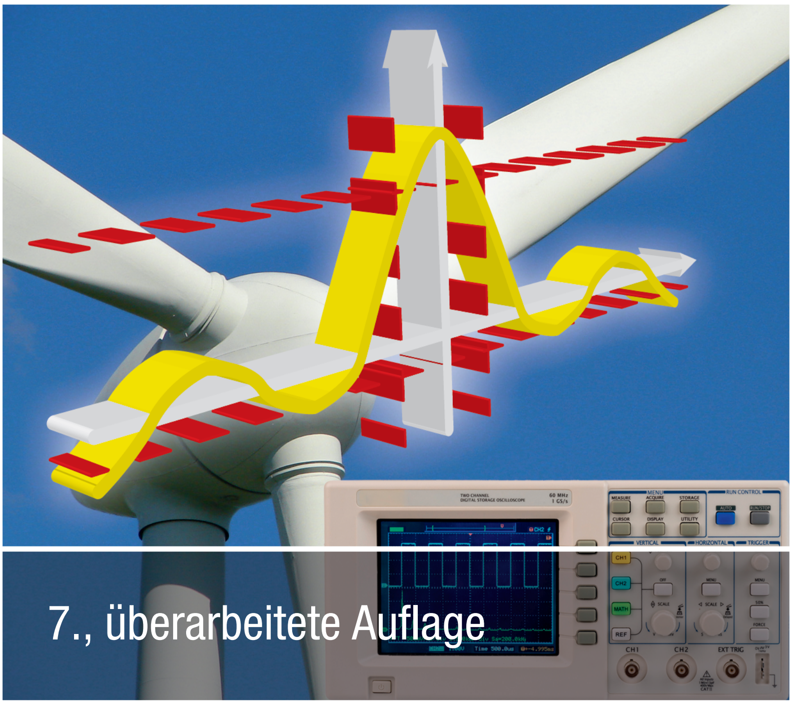
Helmut Lindner

Elektro-Aufgaben

Band 3: Leitungen, Vierpole, Fourier-Analyse, Laplace-Transformation



7., überarbeitete Auflage

HANSER

Lindner / Balcke

Elektro-Aufgaben

Band 3: Leitungen, Vierpole, Fourier-Analyse, Laplace-Transformation

Helmut Lindner, Edgar Balcke

Elektro-Aufgaben

Band 3: Leitungen, Vierpole, Fourier-Analyse, Laplace-Transformation

7., überarbeitete Auflage

Mit 540 Aufgaben mit Lösungen und 266 Bildern

Fachbuchverlag Leipzig
im Carl Hanser Verlag

Band 1: Gleichstrom ISBN 978-3-446-42070-0
Band 2: Wechselstrom ISBN 978-3-446-42304-6
Band 3: Leitungen, Vierpole, Fourier-Analyse, Laplace-Transformation ISBN 978-3-446-43330-4

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

ISBN: 978-3-446-43330-4

Fachbuchverlag Leipzig im Carl Hanser Verlag

Internet: http://www.hanser-fachbuch.de

Lektorat: Dr. Martin Feuchte
Herstellung: Dipl.-Ing. Franziska Kaufmann
Satz: Satzherstellung Dr. Steffen Naake, Brand-Erbisdorf
Coverconcept: Marc Müller-Bremer, www.rebranding.de, München
Coverrealisierung: Stephan Rönigk
Druck und Bindung: Friedrich Pustet KG, Regensburg
Printed in Germany

Vorwort

Ein Merkmal unserer Zeit besteht in der Mechanisierung und Automatisierung, die sich fast auf alle Zweige von Wissenschaft, Technik und Wirtschaft erstreckt und von einem zunehmenden Vordringen der Elektrotechnik begleitet wird. Sowohl bei der Ausbildung der Facharbeiter, Techniker, Meister und Ingenieure als auch in der Weiterbildung der in der Praxis Tätigen erhöhen sich ständig die Anforderungen an jeden, der sich mit der Elektrotechnik beschäftigt.

Die schwierige Aufgabe der Bewältigung des Stoff-Zeit-Problems führt oft dazu, dass der Herausbildung von Fertigkeiten durch Berechnung von Übungsaufgaben nicht genügend Beachtung gewidmet wird.

Mit dem vorliegenden dritten Band, der eine umfangreiche Sammlung an Formeln und Aufgaben zur Leitungs- und zur Vierpoltheorie sowie zur FOURIER-Analyse und zur LAPLACE-Transformation enthält, erfolgt daher eine folgerichtige Ergänzung zu den beiden seit Langem erscheinenden Bänden der „Elektro-Aufgaben“.

