \rightarrow \vartheta_\infty \quad (1.40)$$

Die **Randbedingung 4. Art** (Stefan'sche Randbedingung) kennzeichnet die Gleichheit der Wärmeströme infolge Wärmeleitung und Wärmestrahlung an einer Oberfläche (Bild 1.24):

$$\dot{q}_\varepsilon(x=x_0, t) = \dot{q}_\lambda(x=x_0, t) \iff \sigma_{12} \cdot \left[ (\vartheta_1(x=x_0, t) + T_0)^4 - T_2^4 \right] = -\lambda \cdot \left. \frac{\partial \vartheta_1(x, t)}{\partial x} \right|_{x=x_0} \quad (1.41)$$

Im Unterschied zu den übrigen Randbedingungen handelt es sich bei der Randbedingung 4. Art um eine **nichtlineare** Randbedingung.



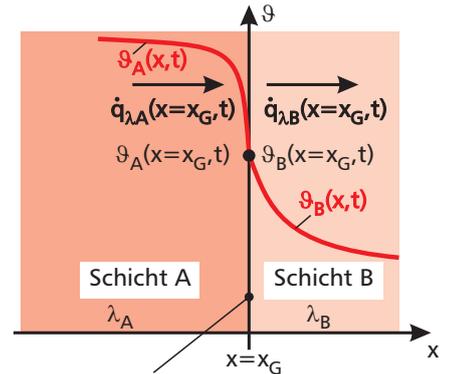
**Bild 1.24:** Strahlung als RB 4. Art.

### 1.6.3 Koppelbedingungen

Bei der Wärmeleitung in mehrschichtigen Körpern treten **Koppelbedingungen** auf (Bild 1.25). Bei idealem Wärmeübergang (Kontaktwiderstand  $R_{th,C} = 0$ ) liegt an der Grenzfläche  $x_G$  **dieselbe Temperatur** und **dieselbe Wärmestromdichte** in beiden Schichten A und B vor, d. h. die Koppelung beinhaltet 2 Randbedingungen:

$$\vartheta_A(x=x_G, t) = \vartheta_B(x=x_G, t) \quad (1.42)$$

$$\dot{q}_{\lambda,A}(x=x_G, t) = \dot{q}_{\lambda,B}(x=x_G, t) \iff -\lambda_A \cdot \left. \frac{\partial \vartheta_A(x, t)}{\partial x} \right|_{x=x_G} = -\lambda_B \cdot \left. \frac{\partial \vartheta_B(x, t)}{\partial x} \right|_{x=x_G} \quad (1.43)$$



Grenzfläche (idealer thermischer Kontakt)

**Bild 1.25:** Koppelbedingungen an der Kontaktfläche zweier Festkörperschichten.

## 1.7 Elektrische Analogie

Wärmetransportvorgänge können durch die auf dem Ohm'schen Gesetz basierende elektrische Analogie **wesentlich** vereinfacht werden. Unabhängig vom Wärmetransportmechanismus kann einem infolge einer Temperaturdifferenz  $\vartheta_1 - \vartheta_2$  fließenden Wärmestrom  $\dot{Q}$  ein **thermischer Widerstand**  $R_{th}$  zugeordnet werden. Dieser ist begrifflich und symbolmäßig vom **spezifischen thermischen Widerstand**  $R_{th}^*$  streng zu unterscheiden (vgl. Abschnitt 1.7.2 sowie AH II, S. 347).

Für die Temperaturdifferenz gilt bei positivem Wärmestrom  $+\dot{Q}$  die Vorzeichenregel „ $\vartheta_{Pfeilfuß} - \vartheta_{Pfeilspitze}$ “ bzw. die Notation mit  $-\dot{Q}$  nach Gl. (1.12) (vgl. Tab. 1.5).

