Marcel Klinger,
Alexander Schüler-Meyer,
Lena Wessel (Hrsg.)

Hanse-Kolloquium zur Hochschuldidaktik der Mathematik 2018

Beiträge zum gleichnamigen Symposium am 9. & 10. November 2018 an der Universität Duisburg-Essen

WTM
Verlag für wissenschaftliche Texte und Medien
Münster

Schriften zur Hochschuldidaktik Mathematik 6

Schriften zur Hochschuldidaktik Mathematik

Herausgegeben von
Christine Bescherer, Marcel Klinger
und Walther Paravicini

Band 6

MARCEL KLINGER,
ALEXANDER SCHÜLER-MEYER,
LENA WESSEL (HRSG.)

HANSE-KOLLOQUIUM ZUR HOCHSCHULDIDAKTIK DER MATHEMATIK 2018

BEITRÄGE ZUM GLEICHNAMIGEN SYMPOSIUM
AM 9. & 10. NOVEMBER 2018
AN DER UNIVERSITÄT DUISBURG-ESSEN

WTM
Verlag für wissenschaftliche Texte und Medien
Münster

Bibliografische Information der Deutschen Bibliothek

Die Deutsche Bibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte Informationen sind im Internet über http://dnb.ddb.de abrufbar

Druck durch:
winterwork
04451 Borsdorf
http://www.winterwork.de/

Umschlagsfotografie: Michael Gaida, Düsseldorf

Alle Rechte vorbehalten. Kein Teil des Werkes darf ohne schriftliche Einwilligung des Verlags in irgendeiner Form reproduziert oder unter Verwendung elektronischer Systeme verarbeitet, vervielfältigt oder verbreitet werden.

© WTM – Verlag für wissenschaftliche Texte und Medien, Münster 2019 - E-Book
ISBN 978-3-95987-098-6

Inhalt

Klinger, Marcel; Schüler-Meyer, Alexander; Wessel, Lena

Vielfalt, die verbindet: Der Übergang Schule–Hochschule im Rahmen des Hanse-Kolloquiums zur Hochschuldidaktik der Mathematik 2018 in Essen 3

Hauptvorträge

Barzel, Bärbel

Von der Herausforderung, die Hochschuleingangsphase in Mathematik konstruktiv zu gestalten – Strukturen und Aufgaben 9

Rønning, Frode

Interaktion, Aktivität und Sprachförderung beim Lernen von Hochschulmathematik – Beispiele aus einem Norwegischen Entwicklungsprojekt 19

Sarikaya, Nimet; Furlan, Peter

Ein Vergleich von Unterstützungsmaßnahmen im ersten Studienjahr zwischen Fachhochschule und Universität 29

Sektionsvorträge

Altieri, Mike; Schellenbach, Michael; Schirmer, Evelyn; Opfermann, Christiane; Kunze, Jan Erik; Regnet, Julian; Paluch, Dirk

Unreal Engine 4 trifft H5P und PBL – Integration einer virtuellen Realität mit interaktiven Erklärvideos in ein digitales Fachkonzept zur Unterstützung problembasierten Lernens ... 39

Bach, Volker; Barbas, Helena; Gasser, Ingenuin; Konieczny, Franz; Lohse, Alexander; Seiler, Ruedi

Formatives Assessment in Mathe-Kursen für Erstsemester: Digitalisierung eine Chance? . 55

Bauer, Thomas

Design von Aufgaben für Peer Instruction zum Einsatz in Übungsgruppen zur Analysis 63

Klinger, M., Schüler-Meyer, A. & Wessel, L. (Hrsg.) (2019). Hanse-Kolloquium zur Hochschuldidaktik der Mathematik 2018: Beiträge zum gleichnamigen Symposium am 9. und 10. November 2018 an der Universität Duisburg-Essen. Münster: WTM.

Blum, Silvia

Diskontinuität in der Linearen Algebra: Was bedeutet der höhere Standpunkt? – Konkretisierung einer Denkfigur und qualitative Untersuchungen zu verschiedenen Zeitpunkten in der LehrerInnenbiografie 75

Feil, Lidia; Strauer, Dorothea; Zwingmann, Katharina

Entwurf und Einsatz von Lösungsbeispielen mit Lücken und Selbsterklärungsaufforderungen in Mathematikveranstaltungen für Studierende der Pharmazie und der Biologie 89

Fleischmann, Yael; Kempen, Leander; Mai, Tobias; Biehler, Rolf

Die Online-Lernmaterialien von studiVEMINT: Einsatzszenarien im Blended Learning Format in mathematischen Vorkursen 101

Lankeit, Elisa; Biehler, Rolf

Vorstellung einer Aufgabe zu den Zusammenhängen verschiedener Differenzierbarkeitsbegriffe im Mehrdimensionalen 117

Moser-Fendel, Jeremias; Wessel, Lena; Klinger, Marcel

Was bringen StudienanfängerInnen mit? – Konzeptualisierung des Vorwissens zu Algebra und Funktionen von Erstsemesterstudierenden in INT-Studiengängen..... 133

Neuhaus, Silke; Rach, Stefanie

Situationales Interesse von Lehramtsstudierenden für hochschulmathematische Themen steigern..... 149

Oldenburg, Reinhard

Genetische Ideen in der Analysis I 157

Stuhlmann, Ann Sophie

Kooperative Beweisprozesse Mathematiklehramtsstudierender in der Studieneingangsphase 167

Weygandt, Benedikt; Skutella, Katharina

Blick nach vorne, Blick zurück: Ein Lehrkonzept für Bachelor- und Masterstudierende zur Überbrückung beider Diskontinuitäten..... 175

Wilzek, Wieland

Interaktive dynamische Visualisierungen als Unterstützungsangebot im fachmathematischen Studium – Chancen und Gefahren der Anschauung..... 185

Vielfalt, die verbindet: Der Übergang Schule–Hochschule im Rahmen des Hanse-Kolloquiums zur Hochschuldidaktik der Mathematik 2018 in Essen

Klinger, Marcel[1]; Schüler-Meyer, Alexander[2]; Wessel, Lena[3]

[1]Universität Duisburg-Essen, Essen; [2]Technische Universität Eindhoven; [3]Pädagogische Hochschule Freiburg