Zur Einführung der mathematischen Hilfsmittel sind im 1. Abschnitt Aufgaben mit Funktionen komplexer Zahlen und zur Matrizenrechnung vorangestellt. Diese beschränken sich aber nur auf die in der Vierpoltheorie benötigten Matrizen zur Ordnung 2. Die Kenntnis der Differenzial- und Integralrechnung wird vorausgesetzt.

An der Gestaltung der neuen Auflage des Buches hat Herr Dr. MARTIN FEUCHTE vom Carl Hanser Verlag durch seine konstruktiven Kontakte mit der Bearbeitern wesentlichen Anteil.

Für die mühevolle Arbeit der Aufgabenüberprüfung und von erforderlichen Ergänzungen danken wir den Herren Dipl.-Phys. KLAUS VOGELSANG und Prof. Dr. HARALD LINDNER.

Verfasser und Verlag

Inhaltsverzeichnis

1 Rechnen mit Funktionen komplexer Zahlen und mit Matrizen

Aufgaben zur Einführung in das Rechnen mit komplexen Zahlen, insbesondere zur Umrechnung der Normalform in die Exponentialform und umgekehrt, sind im Band 2 der Elektro-Aufgaben (Wechselstrom) enthalten.

1.1 Quadratwurzel aus einer komplexen Zahl

Liegt der Radikand in der Exponentialform vor, so ist die Quadratwurzel aus dem Betrag Z zu ziehen und der Winkel φ zu halbieren:

$$\sqrt{Z\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\varphi}} = \sqrt{Z}\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\frac{\varphi}{2}}$$

Liegt der Radikand in der Normalform $\underline{Z} = a + \mathrm{j}\,b$ vor, dann ist diese zuvor in die Exponentialform umzuwandeln: $\sqrt{a+\mathrm{j}\,b} = \sqrt{Z\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\varphi}}$ mit $Z = \sqrt{a^2+b^2}$ und $\tan\varphi = b/a$; ferner ist

$$\sqrt{-a+\mathrm{j}\,b} = \mathrm{j}\,\sqrt{a-\mathrm{j}\,b}$$

Aus folgenden Ausdrücken ist die Quadratwurzel zu ziehen und diese in der Normalform anzugeben:

1. $\sqrt{\mathrm{e}^{\mathrm{j}}}$ **2.** $\sqrt{2\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,30^\circ}}$

3. $\sqrt{16\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,150^\circ}}$ **4.** $\sqrt{0{,}01\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,5^\circ}}$

5. $\sqrt{\mathrm{j}\,9}$ **6.** $\sqrt{-\mathrm{j}}$

7. $\sqrt{-\mathrm{j}\,0{,}16}$ **8.** $\sqrt{\frac{5}{\mathrm{j}}}$

9. $\sqrt{1+\mathrm{j}}$ **10.** $\sqrt{-1-\mathrm{j}}$

11. $\sqrt{1-\mathrm{j}}$ **12.** $\sqrt{-1+\mathrm{j}}$

13. $\sqrt{2-\mathrm{j}\,3}$ **14.** $\sqrt{-5+\mathrm{j}\,4}$

15. $\sqrt{-3-\mathrm{j}\,6}$ **16.** $\sqrt{-2{,}65+\mathrm{j}\,1{,}68}$

17. $\mathrm{j}\,\sqrt{5+\mathrm{j}}$ **18.** $\frac{\sqrt{3+\mathrm{j}\,5}}{\mathrm{j}}$

19. $\sqrt{\frac{13}{5+\mathrm{j}}}$ **20.** $\sqrt{\frac{1+\mathrm{j}}{1-\mathrm{j}}}$

21. $\sqrt{\frac{1}{\mathrm{j}}}$ **22.** $\sqrt{\frac{1}{1+\mathrm{j}}}$

23. $\sqrt[3]{\mathrm{j}}$ **24.** $\left(1-\sqrt{\mathrm{j}}\right)^2$

25. $\frac{1+\mathrm{j}}{\sqrt{\mathrm{j}}}$

1.2 Exponentialtunktionen mit komplexen Exponenten und Logarithmen komplexer Zahlen

Die Exponentialfunktion mit komplexem Exponenten kann in einen reellen und einen imaginären Faktor zerlegt werden:

$$\mathrm{e}^{a+\mathrm{j}\,b} = \mathrm{e}^{a}\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\,b}$$

Der Logarithmus einer komplexen Zahl kann in einen reellen und einen imaginären Teil aufgespalten werden:

$$\ln(a+\mathrm{j}\,b) = \ln\left(Z\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\varphi}\right) = \ln Z + \mathrm{j}\,\varphi$$

