Kölner Beiträge zur Didaktik der Mathematik

RESEARCH

Maximilian Moll

# Überzeugung im Werden

## Begründetes Fürwahrhalten im Mathematikunterricht

Springer Spektrum

# Kölner Beiträge zur Didaktik der Mathematik

**Reihe herausgegeben von**
Michael Meyer, Köln, Deutschland
Benjamin Rott, Köln, Deutschland
Inge Schwank, Köln, Deutschland
Horst Struve, Köln, Deutschland

In dieser Reihe werden ausgewählte, hervorragende Forschungsarbeiten zum Lernen und Lehren von Mathematik publiziert. Thematisch wird sich eine breite Spanne von rekonstruktiver Grundlagenforschung bis zu konstruktiver Entwicklungsforschung ergeben. Gemeinsames Anliegen der Arbeiten ist ein tiefgreifendes Verständnis insbesondere mathematischer Lehr- und Lernprozesse, auch um diese weiterentwickeln zu können. Die Mitglieder des Institutes sind in diversen Bereichen der Erforschung und Vermittlung mathematischen Wissens tätig und sorgen entsprechend für einen weiten Gegenstandsbereich: von vorschulischen Erfahrungen bis zu Weiterbildungen nach dem Studium.
Diese Reihe ist die Fortführung der „Kölner Beiträge zur Didaktik der Mathematik und der Naturwissenschaften“.

Weitere Bände in der Reihe http://www.springer.com/series/16272

Maximilian Moll

# Überzeugung im Werden

## Begründetes Fürwahrhalten im Mathematikunterricht

Mit einem Geleitwort von Prof. Dr. Michael Meyer

Springer Spektrum

Maximilian Moll
Wuppertal, Deutschland

Dissertation der Universität zu Köln, 2019

ISSN 2661-8257 ISSN 2661-8265 (electronic)
Kölner Beiträge zur Didaktik der Mathematik
ISBN 978-3-658-27382-8 ISBN 978-3-658-27383-5 (eBook)
https://doi.org/10.1007/978-3-658-27383-5

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Springer Spektrum


Springer Spektrum ist ein Imprint der eingetragenen Gesellschaft Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH und ist ein Teil von Springer Nature.
Die Anschrift der Gesellschaft ist: Abraham-Lincoln-Str. 46, 65189 Wiesbaden, Germany

# Geleitwort

Vor ca. drei Jahren kam Maximilian Moll in mein Büro, um über die Möglichkeit einer Promotion zu sprechen. Er wollte untersuchen, warum Lernende davon überzeugt sind bzw. sein können, einen Würfel zum Erhalt der Augenzahl 6 anzupusten und wie solche Überzeugungen überhaupt entstehen und/oder sich durch tragfähigere ersetzen lassen.

Überzeugungen sind in einem Mathematikunterricht, der – im Gegensatz zum traditionellen Rechenunterricht – ein inhaltliches Verständnis selbständig zu erabeitender mathematischer Zusammenhänge fokussiert, von enormer Bedeutung. Denn wird bedacht, dass ein Sachverhalt ein mathematischer Zusammenhang sein kann, so wird ein wesentliches Ziel von Mathematikunterricht schnell deutlich: die Lernenden sollten nicht nur mathematische Zusammenhänge entdecken, sondern auch zu einer inhaltlich begründeten Überzeugung daher kommen, dass diese Zusammenhänge korrekt und anwendbar sind. Denn sind wir von einem Sachverhalt (zum Beispiel einem mathematischen Zusammenhang) überzeugt, so hegen wir kaum Zweifel an diesem. Sind wir hingegen nicht überzeugt, so bedarf es (zumindest idealerweise) einer weitergehenden Untersuchung dieses Sachverhaltes.

Von etwas überzeugt zu sein, hängt auch vom Individuum ab. Denn vergangene Erfahrungen spielen etwa bei dem „Würfelpusten“ sicherlich eine bedeutsame Rolle zur Entstehung der Überzeugung. Betrachten wir nun einen mathematischen Zusammenhang, wie zum Beispiel das Kommutativgesetz der Addition, so wird die Situation in der Konkurrenz von beispielsweise Erfahrungen, empirischen Rechenergebnissen und verschiedenen Begründungsoptionen interessanter. Wenn sich dann der Forschungsgegenstand wie im vorliegenden Fall bei Herrn Moll als „SchülerInnen im (inklusiven) Mathematikunterricht“ beschreiben lässt, wird sich eine Überzeugung kaum als ausschließlich aus den sukzessiv einander folgenden Deduktionen eines Beweises zusammensetzend rekonstruieren lassen.