Ausgangslage

Die universitäre Lehre in der Mathematik steht derzeit gerade im Bereich des Übergangs zwischen Schule und Hochschule im Fokus vieler Innovationen. Dies spiegelt sich auch in der Vielfalt der Beiträge und Akteure im Rahmen des Hanse-Kolloquium zur Hochschuldidaktik der Mathematik wider, welches vom 9. bis 10. November 2018 als gemeinsame Herbsttagung mit dem Arbeitskreis HochschulMathematikDidaktik der GDM an der Universität Duisburg-Essen stattfand. Die Gründe für diese Innovationen liegen in vielfältigen Bereichen, die erst seit wenigen Jahren wahrgenommen werden:

Heterogenität der fachlichen Voraussetzungen der Studierenden: Abhängig davon, wo Jugendliche ihre Hochschulzugangsberechtigung erworben haben, sind sie in den letzten zwei Schuljahren vor der Abiturprüfung in sehr unterschiedlichen Mathematikkursvarianten auf das Mathematikstudium bzw. mathematikhaltige Veranstaltungen anderer Studiengänge vorbereitet worden. So ist beispielsweise in fünf Bundesländern Mathematik als Prüfungsfach für das Abitur verpflichtend, in allen anderen Bundesländern muss Mathematik zwar in zwei- bis sechsstündigen Kursen belegt werden, aber nicht als Prüfungsfach.

Hohe Abbruchquoten: Im Wintersemester 2017/2018 waren mindestens 55 % aller Studierenden in der Bundesrepublik in Fächern eingeschrieben, in denen mindestens ein mathematisches Modul im Laufe des Studiums belegt werden muss. Gleichzeitig liegen die Abbruchquoten in MINT-Studienfächern im Absolventenjahrgang 2018 mit 35 % (Ingenieurwesen) bis 54 % (Mathematik) deutlich über dem bundesweiten Durchschnitt von 28 %. (Heublein et al., 2012)

Die sich ändernde Natur des mathematischen Denkens und Arbeitens: Die Art des mathematischen Denkens ändert sich von der Schule zur Hochschule. So wird beispielsweise mehr Wert auf deduktives Schlussfolgern gelegt, und generell spielen das Beweisen und Definieren eine zentralere Rolle in der Erkenntnisgewinnung (Schüler-Meyer & Rach, 2019).

Trotz der Vielfältigkeit der genannten Phänomene zeigt sich aber doch, dass Lehrende an Hochschulen passende Erwartungen haben: Die MaLeMINT-Studie des IPN in Kiel

Klinger, M., Schüler-Meyer, A. & Wessel, L. (Hrsg.) (2019). Hanse-Kolloquium zur Hochschuldidaktik der Mathematik 2018: Beiträge zum gleichnamigen Symposium am 9. und 10. November 2018 an der Universität Duisburg-Essen. Münster: WTM.

konnte zeigen, dass es einen „sehr breiten Konsens unter Hochschullehrenden der Mathematik hinsichtlich der Lernvoraussetzungen“ der Studierenden in MINT-Fächern gibt. Die Erwartungen der Hochschullehrenden sind dabei „in weiten Teilen anschlussfähig an das, was in der Regel in schulischen Mathematikcurricula abgedeckt wird“ (Pigge, Neumann & Heinze, 2019, S. 36).

In Reaktion auf diese und weitere Herausforderungen wurden und werden vielfältige Änderungen umgesetzt und erprobt. So sind Übergangskurse nahezu fester Bestandteil universitärer Lehrangebote. Diese Übergangskurse zielen oft auf eine Wiederholdung des Schulstoffs in der Hoffnung, alle Studierenden auf den gleichen Vorwissensstand zu bringen. Andere Brückenkurse zielen eher auf die Vorbereitung auf das für Lernende neuartige mathematische Denken, entweder an der Universität (Grieser, 2017) oder bereits in der schulischen Oberstufe (Heitzer, 2019; Schüler-Meyer, 2019). In diesem Zuge sind viele Dozierende an Hochschulen bereit, neuartige Wege bei der Verbesserung der mathematischen Lehre zu gehen:

Reichhaltigkeit der Zugänge zur Lösung der Übergangsproblematik

Der Übergang von der Schule zur Hochschule wird aus verschiedenen Perspektiven und durch verschiedene Zugänge andressiert und bearbeitet. Die Beiträge zum Hanse-Kolloquium in diesem Band bilden diese Perspektiven in ihrer Vielfältigkeit ab.

- Hochschuldidaktische Ansätze nehmen die Übergangsproblematik aus der Perspektive der spezifischen universitären Lehr-Lernsituationen in den Blick, die sich von denen der Schule unterscheiden. Hochschulmathematikdidaktische Ansätze richten ihren Blick auf die Spezifität des Mathematiklernens im Übergang, wie etwa die Problematik, dass Schulwissen Studierenden im Studium zwar wiederbegegnet, aber auf nicht vertraute Weise, die zu nicht tragfähigen mathematischem Denken führen kann (Nardi, Ryve, Stadler & Viirman, 2014).
- Es gibt eine große Heterogenität bzgl. der Zielgruppe, auf die sich hochschulmathematikdidaktische Forschung und Entwicklung bezieht: Lehramt mit jeweiligem Schulschwerpunkt (G H R Ge Gy BK SoPäd), Fachbachelor/Master Mathematik, polyvalenter Bachelor (Mathematik-Bachelor mit Lehramtsoption), Studiengänge mit hohen mathematischen Studienanteilen in den Bereichen der Ingenieurwissenschaften, Wirtschaftswissenschaften usw., oft auch verschlagwortet als Export- oder Service-Veranstaltungen).
- Es gibt viele Best-Practice-Beispiele von Innovationen in der Lehre, die zu innovativen Begleitforschungen einladen – was allerdings vom Zusammenfinden von Forschern und Praktikern lebt.
- Der Druck, die Lehre zu innovieren, führt zu verschiedensten Lehrangeboten. Es besteht jedoch großer Bedarf, ähnliche Angebote zu kombinieren, voneinander zu lernen und so gemeinsam an der Optimierung dieser Angebote zu arbeiten.
- Das Feld profitiert von der Vielfältigkeit der Perspektiven, die zusammenkommen, um die Übergangsproblematik zu bearbeiten. Mathematiker gehen auf die Mathematikdidaktik zu, Mathematikdidaktiker spezialisieren sich zunehmend auf das Mathematiklehren und -lernen an der Hochschule. Dozierende an Fachhochschulen bilden einen weiteren lebendigen Teil dieser Dynamik ab.