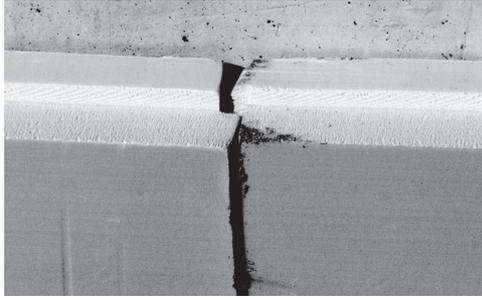
**Tabelle 1.5:** Analogie zwischen elektrischer Stromleitung und Wärmeleitung mithilfe des Ohm'schen Gesetzes.

Art	elektrisch	thermisch
Strom (Wirkung)	elektrischer Strom $I$	Wärmestrom $\dot{Q}$
treibendes Gefälle (Ursache)	Potenzialdifferenz $U_1 - U_2$ (Spannungsdifferenz)	Temperaturdifferenz $\vartheta_1 - \vartheta_2$
Widerstand (Koppelung)	Ohm'scher Widerstand $R_{el}$  $R_{el} = \frac{U_2 - U_1}{-I} = \frac{U_1 - U_2}{I}; \quad [R_{el}] = \frac{V}{A} = \Omega$	thermischer Widerstand $R_{th}$  $R_{th} = \frac{\vartheta_2 - \vartheta_1}{-\dot{Q}} = \frac{\vartheta_1 - \vartheta_2}{\dot{Q}}; \quad [R_{th}] = \frac{K}{W}$
Leitwert	elektrischer Leitwert $G_{el} = \frac{I}{U_1 - U_2} = \frac{1}{R_{el}}; \quad [G_{el}] = \frac{A}{V} = S = \mathcal{U}$	thermischer Leitwert $G_{th} = L_{th} = \frac{\dot{Q}}{\vartheta_1 - \vartheta_2} = \frac{1}{R_{th}}; \quad [G_{th}] = \frac{W}{K}$
Zusammenhänge	$R_{el} = \frac{L}{\sigma \cdot A}$ $\sigma$ : spezifische elektrische Leitfähigkeit $A$ : Leiterquerschnitt (senkrecht zu $I$ ) $L$ : Leiterlänge	$R_{th} = \frac{\vartheta_1 - \vartheta_2}{\dot{Q}} \cdot \frac{L}{\lambda \cdot A} = \frac{L}{\lambda \cdot A}$ (für ebene Schicht) $\lambda$ : Wärmeleitfähigkeit $A$ : Schichtquerschnitt (senkrecht zu $\dot{Q}$ ) $L$ : Schichtdicke

 Zunächst werden **ebene Schichten** betrachtet, zylindrische und kugelförmige Geometrien folgen in den Abschnitten 3.1.3 und 3.1.4.



Um Verwechslungen von thermischen Widerständen und Leitwerten mit anderen Symbolen zu vermeiden, werden thermische Widerstände und Leitwerte mit dem Zusatz „th“ indiziert.



**Bild 1.26:** Erhöhung des thermischen Widerstandes einer Wand durch Dämmplatten.

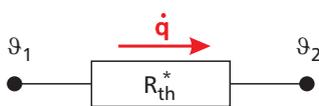
 In der Bauphysik bezeichnet  $R_{si}$  den spezifischen inneren Wärmeübergangswiderstand  $R_{\alpha i}$  (surface internal) und  $R_{se}$  den spezifischen äußeren Wärmeübergangswiderstand  $R_{\alpha e}$  (surface external).



In der Literatur und auch in verschiedenen Normen werden thermische Widerstände und spezifische thermische Widerstände nicht exakt unterschieden, was zu Missverständnissen führen kann. Zur Unterscheidung werden im Folgenden allgemeine flächenbezogene Widerstände und Leitwerte mit einem **Stern** indiziert („Sternwerte“). Bei den in der Praxis für spezifische Widerstände eingeführten Symbolen  $R$ ,  $R_{si}$ ,  $R_{se}$  und  $R_T$  wird auf einen zusätzlichen Stern verzichtet. Thermische Widerstände und Leitwerte werden demgegenüber mit „th“ ohne Stern indiziert.

 Allgemein wird der Begriff „Wärmedurchlass“ nicht nur bei der Wärmeleitung auch bei konvektivem und radiativem Wärmefluss durch Zwischenräume (z. B. Verglasungen) verwendet.

