

Frank Rieg
Reinhard Hackenschmidt
Bettina Alber-Laukant

Finite Elemente Analyse für Ingenieure

Grundlagen und praktische Anwendungen
mit Z88Aurora



6., überarbeitete und erweiterte Auflage

HANSER

Rieg / Hackenschmidt / Alber-Laukant
Finite Elemente Analyse für Ingenieure



Bleiben Sie auf dem Laufenden!

Hanser Newsletter informieren Sie regelmäßig über neue Bücher und Termine aus den verschiedenen Bereichen der Technik. Profitieren Sie auch von Gewinnspielen und exklusiven Leseproben. Gleich anmelden unter

www.hanser-fachbuch.de/newsletter

Mitarbeiter**Mitarbeit bei Auflage**

Dr.-Ing. A. Dörnhöfer, AUDI AG	3
Dr.-Ing. M. Frisch, Universität Bayreuth	4
Dr.-Ing., Dipl.-Math. M. Neidnicht, ThyssenKrupp Rothe Erde GmbH	4
Dr.-Ing. C. Wehmann, Trelleborg Sealing Solutions Germany GmbH	4

Frank Rieg
Reinhard Hackenschmidt
Bettina Alber-Laukant

Finite Elemente Analyse für Ingenieure

Grundlagen und praktische Anwendungen mit Z88Aurora

6., vollständig überarbeitete Auflage

HANSER

Die Autoren:

Prof. Dr.-Ing. Frank Rieg, Ordinarius, Lehrstuhl für Konstruktionslehre und CAD, Universität Bayreuth
Dipl.-Wirtsch.-Ing. Reinhard Hackenschmidt, Akademischer Direktor, Lehrstuhl für Konstruktionslehre und CAD, Universität Bayreuth
Dr.-Ing. Bettina Alber-Laukant, Patentingenieurin, Akademische Oberrätin, Lehrstuhl für Konstruktionslehre und CAD, Universität Bayreuth



Alle in diesem Buch enthaltenen Informationen wurden nach bestem Wissen zusammengestellt und mit Sorgfalt geprüft und getestet. Dennoch sind Fehler nicht ganz auszuschließen. Aus diesem Grund sind die im vorliegenden Buch enthaltenen Informationen mit keiner Verpflichtung oder Garantie irgendeiner Art verbunden. Autoren und Verlag übernehmen infolgedessen keine Verantwortung und werden keine daraus folgende oder sonstige Haftung übernehmen, die auf irgendeine Art aus der Benutzung dieser Informationen – oder Teilen davon – entsteht. Ebenso wenig übernehmen Autoren und Verlag die Gewähr dafür, dass beschriebene Verfahren usw. frei von Schutzrechten Dritter sind. Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek:

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt.

Alle Rechte, auch die der Übersetzung, des Nachdruckes und der Vervielfältigung des Buches, oder Teilen daraus, vorbehalten. Kein Teil des Werkes darf ohne schriftliche Genehmigung des Verlages in irgendeiner Form (Fotokopie, Mikrofilm oder ein anderes Verfahren) – auch nicht für Zwecke der Unterrichtsgestaltung – reproduziert oder unter Verwendung elektronischer Systeme verarbeitet, vervielfältigt oder verbreitet werden.

© 2019 Carl Hanser Verlag München

www.hanser-fachbuch.de

Lektorat: Dipl.-Ing. Volker Herzberg

Herstellung: Björn Gallinge

Coverkonzept: Marc Müller-Bremer, www.rebranding.de, München

Coverrealisation: Max Kostopoulos

Satz: Kösel Media GmbH, Krugzell

Druck und Bindung: Hubert & Co. GmbH & Co. KG BuchPartner, Göttingen

Printed in Germany

Print-ISBN: 978-3-446-45639-6

E-Book-ISBN: 978-3-446-46062-1

Vorwort zur sechsten Auflage

Unser Ziel mit diesem Buch ist wie bereits in der ersten Auflage:

Einem Studenten der Ingenieurwissenschaften ab dem 3. Semester und dem schon im Beruf stehenden Ingenieur ausgewählte Aspekte der Finite Elemente so zu vermitteln, dass er dieses Wissen sofort zur Lösung praktischer Probleme umsetzen kann.