Welche Eigenschaften weist also eine (gefestigte) Überzeugung auf, welche Unterschiede lassen sich zwischen womöglich verschiedenen Typen von Überzeugungen feststellen? Die Kenntnis solcher Unterschiede würde eine konsequente Berücksichtigung dieser Thematik im Unterricht ermöglichen. Entsprechend wurde in dieser Arbeit stets darauf geachtet, inhaltliche Aspekte bei der theoretischen Betrachtung zu fokussieren. Vor dem Hintergrund der Bedeutung des Überzeugungsbegriffs im Unterricht ist es umso erstaunlicher, dass das Thema Überzeugungen in der Mathematikdidaktik bisher kaum theoretisch ausgeschärft wurde.

Zur Klärung des Überzeugungsbegriffs beginnt Herr Moll mit den philosophischen Überlegungen von Immanuel Kant. Um diese für die Mathematikdidaktik nutzen zu können, wurden sie modifiziert und somit der empirischen Lehr-/Lernrealität angepasst. Im Wesentlichen bezieht sich Herr Moll dabei auf den Symbolischen Interaktionismus nach H. Blumer und die Systemtheorie nach N. Luhmann. In der Verbindung der philosophischen Grundlage und den soziologischen Perspektiven, die bereits seit einiger Zeit Verwendung in der Mathmatikdidaktik finden, gelingt es Herrn Moll – durchweg überzeugend – eine theoretische Perspektive herauszuarbeiten, welche die obigen Fragen auf der Basis der Bildung eines neuen Begriffsnetzes zu beantworten verhilft. Dieses wird sogleich an der Realität des Mathematikunterrichts überprüft, nicht nur um die Theorie an sich zu prüfen, sondern auch um Facetten der inhaltlichen Orientierung aufzuzeigen.

Sowohl die theoretischen wie auch die empirischen Analysen zeigen, dass ein reflektierter Überzeugungsbegriff individuelle wie auch soziale Einflüsse aufzeigt und weniger statisch oder stabil, sondern vielmehr als veränderlich betrachtet werden kann. Gleichwohl zeigen die Analysen aber auch, dass die anfängliche Frage zum Pusten so einfach nicht zu beantworten ist.

Zusammenfassend bietet Maximilian Moll in der Verbindung mathematikdidaktischer, soziologischer und philosophischer Grundlagen einen wesentlichen Beitrag zur mathematikdidaktischen Grundlagenforschung. Theoretische Tiefe und empirische Anwendung bzw. Anwendbarkeit sorgen dafür, dass dieser Beitrag nicht nur rekonstruktiven Ansprüchen genügt, sondern auch ein enormes Potential für konstruktive Arbeiten beinhaltet.

Köln im Sommersemester 2019

# Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand am Institut für Mathematikdidaktik an der Universität zu Köln. Sie wurde von der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät der Universität zu Köln als Dissertation angenommen. Am 18.01.2019 fand die Abschlussprüfung als Disputation am Institut für Mathematikdidaktik statt. Der universitätsoffenen Prüfung wohnten neben den Gutachtern, Herrn Prof. Dr. Michael Meyer und Herrn Prof. Dr. Horst Struve, außerdem die prüfungsberechtigten Mitglieder Frau Prof.'in Dr. Christiane Reiners (Vorsitzende) und Herr Dr. Stefan Heilmann (Beisitzer) bei.