Die folgenden Ausdrücke sollen in die Form $\underline{Z}\,\mathrm{e} = A\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\varphi}$ gebracht werden:

26. $\mathrm{e}^{2+\mathrm{j}\,3}$

27. $\mathrm{e}^{-1{,}5+\mathrm{j}\,0{,}8}$

28. $\mathrm{e}^{-(0{,}75+\mathrm{j}\,0{,}4)}$

29. $\sqrt{\mathrm{e}^{0{,}84-\mathrm{j}\,1{,}24}}$

30. $\sqrt{\mathrm{e}^{-1{,}25+\mathrm{j}\,0{,}6}}$

31. $\dfrac{\mathrm{e}^{1{,}6+\mathrm{j}\,0{,}9}}{\mathrm{e}^{\mathrm{j}}}$

32. $\dfrac{\mathrm{e}^{0{,}1+\mathrm{j}\,0{,}2}}{\mathrm{e}^{0{,}2-\mathrm{j}\,0{,}1}}$

33. $\mathrm{e}^{0{,}1} + \mathrm{e}^{\mathrm{j}\,0{,}2}$

34. $\mathrm{e}^{0{,}2+\mathrm{j}\,1{,}5} + \mathrm{e}^{0{,}2-\mathrm{j}\,1{,}5}$

35. $\dfrac{1}{2}\left[\mathrm{e}^{0{,}8+\mathrm{j}\,0{,}8} + \mathrm{e}^{-(0{,}8+\mathrm{j}\,0{,}8)}\right]$

36. $\dfrac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\underline{g}} - \mathrm{e}^{-\underline{g}}\right)$ mit $\underline{g} = (1+\mathrm{j}\,)$

37. $\dfrac{\mathrm{e}^{\underline{g}} - \mathrm{e}^{-\underline{g}}}{\mathrm{e}^{\underline{g}} + \mathrm{e}^{-\underline{g}}}$ mit $\underline{g} = 0{,}6 + \mathrm{j}\,0{,}5$

Die folgenden Ausdrücke sollen in die Form $\underline{Z} = a + \mathrm{j}\,b$ gebracht werden:

38. $\ln\left(16\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,90^\circ}\right)$

39. $\ln\left(0{,}1\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,20^\circ}\right)$

40. $\ln\left(2{,}15\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,10^\circ}\right)$

41. $\ln(3+\mathrm{j}\,4)$

42. $\ln(0{,}4-\mathrm{j}\,0{,}2)$

43. $\ln(-1-\mathrm{j}\,)$

44. $\ln(0{,}05+\mathrm{j}\,0{,}02)$

45. $\ln(50-\mathrm{j}\,0{,}2)$

46. $\ln\sqrt{2-\mathrm{j}\,4}$

47. $\ln(\mathrm{j}\,3)$

48. $\ln\left(\dfrac{1}{\mathrm{j}\,3}\right)$

49. $\ln\sqrt{\mathrm{j}\,3}$

1.3 Hyperbelfunktion komplexer Argumente

Die Kenntnis der Hyperbelfunktionen und ihrer Eigenschaften wird hier vorausgesetzt. Beim Vorliegen komplexer Argumente werden die Funktionswerte unter Benutzung der allgemein verbreiteten Zahlentafeln mit den hier angegebenen Formeln berechnet. Sie können aber auch mithilfe besonderer Netztafeln (Sinus- und Tangensrelief) ermittelt werden.

$$\sinh(a \pm \mathrm{j}\,b) = \sinh a \cdot \cos b \pm \mathrm{j}\,\cosh a \cdot \sin b$$

$$\cosh(a \pm \mathrm{j}\,b) = \cosh a \cdot \cos b \pm \mathrm{j}\,\sinh a \cdot \sin b$$

$$\tanh(a \pm \mathrm{j}\,b) = \frac{\sinh 2a}{\cosh 2a + \cos 2b} \pm \frac{\mathrm{j}\,\sin 2b}{\cosh 2a + \cos 2b}$$

Ist der Funktionswert von $\tanh(a+\mathrm{j}\,b)$ in der Form $Z\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\varphi}$ (oder in der entsprechenden Normalform) gegeben, so findet man die Komponenten des Argumentes $a+\mathrm{j}\,b$ mit den Formeln

$$\tanh 2a = \frac{2Z\cos\varphi}{1+Z^2} \quad \text{und} \quad \tan 2b = \frac{2Z\sin\varphi}{1-Z^2}$$

Die Werte von a und b können entsprechenden tanh- bzw. tan-Tabellen entnommen werden.