Deshalb sprechen wir schon im Buchtitel von Finite Elemente *Analyse* und nicht von der Finite Elemente Methode – weil dieses riesige Fachgebiet schon lange den etwas zweifelhaften Touch einer Methode hinter sich gelassen hat und heute *das* Ingenieurtool ist, um Tragwerke zu *analysieren*. Natürlich kann man mit diesem Verfahren viel mehr unternehmen, als nur Mechanik zu betreiben – Wärmeflüsse, Elektro- und Magnetfelder, ja eigentlich allgemein Differentialgleichungen und Randwertaufgaben für verschiedene Felder – das alles kann man heute damit lösen.

Aber begonnen hat alles mit der Berechnung von mechanischen Strukturen und wir wollen uns in diesem Werk daher auch auf lineare und nichtlineare Statik, stationäre Wärmeleitung und Eigenschwingungen beschränken. Sehr wesentlich scheint uns der Ingenieuraspekt zu sein – er steht nicht umsonst im Buchtitel: Das Vorgehen wurde in den fünfziger Jahren einigermaßen „intuitiv“ von den Flugzeug-Ingenieuren für statische Berechnungen von Flugzeugstrukturen entwickelt. Es ist ein Verfahren von Ingenieuren für Ingenieure!

Wir gehen daher wie folgt vor: Nach einer wirklich einfachen Darstellung des grundlegenden Vorgehens werden wir die wichtigsten Punkte der Elastizitätstheorie, der Technischen Mechanik und der Thermodynamik, soweit sie die FEA betreffen, abhandeln, um mit diesem Wissen an die Herleitung der Elementsteifigkeitsmatrizen zu gehen. Dieses theoretische Wissen ist tatsächlich unabdingbar, um FE-Rechenprogramme gezielt und gekonnt einsetzen zu können. Sodann betrachten wir den Compilationsprozeß, die Speicherverfahren und das Lösen der Gleichungssysteme, um die Unbekannten zu berechnen.

Damit Sie nun Ihr Wissen praktisch umsetzen können, stehen Ihnen zwei FE-Programme sowie eine umfangreiche Beipielsammlung unter www.feabuch.z88.de zum kostenlosen Download zur Verfügung. Das vom Erstautor programmierte Open-Source Finite-Elemente-Programm für statische Berechnungen Z88® sowie das weit darüber hinausgehende und sehr komfortable Freeware Finite-Elemente-Programm Z88Aurora®, das dann auch nichtlineare Berechnungen, stationäre Wärmeflüsse, Eigenschwingungen und Kontakt beherrscht. Beides sind Vollversionen, mit der *beliebig große Strukturen* gerechnet werden können – die Grenzen werden nur durch Ihren Computer hinsichtlich Hauptspeicher und Plattenplatz und Ihr Vorstellungsvermögen gezogen.

Z88 und Z88Aurora kommen lauffertig für Windows, LINUX sowie Mac OS X. Bei Z88 liefern wir auch direkt die Quellen mit, sodass Sie die theoretischen Aspekte im Programmcode studieren und gegebenenfalls erweitern können. Natürlich können Sie so auch nachvollziehen, wie Speicherverfahren, Gleichungslöser usw. in der Rechenpraxis arbeiten. Z88 ist für den Anwender absolut transparent durch Ein- und Ausgabe mit Textdateien. Es ist also ein FEA-Programm im ganz klassischen und ursprünglichen Sinne. Und wir meinen: Nur mit einem solchen Programm, bei dem Sie jeden Zahlenwert noch selbst kontrollieren können und müssen, können Sie das Grundlegende lernen. Wenn Sie dann das grundlegende Vorgehen verstanden haben, können Sie mit Z88Aurora arbeiten, das bei uns am Lehrstuhl für Konstruktionslehre und CAD mit Förderung durch die Oberfranken-Stiftung entwickelt wurde. Z88Aurora steht in *Look and Feel* den kommerziellen FEA-Programmen nicht nach und erlaubt ein sehr professionelles und zeitgemäßes Arbeiten, direkt von CAD-Daten ausgehend. Auf die bekannten kommerziellen FEA-Programme beziehen wir uns hier nicht, weil es davon kostenlos nur sehr stark eingeschränkte Versionen hinsichtlich der Strukturgrößen gibt, mit denen Sie mehrere der folgenden Beispiele gar nicht rechnen könnten. Und Quellcodes könnten wir dazu auch nicht präsentieren. Im späteren Buchteil kommen viele Praxisbeispiele, die Sie dann nachrechnen sollten. Die Beispiele sind so gewählt, dass sie schrittweise die verschiedenen Aspekte der Berechnung von Tragwerken und mechanischen Strukturen erläutern. Sie können sie ebenfalls unter www.feabuch.z88.de kostenlos downloaden.