Ich muss ehrlich sagen, dass es für mich eine Ehre und Geschenk war und immer noch ist, diese Arbeit zu schreiben. Als ich angefangen habe zu studieren, konnte ich mir das eigentlich nicht so recht vorstellen, dass ich einmal eine Dissertation verfassen werde. So ein Buch. Ich habe zwar oft gedacht „das wäre schon cool". Allerdings habe ich mich dafür nicht geeignet genug gehalten. Und ohne zahlreiche Leute und Gott wäre das auch nicht möglich gewesen. Auch wenn ich am Ende versichere, dies alles selbst geschrieben zu haben, so wäre es vermessen zu sagen, dass dieses Buch ganz allein das Produkt meiner eigenen Leistung gewesen wäre. Als ich Mitte 2015 nicht so genau wusste, was ich nun im Anbetracht des Endes meines Studiums der Sonderpädagogik mit den Fächern Mathematik und katholischer Religion eigentlich machen möchte, kam (Prof. Dr.) Michael (Meyer) auf mich zu und fragte mich, ob ich nicht Interesse hätte, im Rahmen der Kölner Graduiertenschule der MINT Fachdidaktiken zu promovieren. Zunächst habe ich gedacht, ich hätte mich verhört oder er würde mich verwechseln. Aber es war ernst gemeint. An dieser Stelle möchte ich dir, lieber Michael sehr dafür danken, dass du mich im Anschluss an die Stochastik Vorlesung 2012 als studentische Hilfskraft und dann nochmal als Wissenschaftlicher Mitarbeiter 2015 haben wolltest. Hättest du mich damals nicht angesprochen, wäre es wohl nie soweit gekommen. Der Dank gebührt natürlich besonders für die Betreuung während der vergangenen 3,5 Jahre. Insbesondere in der Anfangszeit, als ich mit Kant und Luhmann ankam und wir teilweise über einzelne Wörter diskutiert haben und als es dann im Laufe der Zeit nochmal um die Gesamtperspektive dieser Arbeit ging. Ich gebe zu, dass manches vielleicht von meiner Seite hätte schneller laufen können, aber irgendwie habe ich es genoßen, manchmal aus dem Fenster meines Büros 2.08 im Modelbau zu schauen und über Kant, Blumer, Luhmann, Inklusion und Überzeugungen nachzudenken; die Gedanken schweifen zu lassen mich manchmal in diesen zu verlieren. Das war wirklich ein Privileg. Wo wir schon in diesem Büro mit Blick auf die Bäume und das Gras sind, möchte ich meiner langjährigen Bürokollegin Julia Rey danken. Für die zahlreichen Gespräche und guten Gedanken. Auch wenn du, Julia oft das Gefühl hattest, dass ich nicht so oft nachfragen würde, waren es auch diese Gespräche, die mich auf neue Gedanken und Ideen brachten. Im Rahmen dessen möchte ich auch der gesamten Arbeitsgruppe Meyer danken. Sowohl den aktuellen als auch den ehemaligen Mitgliedern dieser Arbeitsgruppe. Für das gemeinsame Analysieren, das kritische Lesen von Texten und das Reflektieren verschiedener Vorträge. Denn auch das hat mich weitergebracht. Mein Denken erweitert hat auch mein Zweitbetreuer Prof. Dr. Horst Struve. Nicht zuletzt durch das Schenken des Buches „Die Struktur wissenschaftlicher Revolutionen“ und einiger sehr guter Betreuungsgespräche, aus denen ich wirklich etwas für diese und weitere Arbeiten ziehen konnte, hast du, Horst, zu dieser Arbeit beigetragen. Ebenfalls möchte ich Prof. Dr. Jörg Voigt für Rückmeldungen im Rahmen des Köln-Münster-Kolloqiums danken. Insbesondere dafür an Kategorien festzuhalten, aber den Blick auch immer dafür offen zu halten, dass es innerhalb dieser Kategorien Wechselprozesse geben kann. Vergessen werden sollen im Rahmen des Dankes auch nicht die ehemaligen und aktuellen Mitarbeiter am Insitut für Mathematikdidaktik.

Für viele lustige und auch erfahrungsreiche Begegnungen und Gespräche bei den unterschiedlichen Tagungen in Heidelberg, Potsdam, Hamburg und Paderborn möchte ich Dr. Jessica Kunsteller und Dr. Simeon Schlicht danken. Für einen wie mich, der sich anfangs immer mit neuen Leuten etwas schwertut, war es toll, dass ihr mich dabeihaben wolltet.

Ein Dank gilt auch Anja Hütten für das Korrekturlesen dieser Arbeit und meiner Dusche. Denn nicht nur einmal bin ich beim (etwas zu langen Duschen) auf eine entscheidende Idee gekommen. Beispielsweise bei der

Übersetzung eines objektiv zureichenden Grundes in einen als für andere als zureichend wahrgenommen Grundes.
Danken möchte ich auch meinen Eltern und Geschwistern, die mich trotz aller Schwierigkeiten immer dabei unterstützt haben, überhaupt zu studieren und letztlich zu promovieren. Ohne euch wäre das so nicht möglich gewesen. Daniel Schilling gilt mein Dank als guter Freund, der mich ebenfalls in meinem Studium an zahlreichen Stellen begleitet hat.
Zuletzt möchte ich meiner lieben Frau der Caro danken. Dafür, dass du meine üblen Launen ausgehalten, mich in schwierigen Zeiten ertragen oder mich teilweise stundenlang im Büro zuhause in Ruhe gelassen hast und mir manchmal einen Tee, Kakao oder Kekse brachtest. Wie schön, dass wir uns haben und füreinander da sind.
Viele andere Freunde und Bekannte haben an dieser Arbeit mitgewirkt. Es wäre allerdings zu viel, diese hier zu nennen. Es bleibt noch Gott zu danken, dass er mich auf diesen Weg geführt hat, auch wenn mich natürlich letztlich selbst dazu entschieden habe, das zu tun. Danke!
Nun ist das Buch fertig. Verrückt. Wer hätte das gedacht?