- Neue Medien erlauben neuartige Lehr- und Lernformen und eröffnen zugleich neue Ressourcen für die Studierenden (wie YouTube-Videos, Lernplattformen oder mobile Apps). Digitale Ressourcen werden von Studierenden intensiv genutzt und sind beliebt (Rat für Kulturelle Bildung, 2019). Sie erzeugen aber auch das Risiko einer „Verstehensillusion", bei der Lernende oder Lehrende glauben, durch das alleinige Rezipieren von Videos könne mathematisches Verständnis erworben werden (z. B. Kulgemeyer, 2018).

Insgesamt illustrieren diese Punkte eine Intensivierung von Lehr-Lern-Entwicklung und Forschungsaktivitäten an der Schnittstelle Schule–Hochschule. Während große Potentiale vorhanden sind, Ressourcen und Perspektiven zu bündeln, um den Übergang von der Schule zur Hochschule zu erleichtern, werden diese noch nicht immer genutzt.

Das Potential des Hanse-Kolloquiums als Inkubator für Ideen und Kooperationen über Institutionsgrenzen hinweg

Der aufmerksame Zuhörer kann auf dem Hanse-Kolloquium noch immer Fachgrenzen wahrnehmen und unterschiedliche Überzeugungen und Perspektiven ausmachen. Dabei sind diese persönlichen Überzeugungen und Perspektiven Ausdruck der unterschiedlichen Bedarfe und Besonderheiten, die an den jeweiligen Institutionen wirken, wie etwa die besonders problematische Situation an Fachhochschulen, mit wenigen verfügbaren Ressourcen einer extrem heterogenen Studierendenschaft gerecht zu werden. Oder die Unterschiedlichkeiten, die im Hinblick auf das mathematische Denken und Arbeiten vorliegen, an welchem Studierende teilhaben sollen.

Dem Hanse-Kolloquium gelingt es seit seinem Bestehen immer wieder, Akteure und Interessierte im Bereich der Hochschulmathematik zusammen zu bringen, d. h. Lehrende und Dozierende an Universitäten und Fachhochschulen, Forschende im Bereich des tertiären Mathematiklernens, sowie wissenschaftlichen Nachwuchs als auch Professorinnen und Professoren. Auch wenn sich das Hanse-Kolloquium im Jahre 2018 das Thema „Übergang Schule-Hochschule" gesetzt hat, zeigt diese Vielfältigkeit doch auf, dass es *den* Übergang nicht gibt und geben kann. Der Übergang von der Schule zur Hochschule ist aus Sicht der verschiedenen Institutionen unterschiedlich zu konzipieren. Auch aus Sicht der Fächer gibt es nicht *den* Übergang: die Studierenden in den Lehramtsfächern unterscheiden sich von jenen der Fachmathematik, die sich wiederum von Studierenden der Ingenieurswissenschaften, etc. unterscheiden. Weitere Unterschiede finden sich in den verschiedenen Lernvoraussetzungen, Lernbiografien, Erwartungen, Interessen usw. der Studierenden.

Die komplexe Topografie des Mathematiklernens im Übergang führt zu unterschiedlichen Herausforderungen. Aus den Beiträgen des Hanse-Kolloquiums können u. a. die folgenden Herausforderungen identifiziert werden:

- Eine extrem heterogene Studierendenschaft hinsichtlich der Bildungsbiografien (z. B. langjährig im Beruf tätige Personen, die ein Studium ergreifen), die verschiedenes, teilweise ‚verschüttetes' mathematisches Vorwissen mitbringt. Diese Studierenden sollen mit wenigen Ressourcen auf den gleichen mathematischen Wissensstand gebracht werden. Dies führt zu Überlegungen hinsichtlich des Einsatzes digitaler (Selbst-)Lerntools und Lernvideos sowie zur Konzeption von

Flipped-Classroom-Formaten (vgl. die Beiträge zu den Hauptvorträgen von Frode Rønning bzw. Bärbel Barzel).

- Studierende sind mit hochschulmathematischen Denk- und Arbeitsweisen nur wenig vertraut, nutzen ineffiziente Lernstrategien und müssen diese für die Hochschule und insbesondere für das arbeitsintensive mathematikhaltige Studium verändern. Unterstützung können Studierende dafür in hochschuleigenen Förderangeboten wahrnehmen. Dies führt zu individuellen Förderangeboten, aber auch zu Angeboten, bei denen ein direkterer Dozenten-Studierendenkontakt möglich ist. Exemplarisch werden in diesem Band entsprechende Konzepte der Technischen Universität sowie Fachhochschule Dortmunds vorgestellt (vgl. Beitrag zum Hauptvortrag von Nimet Sarikaya und Peter Furlan).

Die Vielfältigkeit der Herausforderungen des Übergangs zu einem mathematikhaltigen Studium führen zu vielfältigen Versuchen, diesen Herausforderungen zu begegnen. Beim Hanse-Kolloquium kommen Teilnehmerinnen und Teilnehmer aus allen Disziplinen zusammen, um sich über innovative Ansätze und Praxiserfahrungen auszutauschen. Dabei ordnen sich die Beiträge auf einem Spektrum von Grundlagenforschung (Was ist die genaue Natur des Übergangs Schule–Hochschule?) über forschungsbasierte Praxisversuche (Kann eine Vorlesung die eigenaktive Begriffsbildung bei Studierenden unterstützen?) hin zu breiter implementierten und evaluierten Maßnahmen (Wie werden implementierte Unterstützungmaßnahmen genutzt?) ein. Allen diesen Beiträgen ist die Suche nach Evidenz, wie den Herausforderungen in der mathematischen Lehre in Hochschulen wirkungsvoll begegnet werden kann, gemein. Insgesamt zeigt sich, dass sich Lehrinnovationen und Forschungsaktivitäten in den Hochschulen in den letzten Jahren intensiviert haben, nicht nur an der Schnittstelle Schule–Hochschule, sondern auch grundsätzlicher bezogen auf hochschulmathematikdidaktische Forschung und Entwicklung.

Wir wünschen vielfältige Einblicke bei der Lektüre des vorliegenden Bands.

Essen, Juli 2019

Marcel Klinger
Alexander Schüler-Meyer
Lena Wessel

Literatur

Grieser, D. (2017). *Mathematisches Problemlösen und Beweisen: Eine Entdeckungsreise in die Mathematik* (2. Aufl.). Wiesbaden: Springer Spektrum.

Heitzer, J. (2019). Erfolgreiche Vorbereitung auf mathematische Studienanforderungen in der Oberstufe: Das Aachener Schul-Hochschul-Projekt iMPACt. *Der Mathematikunterricht*, 65(2), 20–28.