Unser Finite Elemente Analyse Buch wurde anlässlich der sechsten Auflage vollständig überarbeitet: Der Theorieteil wurde gegenüber der vierten bzw. fünften Auflage durch folgende Mitarbeiter deutlich erweitert: Dipl.-Ing. D. Billenstein und Dr.-Ing. F. Nützel (Kontaktrechnung), K. Deese, M.Sc. und S. Hautsch, M.Sc. (Topologieoptimierung), C. Dinkel, M.Sc. und F. Hüter, M.Sc. (Wärmeleitung). Der Beispielteil wurde stark erweitert und aktualisiert. Die eben genannten Herren sowie unsere Mitarbeiter P. Diwisch, M.Sc., J. Glamsch, M.Sc., C. Glenk, M.Sc., Dipl.-Ing. C. Kleinschrodt, C. Lange, M.Sc., M. Roppel, M.Sc., T. Weiß, M.Sc., Dipl.-Ing. J. Wittmann und A. Zahn, M.Sc. übernahmen das Programmieren und Testen von Z88Aurora V5 und lasen Korrektur. Den Hauptteil der Programmierung sowie deren Koordination übernahm wieder unser „Chefprogrammierer“ Dr.-Ing. M. Zimmermann. Ihnen allen sei herzlich gedankt.

Dem Hanser-Verlag danken wir für die wie immer vorbildliche Ausführung.

Wir dürfen uns ganz herzlich bei unseren Lesern bedanken, die nach wenigen Jahren eine sechsten Auflage fordern. Auch die Arbeit an diesem Buch war uns wieder ein Vergnügen und wir hoffen, dass Sie großen Nutzen aus diesem Buch ziehen werden.

Frank Rieg, Reinhard Hackenschmidt und Bettina Alber-Laukant
Bayreuth, im Juni 2019

Inhalt

Vorwort zur fünften Auflage	V
1 Einleitung	1
2 Das grundsätzliche Vorgehen	5
3 Grundlagen	21
3.1 Verschiebungen und Verzerrungen	21
3.1.1 Beim Zugstab	21
3.1.2 Bei der Scheibe	23
3.1.3 Im Raum	29
3.1.4 Bei der Platte	30
3.2 Spannungs-Dehnungs-Relationen	32
3.3 Thermo-mechanische Beanspruchung	41
3.4 Eigenschwingung	44
3.5 Nichtlineare Berechnungen	47
3.5.1 Geometrische Nichtlinearitäten	48
3.5.2 Materialnichtlinearitäten	58
3.6 Kontaktberechnung	61
4 Finite Elemente und Elementmatrizen	67
4.1 Grundlagen von Element-Steifigkeits-Matrizen	69
4.2 Materialmatrizen	73
4.3 B-Matrix	74
4.4 Formfunktionen	75
4.5 Integration	86
4.6 Das Aufbringen von Lasten, Lastvektoren	92
4.6.1 Das grundsätzliche Vorgehen	92
4.6.2 Plattenelemente	96
4.6.3 Volumenelemente	98
4.6.4 Ebener und axialsymmetrischer Spannungszustand	109
4.6.5 Streckenlasten bei Balken	111
4.6.6 Gerbergelenke bei Balken	113