Köln im Sommersemester 2019 Max Moll

# Inhaltsverzeichnis

# 1 Einleitung

Ausgangspunkt dieser Arbeit war eine Situation im Rahmen eines Praktikums. In einer Vertretungsstunde spielten die Lernenden ein bekanntes Würfelspiel. Dabei konnte beobachtet werden, dass einige Lernende den Würfel anpusteten. Auf die Frage, was der Grund dieses Pustens sei, antwortete ein Schüler: „Dann kommt die Sechs öfter". In den kommenden Wochen wurde in der Schule der Laplacesche Wahrscheinlichkeitsbegriff eingeführt und auch eine Klassenarbeit dazu geschrieben. Vier Wochen später wurde das oben bereits erwähnte Würfelspiel wieder gespielt. Auch hier wurden die Würfel angepustet und wieder war die Antwort auf die Frage nach dem Beweggrund: „Dann kommt die Sechs öfter".

Diese Erfahrung erweckte beim Autor dieser Arbeit die Frage, was denn eine Überzeugung sei und wie diese sich eigentlich im Unterricht entwickelt? Wann und wodurch sind Lernende so überzeugt, dass sie die Würfel möglicherweise nur noch aus Gewohnheit anpusten und nicht etwa in dem Glauben, das Würfelergebnis damit manipulieren zu können? So entstand der Wunsch, sich mit Überzeugungen mit Blick auf mathematisch Sachverhalte auseinanderzusetzen.

Dabei stellte sich heraus, dass der Begriff der Überzeugung in der mathematikdidaktischen Forschung oft verwendet und selten definiert wird. Häufig wird er unter dem vielfältigen Begriffskonstrukt „beliefs" subsumiert und bedarf in dieser Subsumierung stets einer Präzisierung und Definition, um wissenschaftliches Arbeiten zu und den Austausch über diesen Begriff der Überzeugung überhaupt zu ermöglichen. Denn was auf der einen Seite das Potenzial des Konstruktes beliefs ist, dass durch dieses Konstrukt verschiedene Erklärungsmodelle zu verschiedenen Bereichen in der mathematikdidaktischen Forschung möglich werden, ist auf der anderen Seite problematisch, da es kaum eine einheitliche Definition für beliefs gibt. In der mathematikdidaktischen Forschung wird der Begriff der Überzeugung auch mit Blick auf das Begründen und Beweisen verwendet. Beweise sollen auch Überzeugen. Allerdings bleibt im Rahmen des Beweisens und Begründens unklar, wie Überzeugung innerhalb der Mathematikdidaktik begrifflich gefasst wird. Dieses Fehlen eines theoretisch hinreichenden Be-


M. Moll, *Überzeugung im Werden*, Kölner Beiträge zur Didaktik der Mathematik,
https://doi.org/10.1007/978-3-658-27383-5_1

griffes zur Überzeugung führt zu verschiedenen Problemen. Ohne ein theoretisch fundiertes Begriffsnetz kann etwa der Zusammenhang zwischen Überzeugungen und dem Begründen nur unzureichend erfasst bzw. erklärt werden. Weiter ist es nur schwer möglich, Überzeugungen innerhalb eines Interaktionsgeschehens zu identifizieren und ihre Bedeutung für dieses Interaktionsgeschehen zu analysieren.

Um dieser Begriffsproblematik entgegen zu treten, wird in dieser Arbeit ausgehend vom Begriff der Überzeugung nach Immanuel Kant ein interaktionistisch und systemisch gewendeter Überzeugungsbegriff theoretisch entwickelt und für die empirische Lehr-Lern-Realität nutzbar gemacht. Dieses „Nutzbarmachen“ dient der Überprüfung des Begriffsnetzes bzgl. seiner Tragfähigkeit innerhalb der Lehr-Lern-Realität. Das Ziel des theoretischen Teils ist daher die Bereitstellung eines theoretisch fundierten Begriffsnetzes, mithilfe dessen in Interaktionsgeschehen die Rekonstruktion von Überzeugungen erfolgen kann. In diesem Sinne verbleibt diese Arbeit nicht in ihrer Theorie, sondern hat auch einen Praxisbezug.