Heublein, U., Richter, J., Schmelzer, R., & Sommer, D. (2012). *Die Entwicklung der Schwund- und Studienabbruchquoten an den deutschen Hochschulen. Statistische Berechnungen auf der Basis des Absolventenjahrgangs 2010*. Hannover: HIS.

Kulgemeyer, C. (2018). Wie gut erklären Erklärvideos? Ein Bewertungs-Leitfaden. *Computer + Unterricht*, Heft 109, 8–11.

Nardi, E., Ryve, A., Stadler, E., & Viirman, O. (2014). Commognitive analyses of the learning and teaching of mathematics at university level: the case of discursive shifts in the study of calculus. *Research in Mathematics Education*, 16(2), 182–198.

Pigge, C., Neuman, I., & Heinze, A. (2019). Notwendige mathematische Lernvoraussetzungen für MINT-Studiengänge – die Sicht der Hochschullehrenden. *Der Mathematikunterricht*, 65(2), 29–38.

Rat für Kulturelle Bildung (2019). *Jugend / YouTube / Kulturelle Bildung: Horizont 2019*. Essen: Rat für Kulturelle Bildung.

Schüler-Meyer, A. & Rach, S. (Hrsg.) (2019). Der Übergang vom Mathematikunterricht in ein MINT-Studium: Herausforderungen und Unterstützungsansätze [Themenheft]. *Der Mathematikunterricht*, 65(2).

Schüler-Meyer, A. (2019). Hochschulmathematische Praktiken an schulnahen Inhalten – Ein tragfähiges Gestaltungsprinzip für Brückenkurse in der schulischen Oberstufe. *Der Mathematikunterricht*, 65(2), 47–55.

Von der Herausforderung, die Hochschuleingangsphase in Mathematik konstruktiv zu gestalten – Strukturen und Aufgaben

Barzel, Bärbel

Universität Duisburg-Essen, Essen

Zusammenfassung: Mathematik stellt für viele Studierende beim Übergang von der Schule zur Hochschule noch immer eine große Herausforderung dar. Die Übergangskommission Schule-Hochschule hat einen Maßnahmenkatalog vorgelegt, um dieser Herausforderung zu begegnen. Dabei ist es Ziel, Studierende auf die neue Lernkultur an der Universität so vorzubereiten, dass Motivation und Offenheit nicht verloren gehen. Vielmehr sollen sie individuell beim fachlichen Lernen und in ihrer Eigenverantwortung unterstützt und gestärkt werden, um die Anforderungen in Mathematik mit Klarheit, Stringenz und Erfolg zu meistern. Im Beitrag wird der Maßnahmenkatalog kurz vorgestellt und exemplarisch mit Blick auf die strukturelle Gestaltung der Lernprozesse sowie der Aufgabenformate erörtert.

Aktuelles

Abiturient*innen kapitulieren vor Mathematik, sinkendes Niveau im Abitur, Schülerpetitionen zum Mathematikabitur, hohe Abbruchquoten im Mathematikstudium – die Liste an Negativ-Schlagzeilen, mit denen Mathematik beim Übergang von Schule zur Hochschule in die Tagespresse gerät, ließe sich noch verlängern. Ja, es gibt Anlass zur Sorge. Die Hälfte aller Studierenden eines Jahrgangs sind zu Studienbeginn in Mathematik gefordert (vgl. Übergangskommission Schule-Hochschule, 2019) und erleben eine „Lücke“ zwischen Mathematik an der Schule und an der Hochschule.

Im Benennen des Missstandes stimmen viele überein, egal ob aus der Perspektive der Schule oder der Hochschule. Es wird einerseits die neue Lernkultur betont, auf die sich Studierende zu Studienbeginn einstellen müssen, die viel mehr auf Eigenverantwortung und fachlicher, deduktiv aufgebauter Fundierung setzt als die Schule. Es wird andererseits der Mangel an mathematischer Kompetenz bei Studienanfänger*innen beklagt, konkret dass sie zu wenig flexibel und verständig mit mathematischen Objekten wie Variablen, Terme und Gleichungen umzugehen verstehen.

Weniger Übereinstimmung herrscht beim Benennen der Ursachen, die sich im Dreieck entfalten von „Schule bereitet nur unangemessen vor“, „Politik schafft nur unzureichende Strukturen“ und „Hochschule berücksichtigt die Voraussetzungen der Studienanfänger*innen nicht ausreichend“. Monokausalität ist zu vereinfachend, die Wahrheit liegt eher in der Mitte und ist als Geflecht komplexer Gründe zu beschreiben. Hier

Klinger, M., Schüler-Meyer, A. & Wessel, L. (Hrsg.) (2019). Hanse-Kolloquium zur Hochschuldidaktik der Mathematik 2018: Beiträge zum gleichnamigen Symposium am 9. und 10. November 2018 an der Universität Duisburg-Essen. Münster: WTM.

sind alle Beteiligten aus Schule, Hochschule und Politik gefordert, konstruktiv und kooperativ Ursachen im gesamten Feld zu identifizieren, um Schlüsse zur Verbesserung der Situation sachgerecht und konkret entwickeln zu können.

Dies hat Frankreich mit der Mission Mathématiques – zumindest für das schulische Umfeld – exzellent vorgemacht. 2017 wurden Cédric Villani, Mathematiker und Fields-Medaillen-Gewinner (2010) sowie sein Kollege Charles Torossian vom französischen Bildungsminister beauftragt, eine Analyse der Schnittstellenproblematik in Mathematik vorzunehmen und daraus resultierend Vorschläge zur Verbesserung auszuarbeiten. Man kann beklagen, dass die international hoch renommierte, französische Fachdidaktik und die französische Schulpraxis nicht federführend einbezogen waren, umso erfreulicher ist aber, dass Villani und Torossian im kooperativen Prozess diese Expertise mit Blick auf die Spezifik des französischen Bildungssystems gezielt miterhoben haben. Ihr Ergebnisbericht (Villani & Torossian, 2018) formuliert 21 Maßnahmen zur Weiterentwicklung des Unterrichts, die in fünf Bereiche strukturiert sind (vgl. Agricola, 2018):

- **„Vorfahrt“ für die Grundschule**,
- **Mathematik: Effizienz, Spaß und Ehrgeiz für alle Schüler*innen**,
- **Zahlen und Rechenfertigkeiten**,
- **Weiterbildung und Vernetzung**,
- **Orientierung und Evaluierung**

Die Ergebnisse überzeugen durchaus. Für die Unterrichtsebene werden gute Empfehlungen und exemplarische Beispielaufgaben vorgestellt, die verschiedene, auch enaktive Zugänge sowie verschiedene Darstellungsarten integrieren. Es wird zudem die Fortbildungsebene adressiert und es werden vor allem auch politisch-strukturelle Maßnahmen konkret benannt.