4.7	Eine fertige Element-Steifigkeitsroutine	117
4.8	Wahl der Elementtypen	126
4.9	Einige Bemerkungen über Schalen	134
4.10	Elementmatrizen für Thermoanalyse	148
4.11	Elementmatrizen für Schwingungen	150
4.12	Elementmatrizen der nichtlinearen Finite Elemente Analyse	151
5	Compilation, Speicherverfahren und Randbedingungen	163
5.1	Compilation	163
5.2	Speicherverfahren	174
5.2.1	Die Bandspeicherung	176
5.2.2	Das Skyline-Speicherverfahren	180
5.2.3	Das Jennings-Speicherverfahren	182
5.2.4	Speicherung der Nicht-Nullelemente	190
5.2.5	Zusammenfassung der Speicherverfahren	196
5.3	Randbedingungen	197
5.3.1	Einzel-Kräfte und Einzel-Verschiebungen	197
5.3.2	Flächenlasten bei Platten	200
5.3.3	Lagerungen von Platten	202
5.3.4	Randbedingungen bei Temperaturanalysen	203
5.3.5	Randbedingungen bei Schwingungen	207
5.3.6	Randbedingungen bei der nichtlinearen Finite Elemente Analyse ..	209
5.3.7	Randbedingungen bei Kontaktberechnungen	210
6	Gleichungslöser	221
6.1	Direkte Verfahren	222
6.1.1	Das Cholesky-Verfahren	224
6.2	Kondition und Skalierung	226
6.3	Iterative Verfahren	234
6.3.1	Das Jacobi-Verfahren	237
6.3.2	Das Gauß-Seidel-Verfahren	237
6.3.3	Das SOR-Verfahren und das JOR-Verfahren	238
6.3.4	Das Verfahren der Konjugierten Gradienten	239
6.3.5	Das Verfahren der Konjugierten Gradienten mit Vorkonditionierung	240
6.3.5.1	Vorkonditionierung mit SOR	241
6.3.5.2	Vorkonditionierung mit partieller Cholesky-Zerlegung ...	242
6.4	Solver für thermomechanische Probleme	254
6.5	Solver für Schwingungsprobleme	255
6.6	Gleichungslöser für die nichtlineare Finite Elemente Analyse	265

7	Spannungen und Knotenkräfte	269
7.1	Spannungen	269
7.2	Vergleichsspannungen	276
7.3	Knotenkräfte	283
8	Strukturoptimierung	287
8.1	Dimensionierung	288
8.1.1	CAD-basierte Dimensionierung	289
8.1.2	FE-basierte Dimensionierung	289
8.1.3	Anwendungen der Dimensionierung	289
8.2	Formoptimierung	290
8.3	Topologieoptimierung	292
8.3.1	Überblick	292
8.3.2	Topologieoptimierung mit Z88Arion	293
9	Z88: Grundlagen	295
9.1	Allgemeines	295
9.1.1	Die Z88-Element-Bibliothek im Überblick	296
9.2	Das Open Source FE-Programm Z88	308
9.2.1	Die Z88-Module im Überblick	309
9.2.2	Dynamischer Speicher Z88	311
9.2.3	Die Ein- und Ausgabe von Z88:	314
9.3	Das Freeware FE-Programm Z88Aurora	318
9.3.1	Die Z88Aurora-Module im Überblick	319
9.3.2	Speicherbedarf Z88Aurora	321
9.3.3	Die Ein- und Ausgabe von Z88Aurora	323
10	Die Z88-Module	325
10.1	Der lineare Solver Z88R	325
10.1.1	Z88R: Der direkte Cholesky Solver	326
10.1.2	Z88R: Der Sparsematrix Solver	327
10.1.3	Z88R: Der direkte Sparsematrix Solver in Z88Aurora	329
10.1.4	Welchen Solver nehmen?	330
10.1.5	Erläuterungen zur Spannungsberechnung	330
10.1.6	Erläuterungen zur Knotenkraftberechnung	331
10.2	Der Netzgenerator Z88N	331
10.2.1	Vorgehensweise	331
10.2.2	Mathematische Grundlagen	333
10.2.3	Beschreibung eines einfachen Netzgenerators	337
10.2.4	Beschreibung des Netzgenerators Z88N	344
10.3	Der Superelementgenerator in Z88Aurora	347
10.3.1	Verwendung von Z88N in Z88Aurora	348
10.3.2	Tetraederverfeinerer Z88MTV	348
10.3.3	2D-Schalenaufdicker Z88MVS	350