Der theoretische Teil im zweiten und dritten Kapitel dieser Arbeit stellt zunächst die Bezugspunkte des Begriffes der Überzeugung in der bisherigen mathematikdidaktischen Forschung dar und möchte so einen kurzen Überblick ermöglichen. Dies sind im Wesentlichen die Forschung über beliefs und das Begründen und Beweisen. Es folgt in Kapitel 3 die Darstellung des Begriffes der Überzeugung nach Immanuel Kant. Diesen Überzeugungsbegriff hat Kant im Wesentlichen in seiner Kritik der reinen Vernunft entwickelt. Er zeichnet sich dadurch aus, dass Überzeugung darin besteht, einen Sachverhalt für wahr zu halten. Dieses Fürwahrhalten ist abhängig von zureichenden Gründen; wobei innerhalb dieser Arbeit der Gegenstand des Fürwahrhaltens ein mathematischer Sachverhalt bzw. die Anwendbarkeit eines mathematischen Sachverhaltes ist und die zureichenden Gründe sich auf inhaltliche Gründe beziehen, die innerhalb einer Interaktion ausgehandelt werden. Der Zusammenhang zwischen Fürwahrhalten und den zureichenden inhaltlichen Gründen wird in der interaktionistischen Wendung in Kapitel 3.5 dargestellt. Dazu werden Ansätze des Symbolischen Interaktionismus nach Herbert Blumer genutzt. Zudem dient diese Wendung dem Nutzbarmachen des Begriffes der Überzeugung für die Lehr-Lern-Realität, da diese Arbeit aus interaktionistischer Perspektive verfasst wurde. Die systemische Wendung (Kapitel 3.6) innerhalb des Theorieteils nutzt Ansätze aus Niklas Luhmanns Systemtheorie und ermöglicht eine Vertiefung der interaktionistischen Wendung des Überzeugungsbegriffes. In Kapitel 3 geht es vornehmlich darum den Überzeugungsbegriff darzustellen und durch eine interaktionistische und systemische Wendung für die Lehr-Lern-Realität nutzbar zu machen.

Entsprechende Überlegungen zur empirischen Lehr-Lern-Realität werden im methodischen und methodologischen Teil (Kapitel 4) vertieft. Dabei wird sich zunächst mit der grundlegenden Perspektive auseinandergesetzt, mit der die empirischen Analysen durchgeführt werden. Dazu werden Theorien des Symbolischen Interaktionsmus und der Ethnomethodologie genutzt. Grundsätzlich wird in dieser Arbeit für die Analysen der interpretative Ansatz der Bielefelder Arbeitsgruppe Bauersfeld verwendet (z.B. Voigt 1984). Auch wird dargestellt, wie das theoretisch entwickelte Begriffsnetz innerhalb der Analysen verwendet wird. Dazu kommt die Darstellung des in dieser Arbeit verwendeten Inklusionsverständnis mithilfe der Perspektiven der egalitären Differenz (Prengel 1983) und Teilhabe an Kommunikation (Luhmann 1992). Zudem werden der Untersuchungsplan und das -verfahren skizziert. Dieser Teil wird durch die Darstellung der Probleme und die Grenzen dieser Arbeit aus methodologischer Sicht abgeschlossen.

Die empirischen Daten wurden mithilfe von halbstandardisierten Interviews erhoben. Interviewt wurden insgesamt 24 Lernende, davon vier mit ausgewiesenem sonderpädagogischem Förderbedarf Lernen, aus sechs verschiedenen Klassen mit fünf verschiedenen Schultypen. Die Aufgaben stammten aus dem Bereich der funktionalen Zusammenhänge, der Stochastik und der Geometrie. Die Interviews wurden videografiert und transkribiert. Für die Analysen wurden insgesamt vier Szenen ausgewählt. Durch dieses 5. Kapitel werden die grundsätzlichen Perspektiven dieser Arbeit skizziert und der Zusammenhang zu dem in Kapitel 3 entwickelten Überzeugungsbegriff aufgezeigt.

Diese theoretischen methodologischen und methodischen Überlegungen sind auch in die entsprechenden Analysen miteingegangen. Dabei wird in der ersten Analyse der Zusammenhang zwischen Fürwahrhalten und den inhaltlichen Gründen untersucht und aufgezeigt, dass eine Überzeugung sich innerhalb eines Interaktionsgeschehens immer im Werden befindet.

Die zweite und dritte Analyse sind vor allem dadurch gekennzeichnet, dass diese Indizien für die Identifikation eines Grundes als zureichend rekonstruieren und den Interaktionsmoment des Zweifels darstellen. In der letzten Analyse wird ein Interview mit einer Lernenden mit dem sonderpädagogischen Förderbedarf Lernen verwendet. Dabei werden an einem Einzelfall mögliche Besonderheiten skizziert. Die Analysen dienen im Wesentlichen dazu aufzuzeigen, inwieweit das theoretisch entwickelte Begriffsnetz auch in der Lehr-Lern-Realität tragfähig ist, wie eine Überzeugung sich in der Interaktion entwickelt und welche Indizien rekonstruierbar sind. Im 6. Kapitel folgt eine Zusammenfassung der wesentlichen Ergebnisse dieser Arbeit. Dabei wird sich sowohl auf die theoretisch entwickelten als auch auf die im empirischen Teil gewonnen Ergebenisse bezogen. Es folgen offene Fragen dieser Arbeit und Ideen für weitere Studien im Bereich der Mathematikdidaktik, bevor sich abschließend mit möglichen Konsequenzen dieser Arbeit für die Schulpraxis auseinandergesetzt wird.