Dieser Prozess in Frankreich war ein wichtiger Impuls für die Schnittstellen-Diskussion in Deutschland und wurde beispielsweise von der Mathematik-Übergangskommission Schule-Hochschule aufgegriffen (s. http://mathematik-schule-hochschule.de/). Diese Kommission besteht aus je drei gewählten Vertreter*innen aus den Bereichen Fachwissenschaft (DMV - Deutsche Mathematiker-Vereinigung), Fachdidaktik (GDM - Gesellschaft für Didaktik der Mathematik) und der Schulpraxis (MNU – Verband zur Förderung des MINT-Unterrichts) und hat kein geringeres Ziel, als die Schnittstellenproblematik gemeinschaftlich zu verringern. Im letzten Jahr entstand in mehreren Zyklen von Analysen, Recherchen und Diskussionen – sowohl in den drei Fachgesellschaften als auch gemeinsam in der Kommission – ein Maßnahmenkatalog für Deutschland, der mittlerweile von den Vorsitzenden der drei Fachgesellschaften der Kultusministerkonferenz KMK übergeben wurde (vgl. Übergangskommission Schule-Hochschule, 2019). Darin werden neben grundsätzlichen politisch-strukturellen Aspekten Empfehlungen formuliert für einen nachhaltigen Mathematikunterricht und zur Konkretisierung der Bildungsstandards sowie zur Gestaltung des Übergangs Schule-Hochschule und zur Mathematikausbildung im Studium. Vor allem wird eine neue Kultur des Austauschs gefordert, um die Misere der Schuldzuweisungen zwischen den Akteuren in ein konstruktives Miteinander zu entwickeln. So enthalten diese Empfehlungen nicht nur Verbesserungsvorschläge auf Unterrichtsebene, sondern bewusst im Unterschied zum fran-

zösischen Katalog auch Maßnahmen mit Blick auf die Hochschule. Hierbei werden beispielsweise Prozesse zur Professionalisierung und Weiterentwicklung von Lehrenden an Schule und Hochschule gleichermaßen gefordert.

Neben den politisch-strukturellen Forderungen ist ein wichtiger Kern des Maßnahmenkatalogs, die mathematischen Lernprozesse an Schule wie Hochschule bewusst und neu zu reflektieren – in ihrer Strukturierung als auch hinsichtlich der konkreten Aufgabengestaltung. Dieses kooperative Überdenken macht umso mehr Sinn, als dass die Male-Mint-Studie (Neumann, Heinze & Pigge, 2017) deutlich gemacht hat, dass aus Sicht von Mathematiker*innen über viele fachliche Ziele beim Übergang von Schule zu Hochschule große Einigkeit herrscht und diese Ziele allesamt im Einklang mit den schulischen Curricula stehen (z. B. sichere Verfügbarkeit von Prozeduren beim Bruchrechnen und Gleichungen lösen; mathematische Arbeitstätigkeiten wie Problemlösen und der sichere Umgang mit digitalen Werkzeugen). Nur über eine Konkretisierung kann ein solcher Maßnahmenkatalog sich entfalten und etwas bewirken. Dazu werden im Folgenden einige Gedanken und Ideen zur Strukturierung von Lernprozessen, Gestaltung von Aufgaben und Integration von Medien zur Diskussion gestellt.

Strukturierung mathematischer Lernprozesse

Jegliches Lernen muss die Brücke schlagen zwischen individuellen Voraussetzungen der Lernenden und den konsolidierten Fachinhalten. Dies klingt einfach, ist jedoch schwer zu realisieren. Die konkrete Umsetzung kann dabei unterschiedlichen Paradigmen folgen. Beim genetischen Prinzip (vgl. Scherer & Weigand, 2017) folgt das Lehren der Idee, Mathematik nicht als Fertigprodukt zu vermitteln, sondern Lernenden Einblicke in den Prozess der Entstehung von Mathematik zu ermöglichen (Freudenthal, 1991). Lehr-/Lernprozesse können aber auch einer eher deduktiven Ordnung folgen, bei der Klarheit und innere Systematik eindeutig hervortreten. Zwischen diesen beiden Polen bewegt sich die große Bandbreite der möglichen Strukturierungen von mathematischen Lehr-/Lernprozessen. Es wäre zu banalisierend, der Schule nur das eine und der Hochschule nur das andere Paradigma zuzuschreiben, denn Lehrende hier wie dort streben sowohl Verstehen als auch Kohärenz der Fachinhalte an und integrieren deshalb an der ein oder anderen Stelle Prozessuales der Entstehung als auch fertige, konsolidierte Definitionen und Sätze. Entscheidend ist vor allem die Gestaltung des Beginns eines neuen Themas. Inwieweit gelingt es, dass Lernende neues Wissen in ihr bestehendes Wissensgefüge einbinden und damit vernetzen können.

Villani und Torossain geben hierzu konkrete Empfehlungen: Sie beginnen den Bereich zum Titel „Mathematik: Effizienz, Spaß und Ehrgeiz für alle Schüler*innen“ mit *Lernstufen*, wo sie konkret fordern, dass Begriffsbildung mit spielerischem Begreifen und Experimentieren beginnen sollte, gefolgt von einem eigenständigen Formulieren bevor es zum Abstrahieren mit Blick auf den konsolidierten mathematischen Begriff zugehen sollte (vgl. Agricola, 2018). Solche Stufen der Begriffsbildung finden sich in der Fachdidaktik als konkrete Forderung (z. B. Vollrath, 1984) und vielfach mit dem Anspruch verbunden, dadurch die Fachinhalte mit dem Aufbau von Vorstellungen zu verknüpfen. Wegweisend bis heute sind die fünf Stufen der Begriffsbildung nach Vollrath (1984), um den Weg vom Erleben des Phänomens bis zur Abstraktion genau zu explizieren.