 Wegen der konstanten Fläche  $A$  sind **spezifische thermische Widerstände** („kleines Paket“, s. S. 350) bei ebener Geometrie vorteilhaft.



**Bild 1.27:** Koppelung spezifischer thermischer Widerstand und Wärmestromdichte.

Insbesondere ist es möglich, in Serie oder parallel liegende thermische Widerstände zusammenzufassen. Tabelle 1.5 zeigt die grundlegenden Zusammenhänge der elektrischen Analogie.

### 1.7.1 Thermische Widerstände und Leitwerte

Der **thermische Widerstand für Wärmeleitung** (Wärmeleitwiderstand, Index  $\lambda$ ) beträgt für eine ebene Schicht der Dicke  $L$ :

$$R_{th,\lambda} = \frac{\Delta\vartheta}{\dot{Q}_\lambda} = \frac{L}{\lambda \cdot A}; \quad [R_{th,\lambda}] = \frac{K}{W} \quad (1.44)$$

Der inverse thermische Widerstand  $R_{th,\lambda}$  stellt in Analogie zur Elektrotechnik einen thermischen Leitwert  $L_{th,\lambda}$  dar:

$$L_{th,\lambda} = \frac{1}{R_{th,\lambda}} = \frac{\lambda \cdot A}{L}; \quad [L_{th,\lambda}] = \frac{W}{K} \quad (1.45)$$

Der **thermische Widerstand für den konvektiven Wärmeübergang** (Index  $\alpha$ ) beträgt:

$$R_{th,\alpha} = \frac{\Delta\vartheta}{\dot{Q}_\alpha} = \frac{1}{\alpha \cdot A}; \quad [R_{th,\alpha}] = \frac{K}{W} \quad (1.46)$$

### 1.7.2 Spezifische thermische Widerstände und Leitwerte

Der Bezug thermischer Widerstände  $R_{th}$  und thermischer Leitwerte  $L_{th}$  auf die wärmedurchflossene Fläche  $A$  ergibt **spezifische thermische Widerstände** (Sternwiderstände) und **spezifische thermische Leitwerte** (Koeffizienten), die Wärmestromdichte und Temperaturdifferenz koppeln (Bild 1.27):

$$L_{th} = \frac{1}{R_{th}} = \frac{\dot{Q}}{\Delta\vartheta} \quad \text{bzw.} \quad L_{th}^* = \frac{1}{R_{th}^*} = \frac{\dot{q}}{\Delta\vartheta} = \frac{\dot{Q}}{A \cdot \Delta\vartheta} \quad (1.47)$$

Zwischen thermischen und spezifischen thermischen Widerständen bzw. thermischen und spezifischen thermischen Leitwerten bestehen die Zusammenhänge:

$$R_{th} = \frac{R_{th}^*}{A} \quad \text{bzw.} \quad R_{th}^* = R_{th} \cdot A \quad [R_{th}^*] = \frac{m^2 K}{W} \quad (1.48)$$

$$L_{th} = L_{th}^* \cdot A \quad \text{bzw.} \quad L_{th}^* = \frac{L_{th}}{A} \quad [L_{th}^*] = \frac{W}{m^2 K} \quad (1.49)$$

Von besonderer Relevanz sind der (spezifische) **Wärmedurchlasswiderstand** (Wärmeleitwiderstand)  $R = R_\lambda$ , der **Wärmedurchlasskoeffizient**  $\Lambda = L_\lambda$  und der (spezifische) **Wärmeübergangswiderstand**  $R_\alpha$ :

$$R = R_\lambda = R_{th,\lambda}^* = R_{th,\lambda} \cdot A = \frac{L}{\lambda}; \quad [R] = \frac{m^2 K}{W} \quad (1.50)$$

$$\Lambda = L_\lambda = L_{th,\lambda}^* = \frac{1}{R} = \frac{1}{R_{th,\lambda}^*} = \frac{\lambda}{L}; \quad [\Lambda] = \frac{W}{m^2 K} \quad (1.51)$$

$$R_\alpha = R_{th,\alpha}^* = R_{th,\alpha} \cdot A = \frac{1}{\alpha}; \quad [R_\alpha] = \frac{m^2 K}{W} \quad (1.52)$$