**Redaktionelle Anmerkungen:**

- In dieser Arbeit wird auf die getrennte Nennung der weiblichen und männlichen Form verzichtet. Das jeweils andere Geschlecht sei stets mitbedacht.
- Alle Zitate entsprechen der Originalfassung. Dies impliziert die Kursivschreibweise in Zitaten.
- Alle Namen der Lernenden wurden in der Arbeit mit Pseudonymen versehen. Die Nummerierung der Abbildungen bzw. der Tabellen orientiert sich an den jeweiligen Kapiteln und erfolgt fortlaufend numerisch.

# 2 Mathematikdidaktische Einordnungen zum Begriff der Überzeugung

„Überzeugе dich selbst, überzeuge einen Freund, überzeuge deinen Feind – das Letztere ist das, was man beim Beweisen machen muss“
(David Tall (1989) zit. n Kuntze (2005))

Der Begriff der Überzeugung ist in der Mathematikdidaktik mit den Begriffen beliefs und Begründen verknüpft. Es scheint daher sinnvoll, sich im Rahmen der mathematikdidaktischen Grundlagen zum Begriff der Überzeugungen zunächst mit diesen beiden Begriffen und ihren Verwendungsweisen auseinanderzusetzen.

## 2.1 beliefs in der Mathematikdidaktik

Während die Funktion der Überzeugung, hier nicht im Sinne der Handlung des Überzeugens verstanden, in der Regel mit dem Begründen verbunden wird, wird der Begriff der Überzeugung in der mathematikdidaktischen Forschungswelt oftmals unter dem Begriff beliefs subsumiert. Die Auseinandersetzung mit dem Konstrukt der beliefs hat an dieser Stelle die Aufgabe, den entsprechenden mathematikdidaktischen Forschungszweig aufzuzeigen, um dann eine Abgrenzung zwischen dem Begriff beliefs zum Begriff der von mir verwendeten Überzeugung im Werden zu ermöglichen. Diese Auseinandersetzung ersetzt allerdings keine theoretische Übersichtsarbeit, die die verschiedenen Ansätze zu beliefs miteinander vergleicht und zusammenführt. Dazu sei an dieser Stelle auf die Arbeiten von Op’t Eynde et al. (2002), Furinghetti & Pehkonen (2002) und Maaß & Ege (2007) verwiesen.
Um eine entsprechende Abgrenzung zum von mir entwickelten Überzeugungsbegriff zu ermöglichen, müssen zunächst die wesentlichen Kennzeichen der verschiedenen Verwendungsweisen von beliefs aufgezeigt werden. Der Begriff beliefs wird in der mathematikdidaktischen Forschung von verschiedenen Autoren in unterschiedlicher Weise genutzt, definiert, aufgegriffen, transformiert und in Bezug gesetzt. Es ist daher unabdingbar,


M. Moll, *Überzeugung im Werden*, Kölner Beiträge zur Didaktik der Mathematik,
https://doi.org/10.1007/978-3-658-27383-5_2

vor jeder Diskussion und in jedem Artikel zunächst zu klären, welcher Begriff von beliefs in der jeweiligen Diskussion verwendet wird. Dies mag mühselig erscheinen, aber nur mit einer vorgeschalteten Begriffsklärung ist es möglich, diesen Begriff wiederum in Bezug zu anderen Begriffen zu setzen und ihn in einer Interaktion zu gebrauchen. Andernfalls würde man möglicherweise aneinander vorbei agieren. Allerdings ist eine allgemeine Begriffsklärung von beliefs problematisch.

Rolka (2006) hat mit Blick auf verschiedene Autoren wie Furinghetti & Pehkonen (2002) oder Thompson (1992) festgestellt, dass in der mathematikdidaktischen Literatur ein Fehlen einer einheitlichen Definition zum Begriff beliefs sichtbar wird. Mit Bezug auf Aguierre und Sperr (2000) erklärt sie, dass es sich bei beliefs um „Überzeugungen und Auffassungen über Mathematik sowie das Lehren und Lernen von Mathematik“ handelt (Rolka 2006, S. 9). Diese recht allgemeine Definition wird im Folgenden weitergehend spezifiziert.

Um die Vielfalt der Verwendungsweisen von beliefs zumindest ansatzweise zu reduzieren, schlägt Törner (2002) eine Zusammenfassung von verschiedenen Verwendungsweisen des Begriffes beliefs vor und listet diese wie folgt auf:

- beliefs zum Wesen der Mathematik allgemein und insbesondere zur Schulmathematik
- beliefs zum Lernen von Mathematik
- beliefs zu den Auswirkungen einer Beschäftigung mit Mathematik
- beliefs zur Rolle des Mathematiklehrers
- beliefs zur Rolle des Schülers
- beliefs zur Rolle des Mathematikers
- beliefs über Mathematik auch bei den Mathematikern

(ebd., S. 109f.)