Vollrath hat dies auch vielfach konkretisiert, z. B. für mathematische Objekte der Algebra:

- Intuitives Begriffsverständnis (Begriff als Phänomen)
- Inhaltliches Begriffsverständnis (Begriff als Träger von Eigenschaften)
- Integriertes Begriffsverständnis (Begriff als Teil eines Begriffsnetzes)
- Formales Begriffsverständnis (Begriff als formales Objekt)
- Strukturelles Begriffsverständnis (Begriff als strukturierbares Objekt)

Eine solche Stufung ist mit einer transmissiv-gestalteten Strukturierung von Lernprozessen nur schwer zu vereinbaren. Hier liegt es eher nahe, den Einstieg an konkreten Problemen auszurichten, gleich ob es inner- oder außermathematische Probleme sind und Lernenden Raum und Zeit zum Erkunden und Bearbeiten einzuräumen. Dadurch kann „Sinnstiftung" gelingen; Lernenden kann sich der Sinn ihres mathematischen Tuns erschließen (Leuders et al., 2011).

Der Blick auf die Gestaltung von Aufgaben

Die hier dargestellten Gedanken gründen alle auf der Perspektive auf schulische Lernprozesse in Mathematik, sind jedoch bereits punktuell als Orientierung in die Gestaltung von Lernprozessen bei Studierenden eingeflossen und sind deshalb hier als Anregung jeglicher mathematischer Lernprozesse, egal ob in Schule oder Hochschule, intendiert.

Die Bildungsforschung benennt drei Basisdimensionen effektiven Unterrichtens: Kognitive Aktivierung, effiziente und gut strukturierte Klassenführung sowie konstruktive Unterstützung (Klieme et al., 2006). Lipowsky et al. (2018) haben dabei die Bedeutung der fachlichen Unterrichtsqualität nachgewiesen und herausgestellt – gerade mit Blick auf die kognitive Aktivierung. „Kognitive Aktivierung" – zu verstehen als ein Denken höherer Ordnung (Praetorius et al., 2018) – kann sich nur im fachlichen Arbeiten und Lernen entfalten. Dieser empirische Nachweis erfreut mehr als dass er überrascht, denn Kognition beim Lernen liegt stets im Kern der Sache selbst.

Die Mathematikdidaktik liefert hierzu hilfreiche Konstrukte zur Aufgabengestaltung, die für die Gestaltung von schulischen Lernprozessen mittlerweile gut etabliert sind. Hier sollen nur in aller Kürze zwei wichtige vorgestellt werden – das produktive Üben und der Darstellungswechsel.

Produktives Üben: Dahinter verbirgt sich der Gedanke, Üben variantenreich zu gestalten, so dass reichhaltige und flexible Denkprozesse ausgelöst werden. Eine Möglichkeit dies zu realisieren, ist es, gleichartige Übungen so zu gestalten, dass sie nicht nur zur Kapselung automatisierter Fertigkeiten führen sondern auch zur reflektiven, vertiefenden Auseinandersetzung mit der jeweiligen Prozedur selbst. Dies geschieht, indem bei der Aufgabengestaltung eine systematische Variation der Daten erfolgt, ergänzt durch eine Reflexion der dahinterliegenden Muster und Strukturen. Dies soll an einem Beispiel aus dem „cosh-Katalog" (cosh, 2014, S. 18) verdeutlicht werden (vgl. Abbildung 1). Hier ist zwar an manchen Stellen eine systematische Variation zu erkennen, jedoch wird diese nicht zur gezielten Reflexion genutzt.

70. (**) Wie verhält sich die Funktion f mit

(a) $f(x) = \dfrac{2}{x+2}$ für $x \to +\infty$;

(b) $f(x) = \dfrac{2x}{x+2}$ für $x \to +\infty$;

(c) $f(x) = \dfrac{2x^2}{x+2}$ für $x \to +\infty$;

(d) $f(x) = \dfrac{2x^2}{x+2}$ für $x \to -\infty$;

(e) $f(n) = (-0,5)^n$ für $n \to +\infty$ $(n \in \mathbb{N})$;

(f) $f(n) = (-1)^n$ für $n \to +\infty$ $(n \in \mathbb{N})$;

(g) $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$ für $x \to -1$;

(h) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x+1}$ für $x \to -1$?

Abb. 1: Aufgabe aus dem cosh-Katalog zur Kompetenz "Propädeutisches Wissen über Grenzwerte" (cosh 2014, S. 18)

Betrachtet man die Teilaufgaben (a) bis (c), so wächst hier die Potenz von x jeweils um 1, wird also systematisch variiert. Dies könnte leicht mit zusätzlichen Aufgabenstellungen verknüpft werden, um damit eine Reflexion der Muster und von Begründungszusammenhängen anzuregen, z. B. „Wie geht es weiter? Löse effizient." oder „Entwickle eine ähnliche Sequenz von Aufgaben."

Auch die Teilaufgaben (c) und (d) enthalten eine Variation der Grenzen, die aber auch bei konkreten Werten beginnen könnte, z. B. dass x gegen 0 und 1 bzw. 0 und -1 laufen könnte. Auch hier wäre die Zusatzfrage „Wie geht es weiter?" eine Frage, die eher ein Vernetzen und Strukturen erkennen erfordert.

Auch Umkehraufgaben im Sinne von „Von der Lösung zum passenden Objekt" ermöglichen Aufgabenvariationen, die Inhalte auf flexible Weise vertiefen helfen (z. B. Folgen finden zu einem gegebenen Grenzwert, Gleichungen finden zu gegebenen Lösungen, usw.).

Darstellungswechsel: *„There is no understanding without visualization."* hat Duval (2002) pointiert. Auch beim Beispiel von Grenzwert-Aufgaben kann der Darstellungswechsel vielfältige Vertiefungen und Reflexionen auslösen. Aufgabenstellungen wie „Erkläre den Grenzwert anhand des Graphen." oder „Stelle anhand des Graphen eine Vermutung auf, ob es einen Grenzwert gibt und wo er ggf. liegt." ermöglichen eine kognitiv sinnvolle Ergänzung zu rechnerischen Bestimmungen, da sie andere Denkmuster und Vorstellungen zur Vernetzung der Darstellungen erfordern. Wie variantenreiche Aufgaben alleine durch einen systematischen Darstellungswechsel entstehen können, hat Klinger (2018) im Themenbereich Funktionales Denken konkretisiert (vgl. Abbildung 2).