10.4	Das OpenGL Plotprogramm Z880 bei Z88 V150S bzw. der Postprozessor von Z88Aurora	350
10.5	Der DXF-Konverter Z88X	354
10.6	Der 3D-Konverter Z88G	363
10.7	Der Ansys-Konverter Z88ASY in Z88Aurora	366
10.8	Der Abaqus-Konverter Z88INP in Z88Aurora	368
10.9	Das Cuthill-McKee Programm Z88H	369
10.10	Der Step-Import Z88GEOCON (Step) in Z88Aurora	371
10.11	Der Stl-Konverter Z88GEOCON (Stl) in Z88Aurora	373
10.12	Der Tetraedervernetzer in Z88Aurora	374
10.13	Das Pickingmodul in Z88Aurora	375
10.14	Die Materialdatenbank in Z88Aurora	377
10.15	Die Randbedingungen in Z88Aurora	377
10.16	Die Benutzerunterstützung Spider in Z88Aurora	378
10.17	Das Thermomodul in Z88Aurora	379
10.18	Das Eigenschwingungsmodul in Z88Aurora	382
10.19	Das Modul Z88NL für nichtlineare Berechnungen in Z88Aurora	385
10.20	Das Modul Z88Kontakt für Kontaktberechnungen	388
11	Eingabe-Dateien erzeugen	393
11.1	Allgemeines	393
11.2	Allgemeine Strukturdaten Z88I1.TXT	395
11.3	Randbedingungsdatei Z88I2.TXT	396
11.4	Flächenlast-Datei Z88I5.TXT	399
11.5	Materialsteuerdatei Z88MAT.TXT	404
11.6	Materialdatei *.TXT	405
11.7	Elementparameterdatei Z88ELP.TXT	407
11.8	Integrationsordnungs-Datei Z88INT.TXT	408
11.9	Netzgenerator-Datei Z88NI.TXT	410
11.10	Solversteuerdatei Z88MAN.TXT	414
11.11	Vergleich der Z88-Dateiformate	417
12	Die Finiten Elemente von Z88 und Z88Aurora	419
12.1	Hexaeder Nr. 1 mit 8 Knoten	419
12.2	Balken Nr. 2 mit 2 Knoten im Raum	422
12.3	Scheibe Nr.3 mit 6 Knoten	424
12.4	Stab Nr.4 im Raum	425
12.5	Welle Nr. 5 mit 2 Knoten	427
12.6	Torus Nr. 6 mit 3 Knoten	428
12.7	Scheibe Nr. 7 mit 8 Knoten	430
12.8	Torus Nr. 8 mit 8 Knoten	432
12.9	Stab Nr. 9 in der Ebene	434
12.10	Hexaeder Nr. 10 mit 20 Knoten	435
12.11	Scheibe Nr. 11 mit 12 Knoten	438
12.12	Torus Nr. 12 mit 12 Knoten	440

12.13	Balken Nr. 13 in der Ebene	442
12.14	Scheibe Nr. 14 mit 6 Knoten	443
12.15	Torus Nr. 15 mit 6 Knoten	446
12.16	Tetraeder Nr. 16 mit 10 Knoten	448
12.17	Tetraeder Nr. 17 mit 4 Knoten	451
12.18	Platte Nr. 18 mit 6 Knoten	454
12.19	Platte Nr. 19 mit 16 Knoten	456
12.20	Platte Nr. 20 mit 8 Knoten	459
12.21	Schale Nr. 21 mit 16 Knoten	461
12.22	Schale Nr. 22 mit 12 Knoten	463
12.23	Schale Nr. 23 mit 8 Knoten	465
12.24	Schale Nr. 24 mit 6 Knoten	467
12.25	Balken Nr. 25 mit 2 Knoten im Raum	469
12.26	Element/Solverübersicht Z88Aurora V5	472
13	Beispiele	473
13.1	Schraubenschlüssel aus Scheiben Nr. 7	481
13.1.1	Mit Z88V15	482
13.1.2	Mit Z88Aurora	490
13.2	Kranträger aus Stäben Nr. 4	501
13.2.1	Mit Z88V15	502
13.2.2	Mit Z88Aurora	507
13.3	Getriebewelle mit Welle Nr. 5	512
13.3.1	Mit Z88V15	513
13.3.2	Mit Z88Aurora	517
13.4	Biegeträger mit Balken Nr. 13	521
13.4.1	Mit Z88V15	522
13.4.2	Mit Z88Aurora	526
13.5	Plattensegment aus Hexaedern Nr. 1 und Nr. 10	530
13.5.1	Mit Z88V15	530
13.5.2	Mit Z88Aurora	537
13.6	Rohr unter Innendruck, Scheibe Nr. 7	539
13.6.1	Mit Z88V15	540
13.6.2	Mit Z88Aurora	547
13.7	Rohr unter Innendruck, Tori Nr. 8	549
13.7.1	Mit Z88V15	550
13.7.2	Mit Z88Aurora	556
13.8	Zweitaktmotor-Kolben	558
13.8.1	Mit Z88V15	558
13.8.2	Mit Z88Aurora	562
13.9	RINGSPANN-Scheibe und Tellerfeder	567
13.9.1	Mit Z88V15	569
13.9.2	Mit Z88Aurora	572
	13.9.2.1 RINGSPANN-Scheibe	572
	13.9.2.2 Tellerfeder	573