Wesentlich ist bei der Auflistung, dass sich beliefs im Sinne Törners (2002) konkret auf etwas beziehen. Beispielsweise als Einstellung eines Lernenden in Bezug auf das Wesen von Mathematik oder als Einstellung eines Lehrenden in Bezug auf die Rolle des Schülers.

Pehkohnen und Pietilä (2003) machen in ihrem Artikel ON RELATIONS-

HIPS BETWEEN BELIEFS AND KNOWLEDGE IN MATHEMATICS EDUCATION die vielfältigen Schwierigkeiten bei der Definition des Konstruktes beliefs deutlich und beziehen sich dabei auf verschiedene Autoren:

> „There are several difficulties in defining concepts related to beliefs. Some researchers consider beliefs to be part of knowledge (e.g. Pajares, 1992; Furinghetti, 1996), some think beliefs are part of attitudes (e.g. Grigutsch, 1998), and some consider they are part of conceptions (e.g. Thompson, 1992). There can be differences also depending on the discipline. For example emotions can have different meaning in psychology than in mathematics education (e.g. McLeod, 1992). In addition it is possible that researchers use same terminology although they study different phenomena. This all makes it hard to understand studies and compare them to each other (e.g. Ruffell, Mason & Allen, 1998)" (Pehkohnen und Pietilä 2003, S. 1).

Pehkohnen und Pietilä zeigen zum einen die Schwierigkeiten bei der Verwendung und Definition des Konstruktes beliefs innerhalb der Mathematikdidaktik auf. Zum anderen problematisieren sie die disziplinübergreifende Verwendung, wodurch es möglich ist, dass derselbe Begriff für die Erforschung unterschiedlicher Phänomene genutzt wird.
Kritiker, die diese Schwierigkeiten von beliefs aufgreifen, beziehen sich oftmals auf einen Artikel von Pajares (1992), der den Titel „Teachers´ beliefs and Educational Reserach: Cleaning Up a Messy Construct" (S. 307-332) trägt. Sie bezeichnen beliefs in diesem Sinne als ein solches „Messy Construct". Wobei Pajares (ebd.) am Ende seines Artikels Folgendes erklärt:

> "I suggest that the construct is less messy, far cleaner, and conceptually clearer than it may appear. When they are clearly conceptualized, when their key assumptions are examined, when precise meanings are consistently understood and adhered to, and when specific belief constructs are properly assessed and investigated, beliefs can be, as Fenstermacher (1979) predicted, the single most important construct in educational research." (S. 329)

In diesem Artikel arbeitet Pajares zunächst anhand der Unterscheidung der Begriffe knowledge und beliefs und der jeweiligen Effekte der beiden Konstrukte (s. Pajares 1992, S. 309 f.) die beiden Begriffe knowledge und beliefs heraus. Zum Ende synthetisiert er 16 Kennzeichen von beliefs mithilfe verschiedener Autoren und reflektiert sein eigenes Vorgehen. Beispielhaft seien mit Blick auf die Stabilität von beliefs und ihren Bezug zu Wissen folgende Kennzeichen genannt:

> „1. beliefs are formed early and tend to self-perpetuate, persevering even against contradictions caused by reason, time, schooling, or experience (Abelson, 1979; Brown & Cooney, 1982; Eisenhart et al., 1988; Nisbett & Ross, 1980; Peterman, 1991; Posner et al., 1982; Rokeach, 1968; Van Fleet, 1979).
>
> 6. Epistemological beliefs play a key role in knowledge interpretation and cognitive monitoring (Anderson, 1985; Kitchener, 1986; Nespor, 1987; Nisbett & Ross, 1980; Peterman, 1991; Posner et al., 1982; Schommer, 1990).
>
> 10. The earlier a belief is incorporated into the belief structure, the more difficult it is to alter. Newly acquired beliefs are most vulnerable to change (Abelson, 1979; Clark, 1988; Lewis, 1990; Munby, 1982; Nespor, 1987; Nisbett & Ross, 1980; Posner et al., 1982; Rokeach, 1968)."
>
> (Pajares, 1992, S. 325)

Nach dem ersten Kennzeichen sind beliefs insgesamt eher als starr und nicht veränderbar zu bezeichnen. Sie halten dem Einfluss von Erfahrungen oder Schule stand. Wobei bei neu entwickelten beliefs mit Blick auf das zehnte Kennzeichen noch am ehesten die Möglichkeit bestehen, dass diese sich verändern. Denn je länger ein belief existiert, desto schwieriger ist es, diesen zu verändern. Sie sind zudem untrennbar mit knowledge verbunden, allerdings doch vom Begriff des knowledge unterscheidbar. Insbesondere epistemologische beliefs, also beliefs über die Struktur des Wissens und darüber wie Wissen erworben wird, prägen nach dem sechsten Kennzeichen die Interpretation von Wissen.