Die Werte der folgenden Funktionen sind in der Normalform anzugeben:

50. $\sinh\mathrm{j}$

51. $\sinh(0{,}5\,\mathrm{j}\,)$

52. $\sinh(0{,}5+\mathrm{j}\,1{,}5)$

53. $\sinh(0{,}8-\mathrm{j}\,0{,}8)$

54. $\sinh(0{,}2+\mathrm{j}\,1{,}2)$

55. $\sinh(0{,}2+\mathrm{j}\,\pi)$

56. $\sinh(1{,}65-\mathrm{j}\,2{,}50)$

57. $\sinh\left(\pi/2+\mathrm{j}\,\right)$

58. $\cosh(1+\mathrm{j}\,)$

59. $\cosh\mathrm{j}\,0{,}9$

60. $\cosh(0{,}6+\mathrm{j}\,0{,}2)$

61. $\cosh(0{,}8-\mathrm{j}\,0{,}8)$

62. $\cosh\left(\pi/2-\mathrm{j}\,\pi\right)$

63. $\cosh\mathrm{j}\,\pi/4$

64. $\tanh\mathrm{j}\,\pi$

65. $\tanh(1+\mathrm{j}\,)$

66. $\tanh(0{,}2+\mathrm{j}\,0{,}3)$

67. $\tanh\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,60^\circ}$

68. $\tanh 1{,}5\left(1+\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,30^\circ}\right)$

69. $\tanh\sqrt{0{,}5\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,40^\circ}}$

70. $\tanh\dfrac{1}{\mathrm{j}\,3}$

Zu berechnen sind die komplexen Argumente $(a+\mathrm{j}\,b)$ folgender Funktionswerte:

71. $\tanh(a + \mathrm{j}\,b) = \mathrm{j}$

72. $\tanh(a + \mathrm{j}\,b) = 2 + \mathrm{j}\,2$

73. $\tanh(a + \mathrm{j}\,b) = 0{,}253 + \mathrm{j}\,0{,}519$

74. $\tanh(a + \mathrm{j}\,b) = 0{,}923 + \mathrm{j}\,0{,}157$

75. $\tanh(a + \mathrm{j}\,b) = 0{,}3\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,1{,}5}$

76. $\tanh(a + \mathrm{j}\,b) = 0{,}8\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,0{,}6}$

77. $\tanh(a + \mathrm{j}\,b) = 0{,}7 - \mathrm{j}\,0{,}2$

78. $\tanh(a + \mathrm{j}\,b) = 1{,}117\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,14{,}1^\circ}$

79. $\tanh(a + \mathrm{j}\,b) = 0{,}366\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,54^\circ}$

80. $\tanh(a + \mathrm{j}\,b) = 1{,}11\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,40^\circ}$

1.4 Rechnen mit Matrizen

Zur Abkürzung der in der Vierpoltheorie vorkommenden Gleichungssysteme ist die Matrizenform nützlich.

Definition: Unter einer Matrix $\boldsymbol{A}$ versteht man die in einem rechteckigen Schema von m Zeilen und n Spalten angeordnete Gesamtheit von $m \cdot n$ Elementen

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Ist z. B. ein Vierpol durch die Gleichungen

$$\underline{U}_\mathrm{e} = Z_{11}\underline{I}_\mathrm{e} + Z_{12}\underline{I}_\mathrm{a}$$
$$\underline{U}_\mathrm{a} = Z_{21}\underline{I}_\mathrm{e} + Z_{22}\underline{I}_\mathrm{a}$$

gegeben, so lautet die entsprechende Matrizenschreibweise

$$\begin{pmatrix} \underline{U}_\mathrm{e} \\ \underline{U}_\mathrm{a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{I}_\mathrm{e} \\ \underline{I}_\mathrm{a} \end{pmatrix}$$

Die Matrix auf der linken Gleichungsseite besteht nur aus einer einzigen Spalte, während auf der rechten Seite das Produkt aus einer quadratischen Matrix von der Ordnung 2, d. h. vom Typ (2, 2), und einer einspaltigen Matrix steht.

Zur Lösung der im Abschnitt 3. behandelten Aufgaben werden lediglich Matrizen der Ordnung 2 und einspaltige Matrizen verwendet, deren Handhabung einfach ist.

1.4.1 Determinante einer Matrix

Während eine Matrix in runde Klammern eingeschlossen wird und nur ein Schema von Koeffizienten darstellt, besitzt deren in gerade Striche gesetzte Determinante $\Delta\boldsymbol{A}$ (oder auch $\det\boldsymbol{A}$) einen berechenbaren Zahlenwert.