13.10	Flüssiggas-Tank	574
13.10.1	Mit Z88V15	574
13.10.2	Mit Z88Aurora	578
13.11	Motorrad-Kurbelwelle	580
13.11.1	Mit Z88V15	582
13.11.2	Mit Z88Aurora	587
13.12	Drehmoment-Messnabe	591
13.12.1	Mit Z88V15	592
13.12.2	Mit Z88Aurora	593
13.13	Ebene Rahmen	594
13.13.1	Mit Z88V15	595
13.13.2	Mit Z88Aurora	615
13.14	Zahnrad	617
13.14.1	Mit Z88V15	618
13.14.2	Mit Z88Aurora	623
13.15	3D-Schraubenschlüssel	627
13.15.1	Mit Z88V15	627
13.15.2	Mit Z88Aurora	639
13.16	Kraftmesselement, Scheiben Nr. 7	641
13.16.1	Mit Z88V15	641
13.16.2	Mit Z88Aurora	652
13.17	Kreisplatte, Platten Nr. 20	653
13.17.1	Mit Z88V15	655
13.17.2	Mit Z88Aurora	659
13.18	Rechteckplatte mit 16-Knoten Platten Nr. 19	660
13.18.1	Mit Z88V15	660
13.18.2	Mit Z88Aurora	667
13.19	Viertaktmotor-Kolben mit Tetraedern Nr. 16	668
13.19.1	Mit Z88V15	669
13.19.2	Mit Z88Aurora	673
13.20	Automotor-Lüfterrad	676
13.20.1	Mit Z88V15	678
13.20.2	Mit Z88Aurora	679
13.21	Dieselskolben	682
13.21.1	Mit Z88V15	683
13.21.2	Mit Z88Aurora	686
13.22	Berechnung einer Formzahl	686
13.22.1	Mit Z88V15	687
13.22.2	Mit Z88Aurora	693
13.23	Zahnfußbeanspruchung	694
13.23.1	Mit Z88V15	695
13.23.2	Mit Z88Aurora	698
13.24	Vierkantrohr, Schale Nr. 24	700
13.24.1	Mit Z88V15	702
13.24.2	Mit Z88Aurora	703

13.25 U-Boot aus Schalen Nr.22	707
13.26 Zahnrad aus Tetraedern Nr.17	712
13.27 Schwingende Trommel	715
13.28 Modalanalyse Kurbelwelle	719
13.29 Thermomechanische Analyse eines Löffels	722
13.30 Thermische Analyse eines Viertakt-Motorkolbens	728
13.31 Berechnung der Konvektion an einem Rippenbehälter	732
13.32 Nichtlineare Berechnung einer Tellerfeder	737
13.33 Nichtlineare Berechnung eines Scharniers	741
13.34 Materialplastizität einer Kugelkupplung	745
13.35 Import einer STL-Geometrie und Umwandlung in ein Schalenmodell	753
13.36 Trimmen eines Bauteils	756
13.37 Kontaktanalyse einer Zahnstange	759
13.38 Kontaktanalyse eines Augenstabes	765
13.39 Topologieoptimierung eines Schraubenschlüssels	770
13.40 Optimierung eines Radträgers mit dem SKO-Verfahren	774
Quellen und weiterführende Literatur	779
Index	787

1

Einleitung

Während viele Vorgehensweisen in der Technik oft jahrhundertealt sind, und beispielsweise die Elastizitätstheorie praktisch geschlossen im 19. Jahrhundert entwickelt wurde, entstand die sog. Methode der Finiten Elemente erst mit dem Aufkommen der ersten Digitalrechner in Deutschland, in den Vereinigten Staaten und in England während des Zweiten Weltkriegs. Diese ersten Computer, der deutsche *Zuse Z3* von 1941, aber besonders der amerikanische *Harvard Mark I*, dienten zum Berechnen von Geschosßbahnen für die Artillerie, vgl. /33/. Gleichzeitig entstand ein neuer Typ von Flugzeug, der düsengetriebene Jet. Dessen bisher nicht gekannte Geschwindigkeiten sorgten für ganz neue Probleme – neuartige Tragflügelkonzepte wie den Pfeilflügel, extrem leichte und dennoch sehr stabile Zellen, die auch in großen Höhen nicht versagen und die Strahltriebwerke selbst.