Diese weite Fassung von Kennzeichen bezüglich beliefs ermöglicht es, die Vielfalt der Begriffsverwendungen im Konstrukt der beliefs zu subsumieren. Außerdem macht Rolka (s. 2006, S. 23) deutlich, dass obwohl eine einvernehmlich akzeptiertete Definition fehlt, „in der Mathematikdidaktik dennoch vielfältige und effektive Theorien zur Erforschung dieses Konstruktes" existieren. Wie genau Effektivität an dieser Stelle aufgefasst wird, bleibt allerdings unklar. Offensichtlich wird an dieser Stelle, wie auch bei Pajares, dass es sich bei beliefs um ein Konstrukt handelt. Je nach Autor bezieht sich diese Konstruktion des Begriffes beliefs auf individuelle Vorstellungen, Annahmen, Einstellungsstrukturen, Überzeugungen, Einstellungen und Auffassungen über Mathematik und ihr Lehren und Lernen (vgl. Rolka 2006, Törner 2002, Rott, Leuders & Stahl 2014, Philipp 2007, Schoenfeld 1987).
Maaß & Ege (2007, S. 56) erklären dazu, dass sich „im deutschsprachigen Raum [...] die zahlreichen Positionen grundsätzlich darin [unterscheiden, M.M.], welchen Stellenwert sie jeweils kognitiven, affektiven, handlungsrelevanten und weiteren Aspekten von beliefs zuordnen."
Dabei werden beliefs häufig als Einstellungen verstanden: „Man ordnet ihnen [den Einstellungen, M.M.] somit kognitive, affektive und konative Komponenten zu" (vgl. Törner 2002, S. 107; Grigutsch, Raatz & Törner 1998, S. 10; Grigutsch 1996, S. 16, zit n. Maaß & Ege 2007, S. 56).
Ebenfalls eher kognitive und affektive Aspekte werden in der von Rott, Leuders und Stahl (2014, S. 1011) verwendeten Begriffsbezeichnung zu beliefs angesprochen, wenn sie diese als „Konstrukte für menschliche Kognitionen, mit denen man zu beschreiben versucht, welche (i.d.R.) stabilen subjektiven Annahmen Personen über sich und ihre Umwelt haben", bezeichnen. Sie möchten in ihrem Artikel auch der Frage nachgehen, für wie sicher Mathematik angenommen wird, und eröffnen damit eine Debatte über die Sicherheit von Mathematik. Dabei werden grundsätzlich zwei Positionen vertreten. Die eine Position nimmt an, Mathematik sei sicher, da etwa Beweise als das sicherheitsstiftende Merkmal der Mathematik angenommenen werden. In dieser Einstellung bzgl. der Sicherheit von Mathematik wird bei Beweisen ausgehend von Axiomen das zu Zeigende gefolgert. Die Sicherheit wird also ausgehend von den Axiomen deduktiv übertragen.

Wenn also nach der Frage nach Sicherheit von Mathematik gefragt wird, hängt diese Frage auch von der Einstellung gegenüber der Mathematik als solche ab und ist damit individuell geprägt; wobei sich diese Einstellungen innerhalb einer bestimmten Community entwickeln und ausprägen können.
Pehkohnen und Pietilä verstehen beliefs als „subjective, experience-based, often implicit knowledge, and emotions on some matter or state of art“ (2003, S. 2). Im Rahmen ihrer Definition machen sie auch ihre Annahme deutlich, dass beliefs „under continous evaluation and change“ sind (Pehkohnen & Pietilä, 2003 S. 4). Das beliefs sich kontinuierlich und dynamisch verändern können macht auch Thompsen (1992, S. 140) deutlich: „The relationship between beliefs and practice is a dialectic, not a simple cause-and-effect relationship”.

Zudem existiert ein Bezug zwischen beliefs und „subjective knowledge“, das Pehkohnen und Pietilä als „something unique which usually possessed only by the individal self, since it is based on his personal experiences and understanding“ bezeichnen (2003, S. 3).
Sie folgen mit dieser Definition den von Furinghetti & Pehkonen (2002) explizierten Vorschlägen, welche Dinge beim Umgang mit beliefs zu beachten sind:

> “When dealing with beliefs and related terms, it is advisable
> • to consider two types of knowledge (objective knowledge and subjective knowledge)
> • to consider beliefs as belonging to subjective knowledge […]
> • to consider degrees of stability, and to acknowledge that beliefs are open to change […].“

In diesen Vorschlägen und damit letztlich in der von Pehkonen & Pietilä (2003) verwendeten Definition wird auch die von Pajares (1992) vorgeschlagene Unterscheidung von knowledge und beliefs und die Stabilität von beliefs aufgegriffen.
Deutlich wird allerdings bereits an dieser Stelle, dass der Begriff beliefs in jeder Arbeit definiert werden muss. Unterschiede in den jeweiligen Ver-