Für eine Matrix der Ordnung 2

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

lautet die Determinante

$$\boxed{\Delta\boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

Anwendungsbeispiel:

Sind zwei lineare Gleichungen mit den beiden Unbekannten x und y gegeben:

$a_{11}x + a_{12}y = b_1$

$a_{21}x + a_{22}y = b_2$

so findet man nach der „CRAMERschen Regel“:

$$x = \frac{1}{\Delta\boldsymbol{A}} \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} \quad \text{und} \quad y = \frac{1}{\Delta\boldsymbol{A}} \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

Wie lauten die Determinanten folgender Matrizen?

81. $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$

82. $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$

83. $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 10 & -9 \\ 11 & 10 \end{pmatrix}$

84. $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

85. $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ a & b \end{pmatrix}$

86. $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & ab \\ 1/a & b \end{pmatrix}$

87. $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a+b & c+a \\ -c-b & b+c \end{pmatrix}$

88. Wie lautet die Matrix der Ordnung 2, deren 1. Zeile die Elemente $(5, 6)$ und deren Determinante den Wert 12 hat, wenn die Elemente der 2. Zeile im Verhältnis 3 : 4 zueinander stehen?

89. Wenn das erste Element der Matrix $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} x & 5 \\ 12 & 6 \end{pmatrix}$ verdoppelt wird, nimmt die Determinante den 3-fachen Betrag an. Wie lauten die Matrix und deren Determinante?

90. Die Determinante einer quadratischen 2-reihigen Matrix hat mit $\Delta\boldsymbol{A} = 5$ denselben Betrag wie die beiden Elemente der 1. Zeile. Wie lautet die Matrix, wenn $a_{22} = 11$ ist?

91. Wie lautet die Matrix der Ordnung 2, deren Determinante $\Delta\boldsymbol{A} = 1$ ist (Einheitsmatrix)?

92. Wie lautet die Determinante, deren Matrix aus vier aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen besteht?

93. Wie lautet die Determinante, deren Matrix aus vier aufeinanderfolgenden geraden Zahlen besteht?

In den folgenden Gleichungssystemen sind mithilfe von Determinanten die Unbekannten x und y zu bestimmen.

94. $3x - 2y = 11$
$2x + 3y = 16$

95. $8x + 5y = 63$
$7x - 5y = 27$

96. $5y = 2x + 1$
$8y = 5x - 11$

97. $\dfrac{x}{y} = \dfrac{a}{b}$
$(x - y) = (a - b)^2$

98. $\dfrac{x+y}{x-y} = \dfrac{a+b}{a-b}$
$3x - 2y = 3a - 2b$

99. $\dfrac{x}{y} = \dfrac{5}{6}$
$\dfrac{6x+1}{4y+5} = \dfrac{13}{11}$

100. $\dfrac{x}{a+b} + \dfrac{y}{a-b} = 2a$
$\dfrac{x}{a-b} - \dfrac{y}{a+b} = 2b$

1.4.2 Addition von Matrizen und Multiplikation mit einem Faktor

Zwei Matrizen vom gleichen Typ werden addiert (subtrahiert), indem man die einander entsprechenden Elemente addiert (subtrahiert):

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \pm b_{11} & a_{12} \pm b_{12} \\ a_{21} \pm b_{21} & a_{22} \pm b_{22} \end{pmatrix}$$

Eine Matrix wird mit einem Faktor k multipliziert, indem jedes Element mit dem Faktor k multipliziert wird:

$$k\boldsymbol{A} = k \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} \\ ka_{21} & ka_{22} \end{pmatrix}$$

Enthalten alle Elemente einer Matrix einen gemeinsamen Faktor, so können sie durch den Faktor dividiert und dieser vor die Matrix geschrieben werden.

101. $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$

102. $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$

103. $\begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 10 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

104. $\begin{pmatrix} 3a & 2b \\ -b & -a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a & -b \\ 2b & 3a \end{pmatrix}$

105. $a \cdot \begin{pmatrix} b & 1/a \\ a & 1/b \end{pmatrix}$

106. $10^{-3} \cdot \begin{pmatrix} 5000 & 4500 \\ 500 & 1200 \end{pmatrix}$

Folgende Ausdrücke sind auf die kürzeste Form zu bringen:

107. $\begin{pmatrix} 15 & 17 \\ 19 & 21 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & -7 \\ -5 & 9 \end{pmatrix}$

108. $\begin{pmatrix} a-2b & 2b-a \\ 2a-b & b-2a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b & -b \\ -a & a \end{pmatrix}$

109. Um welchen Faktor vergrößert sich die Determinante $\boldsymbol{A}$ einer 2-reihigen quadratischen Matrix, wenn diese mit dem Faktor k multipliziert wird?