Es kam daher nicht von ungefähr, dass in den 50er Jahren bei *Boeing* in Seattle die Ingenieure *J. Turner* und *R. Clough* die Matrizenkraftmethode und die Matrizenverschiebungsmethode für die statische Berechnung von Zellen und Flügeln entwickelten. Schon Ende der 40er Jahre hatte *J. Argyris* (der später an der TU Stuttgart wirkte und einer der Väter der Finite Elemente Methode ist) in England nachgewiesen, dass man Kontinua durch Zerlegen in kleinere Teilbereiche in vereinfachter Form beschreiben kann. Dem gingen die Überlegungen von u. a. *Hrenikoff* voraus, Kontinua in eine Anordnung von Stäben bzw. Balken zu zerlegen, um damit ebene Spannungszustände und Plattenprobleme abzubilden – in der Literatur „Framework method“ oder „Gitterrost-Verfahren“ genannt. Der erste, der den Begriff *Finite Elemente Methode* auf einer Konferenz öffentlich benutzte, scheint *R. Clough* in 1960 gewesen zu sein.

Wir deuteten schon oben an, dass es ursprünglich ein *Matrizenkraftverfahren* und ein *Matrizenverschiebungsverfahren* gegeben hat. Während bei dem Ersten die gesuchten Unbekannten die Kräfte sind – eigentlich das Vorgehen, das auch in der klassischen Technischen Mechanik üblich ist – sind die Unbekannten beim zweiten Vorgehen die Verschiebungen des Systems – auf den ersten Blick eher ungewöhnlich. Lange wurde in Praxis und Wissenschaft darüber gestritten, welche von beiden Vorgehensweisen nun die bessere sei. Heute ist diese Frage entschieden: Alle Großprogrammsysteme arbeiten ausschließlich nach dem Verschiebungsverfahren, weil es sich viel einfacher und geradliniger schematisieren und programmieren lässt.

In der Anfangszeit konnten nur wenige „Privilegierte“ überhaupt Finite Elemente Berechnungen ausführen, denn nur sie hatten Zugang zu einem Großcomputer, der damals für die meisten Universitäten und Firmen vollkommen unbezahlbar war. Als der Erstautor 1978 seine

Diplomarbeit, die Berechnung einer Rennwagenkarosserie für die Fa. Porsche mit der Finite Elemente Methode, anfertigte, da stand wenigstens ein brauchbares FE-Programm, das *SAP IV von Wilson* und *Bathe*, zur Verfügung. Es lief im Batchmode auf der für die damalige Zeit sehr großen Computeranlage der TH Darmstadt, einer IBM 370/168. Die Eingabedaten wurden nicht etwa an einem Terminal eingegeben, sondern auf Lochkarten, die man mit einem IBM-Lochkartenstanzer selbst lochen musste. Irgendwann war der Eingabedatensatz fertig gelocht, und man konnte ihn im Rechenzentrum abgeben. Nachts – und zwar nur nachts wegen der „enormen“ Kernspeicheranforderung von rd. 700 KByte – wurde dann *SAP IV* („Structural Analysis Program“) gestartet und man konnte vielleicht am nächsten Tag die Ergebnisse auf zentimeterdicken Papierstapeln per Schnelldrucker gedruckt, abholen. Interaktive Grafik? Völlig unbekannt. Plotten auf Papier konnte man, immerhin, aber dazu war ein weiteres Programm *SAPOST* nötig, das seine Platanweisungen über Lochkarten bekam.