von \ zu	situativ-sprachlich	numerisch-tabellarisch	graphisch-visuell	formal-symbolisch
situativ-sprachlich	Umformulieren, Realsituation vereinfachen, Reduzieren	Beispielwerte bestimmen	Visualisieren einer Situation, skizzieren	Modellieren (Annäheren, Kurven hindurch legen)
numerisch-tabellarisch	Interpretieren der Tabelle bzgl. des Kontexts	Verfeinern oder Vergröbern der Tabelle, Sortieren	Werte in Punktediagramm darstellen und ggfs. Verstetigen und Glätten	Wachstumsverhalten erkennen, Interpolieren
graphisch-visuell	Interpretieren des Graphen bzgl. des Kontexts	Werte ablesen	Strecken und Stauchen, Ändern der Achsenskalierung, graphisches Ab- und Aufleiten	Typische Form erkennen, Annähern, Kurven hindurch legen
formal-symbolisch	Formeln interpretieren (z.B. durch Deuten der Funktionsparameter)	Argumente einsetzen und Werte bestimmen	Skizzieren, durch Deuten der Funktionsparameter auf typische Form schließen	Umformen, Ab- und Aufleiten

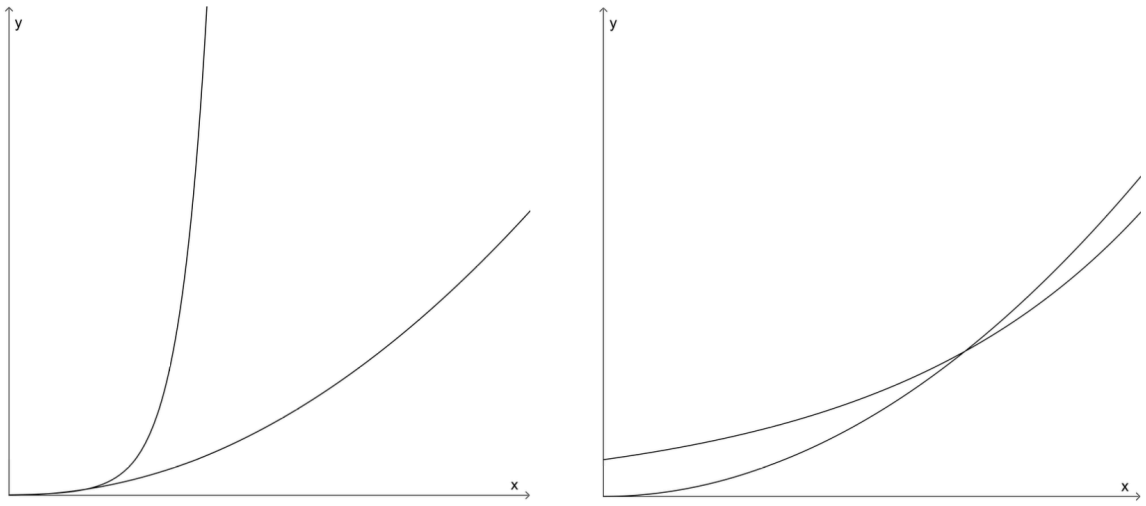
Abb. 2: Klinger (2018, S. 67) hat Aufgabenvariationen durch Darstellungswechsel für das Funktionale Denken konkretisiert.

Wenn man sich – gleich ob beim produktiven Üben oder beim Darstellungswechsel – den Gehalt von Aufgaben bewusst machen möchte, geht dies nur durch Konkretisieren der notwendigem bzw. angeregten kognitiven Tätigkeiten. Der Blick auf diese einzelnen Tätigkeiten ist ein wertvolles Instrumentarium, die Tiefenstruktur von Aufgaben zu explizieren und die Konstruktionsprinzipien von Aufgaben für alle Lehrenden transparent zu machen und gleichzeitig implizit für eine Vielfalt von Aufgabenstellungen für jeglichen Lernprozess zu sensibilisieren. Das ist nicht nur wichtig für das Design von Aufgaben, sondern auch zur Analyse und zur Beurteilung von Aufgaben und damit grundlegend zur Reflexion von Lehre. Eine strukturierte Liste an Tätigkeiten findet sich beispielsweise im TIMSS-Framework (vgl. Mullis et al., 2003, S.25 ff.), gegliedert in vier Bereiche mathematischer Aktivitäten:

- *Knowing facts and procedures* (Wissen um Fakten und Prozeduren): Reproduzieren; Erkennen/Identifizieren; Berechnen; Werkzeuge verwenden
- *Using concepts* (Nutzen von Begriffen und Zusammenhängen): Wissen, Klassifizieren, Darstellen, Formulieren, Unterscheiden

- *Solving routine Problems* (Lösen von Routine-Problemen):
  Auswählen, Modellieren, Interpretieren, Anwenden, Verifizieren/Checken
- *Reasoning* (Begründen):
  Hypothesen aufstellen, vermuten, voraussagen, Analysieren, Evaluieren, Generalisieren, Vernetzen, Synthetisieren, Probleme lösen, Begründen/Beweisen

Qualitative Kurvendiskussion **5. Die Leitidee funktionaler Zusammenhang**



Gegeben sind die Funktionen g mit $g(x) = 2^x$ und f mit $f(x) = x^2$. Die beiden Abbildungen zeigen deren Graphen.
Welcher Graph gehört zu g und welcher gehört zu f? Geben Sie auf den Achsen jeweils geeignete Einheiten an. Begründen Sie.

Abb. 3: Exemplarische Lernaufgabe des IQB für den Unterricht in Mathematik Sekundarstufe II (https://www.iqb.hu-berlin.de/bista/UnterrichtSekII/mathematik/analysis, letzter Zugriff: 11.6.2019)

Knowing Facts and Procedures
Erkennen/ Identifizieren
Using Concepts
Unterscheiden
Solving Routine Problems

Reasoning
Voraussagen, Analysieren, Vernetzen, begründen

Abb. 4: Konkretisierung der Tätigkeiten zur Aufgabe in Abbildung 3 anhand des TIMSS-Frameworks

Wenn man diese Kategorisierung beispielsweise auf eine Aufgabe anwendet, die das Institut für Qualitätsentwicklung im Bildungswesen (IQB) bereitstellt, um das Lernen in der Sekundarstufe II in Analysis zu verdeutlichen (vgl. Abbildung 3), so erlaubt diese Kategorisierung einen ersten Tiefenblick (vgl. Abbildung 4). Eine Einordnung der Auf-

gabe erfolgt beim IQB mit Blick auf die Bildungsstandards durch Nennung der relevanten Leitidee (im Beispiel Leitidee 4 – Funktionaler Zusammenhang), der allgemeinen mathematischen Kompetenzen (im Beispiel: 1 – Mathematisch argumentieren, 2 – Probleme mathematisch lösen, 4 – Mathematische Darstellungen verwenden) sowie der Angabe, welcher der drei Anforderungsbereiche (zwischen Wiedergabe von Sachverhalten und Wissen bis hin zum selbstständigen Bearbeiten komplexer Sachverhalte) anzusetzen ist (im Beispiel: II). Auch wenn in der allgemeinen Beschreibung der Anforderungsbereiche (vgl. KMK, 2012, S. 27) durchaus konkrete Tätigkeiten benannt werden, so ist doch bedauerlich, dass dies nicht für die einzelnen Aufgaben konkretisiert wird.