110. Welche Matrix $\boldsymbol{B}$ ist zur Matrix

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 2{,}5 \\ 4{,}5 & 3{,}0 \end{pmatrix}$$

zu addieren, damit die Einheitsmatrix entsteht?

1.4.3 Multiplikation von Matrizen

Zwei Matrizen $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{B}$ werden miteinander multipliziert, indem man die Zeilen der Matrix $\boldsymbol{A}$ mit den Spalten der Matrix $\boldsymbol{B}$ in der folgenden Weise zusammensetzt:

$$\begin{pmatrix} \boxed{a_{11} \quad a_{12}} \\ a_{21} \quad a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} b_{11} \\ b_{21} \end{matrix}} & \begin{matrix} b_{12} \\ b_{22} \end{matrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21}} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$$

Die Multiplikation ist nur dann ausführbar, wenn die Zahl der Spalten von $\boldsymbol{A}$ mit der Zahl der Zeilen von $\boldsymbol{B}$ übereinstimmt.

Das Produkt zweier Matrizen ist nicht kommutativ, d. h., im Allgemeinen ist $\boldsymbol{AB} \neq \boldsymbol{BA}$. Man unterscheidet die Multiplikation von links her ($\boldsymbol{AB}$) und von rechts her ($\boldsymbol{BA}$).

Die Determinante $\Delta(\boldsymbol{AB})$ des Produktes ist gleich dem Produkt der Determinanten $\Delta\boldsymbol{A}$ und $\Delta\boldsymbol{B}$, auch dann, wenn $\boldsymbol{AB} \neq \boldsymbol{BA}$ ist.

Berechnen Sie die folgenden Produkte und weisen Sie nach, dass das Produkt der Determinanten der Faktoren gleich der Determinante des Produktes ist:

111. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$

112. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$

113. $\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

114. $\begin{pmatrix} 1{,}5 & 2{,}5 \\ 0{,}5 & 3{,}5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}5 & 4{,}5 \\ 1{,}5 & -0{,}5 \end{pmatrix}$

115. $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}$

116. $\begin{pmatrix} 6 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$

Stellen Sie durch Ausrechnen fest, ob die folgenden Produkte kommutativ sind:

117. $\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

118. $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$

119. $\begin{pmatrix} 10 & 12 \\ 9 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 1/3 \end{pmatrix}$

120. $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$

Folgende Produkte sind in die Form eines Gleichungssystems umzuschreiben:

121. $\begin{pmatrix} \underline{U}_\mathrm{e} \\ \underline{U}_\mathrm{a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{I}_\mathrm{e} \\ \underline{I}_\mathrm{a} \end{pmatrix}$

122. $\begin{pmatrix} \underline{U}_\mathrm{e} \\ \underline{I}_\mathrm{e} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{U}_\mathrm{a} \\ \underline{I}_\mathrm{a} \end{pmatrix}$

Die in den folgenden Matrizengleichungen enthaltenen Unbekannten x, y bzw. U_1, U_2 usw. sind mithilfe von Determinanten zu berechnen (siehe auch die Anleitung S. 10):

123. $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \end{pmatrix}$

124. $\begin{pmatrix} 5 & -7 \\ 7 & -9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}1 \\ 1{,}7 \end{pmatrix}$

125. $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1{,}9 \\ 8 & -3{,}9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

126. $\begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & -1/2 \\ 1/7 & -1/3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

127. $\begin{pmatrix} 60\,\mathrm{V} \\ 1{,}2\,\mathrm{A} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}5 & 50\,\Omega \\ 0{,}02\,\mathrm{S} & 1{,}2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U_2 \\ I_2 \end{pmatrix}$

128. $\begin{pmatrix} 50\,\mathrm{V} \\ 0{,}3\,\mathrm{A} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 100\,\Omega \\ 0{,}02\,\mathrm{S} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U_2 \\ I_2 \end{pmatrix}$

129. $\begin{pmatrix} 50\,\mathrm{V} \\ 10\,\mathrm{V} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40\,\Omega & 50\,\Omega \\ 4\,\Omega & 80\,\Omega \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix}$

130. $\begin{pmatrix} 1{,}5\,\mathrm{A} \\ 0{,}3\,\mathrm{A} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6\,\mathrm{mS} & 4\,\mathrm{mS} \\ 1\,\mathrm{mS} & 2\,\mathrm{mS} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix}$