Als spezifische thermische Widerstände geben der Wärmedurchlasswiderstand  $R$  in Gl. (1.50), der Wärmeübergangswiderstand  $R_\alpha$  in Gl. (1.52) und der Wärmedurchgangswiderstand  $R_T$  in Gl. (1.55) das Verhältnis von Temperaturdifferenz und Wärmestromdichte wieder.

### 1.7.3 Wärmedurchgangskoeffizient und Wärmedurchgangswiderstand

Die Kombination von Wärmeübergang und Wärmeleitung wird als **Wärmedurchgang** (Wärmetransmission) bezeichnet. Der Wärmestrom infolge Wärmedurchgangs von Fluid 1 (Temperatur  $\vartheta_{\infty 1}$ ) an Fluid 2 (Temperatur  $\vartheta_{\infty 2}$ ) durch eine einschichtige ebene Wand lässt sich mit dem **Wärmedurchgangskoeffizienten**  $k$  ( $k$ -Wert) schreiben als:

$$\dot{Q} = -k \cdot A \cdot (\vartheta_{\infty 2} - \vartheta_{\infty 1}) = k \cdot A \cdot (\vartheta_{\infty 1} - \vartheta_{\infty 2}) = \frac{A \cdot (\vartheta_{\infty 1} - \vartheta_{\infty 2})}{R_T} \quad (1.53)$$

$$k = \frac{1}{R_T} = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{L}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2}} \quad (1.54)$$

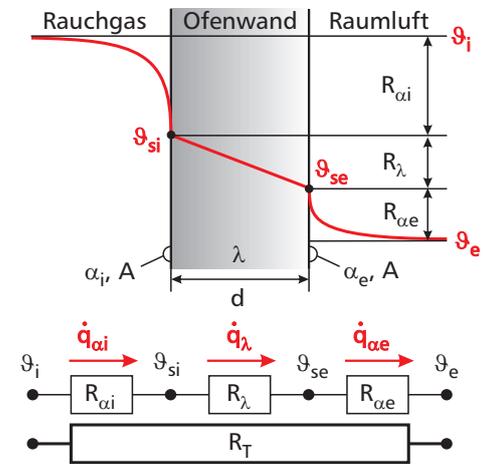
$$R_T = \frac{1}{k} = \frac{1}{\alpha_1} + \frac{L}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2} = R_{\alpha 1} + R_{\lambda} + R_{\alpha 2} (= R_{th, \alpha 1}^* + R_{th, \lambda}^* + R_{th, \alpha 2}^*) \quad (1.55)$$

Der **Wärmedurchgangswiderstand**  $R_T$  in  $(m^2 K) / W$  (spezifischer Widerstand) ist der Kehrwert des Wärmedurchgangskoeffizienten. Bei mehrschichtigen Wänden ist  $R_{\lambda} = R$  in Gl. (1.55) sinngemäß durch die Summe der einzelnen Wärmeleitwiderstände zu ersetzen.

Bild 1.28 zeigt den Wärmedurchgang durch eine Ofenwand vom Rauchgas zur Raumluft. Bei nichtspeichernder Ofenwand (z. B. dünnes Blech) bzw. im stationären Fall besteht über den Wärmedurchgangswiderstand  $R_T$  bzw. den Wärmedurchgangskoeffizienten  $k$  eine direkte Koppelung zwischen Rauchgas und Raumluft, d. h. eine Erhöhung der Gastemperatur bewirkt einen unmittelbaren Anstieg der Lufttemperatur. Bei speichernder Wand (z. B. Schamottekacheln) erfolgt die Temperaturerhöhung zeitversetzt, da neben der Luft auch die Wand aufzuheizen ist. Die thermische Koppelung zwischen den beiden Fluiden ist über den Wärmedurchgangswiderstand  $R_T$  beschreibbar. Gemäß Gl. (1.55) addieren sich dabei der innere Wärmeübergangswiderstand zwischen Rauchgas und Wand  $R_{\alpha i}$ , der Wärmeleitwiderstand der Wand  $R_{\lambda}$  und der äußere Wärmeübergangswiderstand zwischen Wand und Raumluft  $R_{\alpha e}$ , wobei der größte thermische Widerstand den Wärmedurchgang dominiert. Die thermische Koppelung über einen Wärmedurchgangskoeffizienten  $k$  kann als **verallgemeinerte Randbedingung 3. Art** interpretiert werden.