Begründen und Beweisen	
Das Item fragt explizit nach einer Begründung:	J/N
Möglichkeit für mathematisches Kommunizieren	
Das Item erfordert das Aufschreiben eigener Gedanken: (mit Symbolen, Bildern, Worten):	J/N/V (V steht für EINE Vokabel)
Verbindungen	
• Kein Realkontext, nur EIN Inhaltsbereich:	N
• Realkontext:	R
• Kein Realkontext, aber mindestens zwei vernetzte Inhaltsbereiche:	I
Repräsentationen: Die Rolle von Graphen	
• Es wird keine Grafik benutzt	N
• Grafik, keine Interpretation nötig (superfluous)	S
• Illustrierende Grafik, keine Interpretation nötig	IL
• Grafik, Interpretation nötig	GI
• Grafik muss erstellt werden	GE
Repräsentationen: Übersetzung zwischen verschiedenen Arten	
• Kein Repräsentationswechsel angeregt	N
• Wechsel zwischen Verbalem & Symbolischem	VS
• Wechsel zwischen Symbolischem & Graphischem	SG
• Wechsel zwischen Verbalem & Graphischem	VG
• Wechsel zwischen Graphischen Darstelllungen	GG
• Mehr als zwei Wechsel	A

Abb. 5: Das MPAC-Framework dient der vertieften Analyse von Prüfungsaufgaben mit Blick auf Unterricht (übersetzt aus Thompson et al. 2013, S. 406)

Einen solchen Weg, der über diese IQB-Kriterien weit hinausgeht, schlagen amerikanische Kollegen mit dem Mathematical Processes Assessment Coding (MPAC)-Framework zur Analyse von Prüfungsaufgaben vor (Thompson, Hunsader & Zorin, 2013, S. 406; vgl. Abbildung 5). Dieses Analyseinstrument dient gezielt zur Professionalisierung von Lehrenden, um der Gefahr entgegen zu wirken, dass Unterricht mit dem Fokus auf Prüfungsvorbereitung zu oberflächlich und zu formalistisch gerät. Diese Gefahr erleben

wir auch in Deutschland, dass Tätigkeitslisten alleine als „Operatoren“ wahrgenommen werden im Sinne von operationalisierbaren, überprüfbaren Teilschritten, um die Anforderungen je nach Verb in den Aufgabenstellungen für Schüler*innen transparent zu machen. Dies geriert schnell zu einem rezeptiven Erfüllen der Aufgabenstellung ohne Verstehen und mentale Flexibilität. So sinnvoll eine grundsätzliche Transparenz für Schüler*innen über die geforderten Tätigkeiten ist, so gefährlich ist jedoch auch die Engführung, wenn der Gehalt der Tätigkeiten aus dem Blick gerät.

Fazit

Kooperation von Dozierenden und Lehr-Verantwortlichen an Schule wie Hochschule beim Weiterentwickeln von Strukturen der Lehr-/Lernprozesse und Aufgabenstellungen sollte regional wie überregional viel stärker angeregt und genutzt werden, um Lernkulturen an Schule und Hochschule zu vergleichen und zu diskutieren. Hier voneinander zu lernen, indem gemeinsam konkrete Aufgaben analysiert und neu entwickelt werden, kann den Blick schärfen, die eigenen Lehrprozesse zu überdenken, zu reflektieren und gegebenenfalls zu optimieren. Nur kooperativ ist die Herausforderung zu meistern, die Hochschuleingangsphase in Mathematik für die Studierenden konstruktiv zu gestalten.

Literatur

Agricola, I. (2018). 21 mesures pour l’enseignement des mathématiques: Der Villani-Torossian-Bericht zum Mathematik-Unterricht in Frankreich. *Mitteilungen der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, *26*(2–3), 121–124.

cosh – Cooperation Schule Hochschule (2014): Mindestanforderungskatalog Mathematik 2.0. URL: https://lehrerfortbildung-bw.de/u_matnatech/mathematik/bs/bk/cosh/katalog/makv20b_ohne_leerseiten.pdf (letzter Zugriff: 2.6.2019)

Klieme, E., Lipowsky, F., Rakoczy, K. & Ratzka, N. (2006): Qualitätsdimensionen und Wirksamkeit von Mathematikunterricht. Theoretische Grundlagen und ausgewählte Ergebnisse des Projekts „Pythagoras“. In M. Prenzel & L. Allolio-Näcke (Hrsg.), *Untersuchungen zur Bildungsqualität von Schule. Abschlussbericht des DFG-Schwerpunktprogramms* (S. 127–146). Münster: Waxmann.

Klinger, M. (2018). *Funktionales Denken beim Übergang von der Funktionenlehre zur Analysis: Entwicklung eines Testinstruments und empirische Befunde aus der gymnasialen Oberstufe*. Wiesbaden: Springer Spektrum.

KMK (2012). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife*. Köln: Wolters Kluver.

Mullis, I., Martin, M., Smith, T., Garden, R. Gonzales, E., Gregory, K., Chrostowski, St. & O’Connor, K. (2003): *TIMSS – Trends in Mathematics and Science Study: Assessment frameworks and specifications*. Boston: International Study Center, Lynch School of Education, Boston College

Leuders, T., Hußmann, St., Barzel, B. & Prediger, S. (2011): „Das macht Sinn!“: Sinnstiftung mit Kontexten und Kernideen. *Praxis der Mathematik in der Schule*, *53*(37), 2–9.

Lipowsky, F., Drollinger-Vetter, B. Klieme, E., Pauli, C. & Reusser, K. (2018). Generische und fachdidaktische Dimensionen von Unterrichtsqualität – Zwei Seiten einer Medaille? In M. Martens, K. Rabenstein, K. Bräu, M. Fetzer, H. Gresch, I. Hardy &