2 Leitungen

2.1 Grundgrößen elektrischer Leitungen

Formeln:

$$\underline{Z}' = R' + \mathrm{j}\,\omega L'$$

$$Z' = \sqrt{R'^2 + \omega^2 L'^2}$$

$$\underline{Y}' = G' + \mathrm{j}\,\omega C'$$

$$Y' = \sqrt{G'^2 + \omega^2 C'^2}$$

$$\underline{Z}_\mathrm{L} = \sqrt{\frac{\underline{Z}'}{\underline{Y}'}} = Z_\mathrm{L}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\varphi}$$

$$\underline{\gamma} = \sqrt{\underline{Z}'\underline{Y}'}$$

$$\underline{\gamma} = \alpha + \mathrm{j}\,\beta$$

$$\tan\varepsilon = \frac{R'}{\omega L'}$$

$$\tan\delta = \frac{G'}{\omega C'}$$

$$\varphi = \frac{\delta - \varepsilon}{2}$$

$$\alpha = \sqrt{Z'Y'} \cdot \sin\frac{\delta + \varepsilon}{2}$$

$$\beta = \sqrt{Z'Y'} \cdot \cos\frac{\delta + \varepsilon}{2}$$

Größe	Zeichen	Einheit
Länge der Leitung	l	km
Widerstandsbelag	R'	Ω/km
Induktivitätsbelag	L'	H/km
Kapazitätsbelag	C'	F/km
Ableitungsbelag	G'	S/km
Längswiderstand je Kilometer	$\underline{Z}'$	Ω/km
Querleitwert je Kilometer	$\underline{Y}'$	S/km
Wellenwiderstand	$\underline{Z}_\mathrm{L}$	Ω
Winkel des Wellenwiderstandes	φ	°
Ausbreitungskoeffizient	$\underline{\gamma}$	1/km
Dämpfungsbelag	α	Np/km oder 1/km
Phasenbelag	β	rad/km oder 1/km
Ausbreitungsmaß	$\underline{g} = \underline{\gamma} l$	1
Dämpfungsmaß	$a = \alpha l$	Np
Phasenmaß	$b = \beta l$	rad
Verlustwinkel des Längswiderstandes	ε	°
Verlustwinkel des Querleitwertes	δ	°

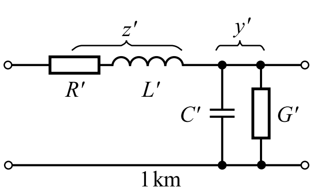


Bild 1: Ersatzschaltbild einer Leitung von 1 km Länge

Außer dem ohmschen Widerstand R weisen alle elektrischen Freileitungen und Kabel eine bestimmte Induktivität L, eine Kapazität C sowie eine von den Isolations- und dielektrischen Verlusten herrührende Ableitung G auf. In dem zumeist vorliegenden Fall der homogenen Leitung kann man sich diese Größen gleichmäßig auf die gesamte Leitungslänge verteilt denken und bezieht sie dann auf je 1 km Länge der Doppelleitung. Damit ergeben sich die Leitungskonstanten: **Widerstandsbelag** R', **Induktivitätsbelag** L', **Ableitungsbelag** G' und **Kapazitätsbelag** C'. Für 1 km Leitungslänge entsteht so das Ersatzschaltbild (Bild 1). Hierbei lassen sich noch R' und L' zum **komplexen Längswiderstand** $\underline{Z}'$ (Impedanzbelag) sowie G' und $\omega C'$ zum **komplexen Querleitwert** $\underline{Y}'$ (Admittanzbelag) zusammenfassen. Übungsaufgaben zur Berechnung der Induktivität und Kapazität von Leitungen befinden sich im Band 1 dieser Aufgabensammlung (Gleichstrom, Abschnitt 7.3 und 9.5).

Mit zunehmender Entfernung vom Leitungseingang nehmen Spannung und Strom nach einem Exponentialgesetz ab. Hierfür ist der **Dämpfungsbelag** α bzw. für die gesamte Leitungslänge l das **Dämpfungsmaß** $a = \alpha l$ maßgebend. Gleichzeitig tritt eine zunehmende Phasenverschiebung von Spannung und Strom gegenüber den Werten am Leitungseingang auf. Maßgebend hierfür ist der **Phasenbelag** β bzw. für die gesamte Leitungslänge das **Phasenmaß** $b = \beta l$. Beide Größen setzen sich zum komplexen **Ausbreitungskoeffizienten** $\underline{\gamma}$ bzw. für die gesamte Leitungslänge l zum Ausbreitungsmaß $\underline{g} = \underline{\gamma} l$ zusammen.