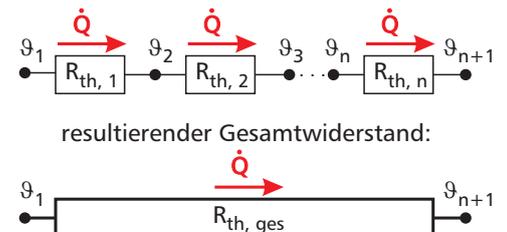
Insbesondere in der Bauphysik ist seit einigen Jahren das international verwendete Symbol  $U$  für den Wärmedurchgangskoeffizienten ( $U$ -Wert) üblich, das sich aber in der Wärmeübertragung bisher nicht durchgesetzt hat.

Durch Einführen des Wärmedurchgangskoeffizienten  $k$  kann das Newton'sche Abkühlungsgesetz (1.13) vorteilhaft auch für den Wärmedurchgang herangezogen werden, womit den kombinierten Wärmeübertragungsmechanismen Konvektion und Wärmeleitung Rechnung getragen wird. Innerhalb eines Bauteils können weitere Wärmeübertragungsmechanismen auftreten (z. B. Konvektion und Strahlung im Zwischenraum einer Verglasung).



**Bild 1.28:** Wärmedurchgang durch eine Ofenwand.

Bei hohem Wärmeübergang zum Rauchgas und dünner metallener Ofenwand tritt nur ein geringer Temperaturabfall zwischen Rauchgastemperatur  $\vartheta_i$  und ofenseitiger Wandtemperatur  $\vartheta_{si}$  auf. Da dann der raumseitige Wärmeübergangswiderstand  $R_{\alpha e}$  den Wärmedurchgang bestimmt, gilt  $k \approx \alpha_e$ . Bei ähnlicher Größenordnung der einzelnen thermischen Widerstände ist der Wärmedurchgangskoeffizient kleiner als jeder einzelne Leitwert.



**Bild 1.29:** Resultierender thermischer Gesamtwiderstand bei einer Serienschaltung.

### 1.7.4 Reihenschaltung thermischer Widerstände

Bei der **Serienschaltung** fließt durch alle thermischen Widerstände  $R_{th, j}$  ( $j = 1 \dots n$ ) gemäß Bild 1.29 derselbe Wärmestrom  $\dot{Q}$ :

$$\dot{Q} = \frac{\vartheta_1 - \vartheta_2}{R_{th, 1}} = \frac{\vartheta_2 - \vartheta_3}{R_{th, 2}} = \frac{\vartheta_k - \vartheta_{k+1}}{R_{th, k}} = \frac{\vartheta_n - \vartheta_{n+1}}{R_{th, n}} = \frac{\vartheta_1 - \vartheta_{n+1}}{R_{th, ges}} \quad (1.56)$$

Der thermische Gesamtwiderstand (Ersatzwiderstand) folgt durch Addition der einzelnen thermischen Widerstände:

$$R_{th, ges} = \sum_{j=1}^n R_{th, j} = R_{th, 1} + R_{th, 2} + \dots + R_{th, k} + \dots + R_{th, n} \quad (1.57)$$

Für die Reihenschaltung spezifischer Widerstände ebener Geometrien gilt Gl. (1.57) analog, bei gekrümmten Geometrien müssen dabei alle Widerstände dieselbe Bezugsfläche haben (vgl. Arbeitshilfen II S. 347).