Bei unendlich großer Leitungslänge ist der Eingangswiderstand gleich dem **Wellenwiderstand** $\underline{Z}_\mathrm{L}$. Wenn eine Leitung von endlicher Länge mit dem Wellenwiderstand $\underline{Z}_\mathrm{L}$ abgeschlossen wird, liegt der besondere, in der Praxis meist angestrebte Fall der **Anpassung** vor. Dann ist der Quotient aus Spannung und Strom an jedem beliebigen Punkt der Leitung gleich dem Wellenwiderstand, und die übertragene Leistung hat ihren maximalen Wert.

Ausbreitungsmaß $\underline{g}$ und Wellenwiderstand $\underline{Z}_\mathrm{L}$ lassen sich nach den angegebenen Gleichungen aus dem Längswiderstand $\underline{Z}'$ und dem Querleitwert $\underline{Y}'$ berechnen. Hierbei ergeben sich α und β aus dem Ausbreitungskoeffizienten $\underline{\gamma}$ als reelle bzw. imaginäre Komponente. Ein zweiter Weg zur Berechnung des Ausbreitungskoeffizienten $\underline{\gamma}$ führt über die Beträge von $\underline{Z}'$, $\underline{Y}'$ und die zugehörigen Verlustwinkel δ und ε.

131. Gegeben sind die Grundgrößen folgender Leitungen:

	R' in Ω/km	L' in mH/km	G' in µS/km	C' in nF/km
a) Starkstromleitung ($f = 50\,\mathrm{Hz}$)	0,2	1,5	0,5	5
b) Fernsprechleitung ($\omega = 5000\,1/\mathrm{s}$)	5	2,0	8,0	6
c) Fernsprechkabel ($\omega = 5000\,1/\mathrm{s}$)	60	0,7	1,0	30

Zu berechnen sind: Wellenwiderstand $\underline{Z}_\mathrm{L}$, Dämpfungsbelag α, Phasenbelag β und Ausbreitungskoeffizient $\underline{\gamma}$.

132. Welcher komplexe Ausdruck für den Ausbreitungskoeffizienten $\underline{\gamma}$ ergibt sich für eine Freileitung mit $R' = 8\,\Omega/\mathrm{km}$, $L' = 2\,\mathrm{mH/km}$, $G' = 1\,\mu\mathrm{S/km}$, $C' = 5\,\mathrm{nF/km}$ und $\omega = 5000\,1/\mathrm{s}$?

133. Wie groß sind der Dämpfungsbelag α und der Phasenbelag β, wenn das Ausbreitungsmaß einer 50 km langen Leitung a) $\underline{g} = 1{,}5\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,30^\circ}$, b) $\underline{g} = 2{,}5\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,15^\circ}$ und c) $\underline{g} = 2{,}5 + \mathrm{j}\,1{,}2$ beträgt?

134. Wie lautet das Ausbreitungsmaß $\underline{g}$ in der Exponentialform für ein Kabel mit den folgenden Werten?

a) $\alpha = 45\,\mathrm{mNp/km}$; $\beta = 3{,}2^\circ/\mathrm{km}$; $l = 40\,\mathrm{km}$
b) $\alpha = 60\,\mathrm{mNp/km}$; $\beta = 0{,}07\,\mathrm{rad/km}$; $l = 120\,\mathrm{km}$
c) $\alpha = 30\,\mathrm{mNp/km}$; $\beta = 0{,}1\,\mathrm{rad/km}$; $l = 300\,\mathrm{km}$

135. Das Ausbreitungsmaß eines Kabels, dessen Phasenmaß $b = 15\,\mathrm{rad}$ ist, hat den Betrag $|\underline{g}| = 25$. Welchen Wert hat das Dämpfungsmaß a?

136. Eine frei verlegte Telefonleitung hat die Kenngrößen $R' = 18\,\Omega/\mathrm{km}$, $G' = 2\,\mu\mathrm{S/km}$, $L' = 1{,}6\,\mathrm{mH/km}$ und $C' = 4\,\mathrm{nF/km}$. Zu berechnen sind der Dämpfungs- und Phasenbelag sowie der Ausbreitungskoeffizient und der Wellenwiderstand bei Annahme der Kreisfrequenz $\omega = 5000\,1/\mathrm{s}$.

137. Für eine Fernsprechleitung mit $R' = 12\,\Omega/\mathrm{km}$, $L' = 2{,}2\,\mathrm{mH/km}$, $G' = 3\,\mu\mathrm{S/km}$, $C' = 5\,\mathrm{nF/km}$ und $\omega = 5000\,1/\mathrm{s}$ ist auf kürzestem Weg der Winkel φ des Wellenwiderstandes zu berechnen.