Längst ist es anders geworden, und wenn man heute Bilder von Mainframes selbst der frühen 80er Jahre betrachtet, dann meint man, diese Bilder wären auf einem anderen Stern aufgenommen. Gerade der *Personal Computer* hat hier in den 80er Jahren Bahnbrechendes geleistet. Schon in der Mitte der 80er Jahre konnte man ganz beachtliche FE-Strukturen mit PCs /27/ berechnen, wobei die Grenze damals bei einem nutzbaren Hauptspeicher von ungefähr 500 KByte lag – diktiert durch DOS. In 1985 startete der Erstautor mit der Entwicklung seines FE-Programms *Z88* auf einem IBM AT, damals noch als FORTRAN-Version /28/. Anfang der 90er Jahre zeichnete sich der Siegeszug von Windows mit der Version 3.0 ab, und der Erstautor schrieb das bisher ausschließlich in FORTRAN 77 codierte *Z88* komplett in C um /15/, weil man damals nur mit der Programmiersprache C vernünftig Windows-Programme erstellen konnte.

Die Situation heute kennt jeder: Jeder Billig-PC vom Lebensmittel-Discounter hat unendlich mehr Power – und zwar in Zehnerpotenzen gerechnet – als die IBM 370 Mainframe vor über 40 Jahren, und jeder, wirklich jedermann, kann heute umfangreiche Finite Elemente Berechnung auf seinem PC zuhause durchführen.

Wie wir im zweiten Kapitel sehen werden, ist die Methode der Finiten Elemente – oder nach unserer Meinung besser *Finite Elemente Analyse*, denn man rechnet etwas nach, man analysiert – im Gegensatz zum methodischen Konstruieren, das eine Synthese ist – im Prinzip außerordentlich einfach! Das Besondere daran ist eigentlich nur das streng formalisierte Vorgehen, was so geeignet für den Computereinsatz ist. Wir kommen im zweiten Kapitel bei der Vorstellung des grundlegenden Vorgehens ganz bewusst von der Elastostatik her und arbeiten zunächst nur mit Stäben und Balken. Stäbe und Balken sind aber natürlich keine 2D- bzw. 3D-Kontinua, und mancher Leser wird darüber die Nase rümpfen und den gezeigten Weg für dilettantisch halten.

Aber halt – um das grundlegende Vorgehen des *Matrizenverschiebungsverfahrens* zu zeigen, sind diese einfachen (Struktur-) Elemente tatsächlich sehr geeignet. Denn Finite Elemente für den ebenen Spannungszustand, den ebenen Verzerrungszustand, den axialsymmetrischen Spannungszustand, für die Plattenbiegung und für den räumlichen Spannungszustand – um die wichtigsten zu nennen – werden ganz genauso ins Verfahren integriert! Tatsächlich sind auch alle Computerroutinen für das Aufstellen von Element-Steifigkeitsmatrizen ganz ähnlich aufgebaut, wie der Leser jederzeit bei unserem Buch anhand der Programmquellen für *Z88* in C nachprüfen kann. Vergleichen Sie beispielsweise die Subroutine *SHEI88.C* für krummlinige 8-Knoten-Serendipity-Scheiben und -Tori mit der Routine

HEXA88.C für krummlinige 20-Knoten-Serendipity Hexaeder für den allgemeinen räumlichen Spannungszustand.

An dem Wort Matrizenverschiebungs-Verfahren erkennt man übrigens alle relevanten Aspekte: Wir haben es mit teilweise riesigen *Matrizen* zu tun, es werden *Verschiebungen* berechnet, und zwar mit einem schematisierten Verfahren.

Sie ahnen es schon: Man kann sich diesem Verfahren entweder von der Ingenieursseite – wie wir es im zweiten Kapitel unternehmen – oder von der streng mathematischen Seite her nähern. Welchen Weg man wählt, hängt sicher vom eigenen Werdegang und den eigenen Vorkenntnissen ab, aber auch, welches Ziel man eigentlich verfolgen will. Da das Verfahren der Finiten Elemente von Ingenieuren für das Lösen von Ingenieursproblemen entwickelt wurde, halten wir es für angemessen, das Grundlegende ebenfalls aus Ingenieurssicht herzuleiten. Das hat außerdem den Vorteil, dass der Leser außer den üblichen Mathematikkenntnissen eines Abiturienten nur noch zusätzlich Grundkenntnisse der Matrizenrechnung haben sollte. Was allerdings unverzichtbar ist, ist solides Wissen auf dem Gebiet der „starr“ Statik und der Elastostatik. Wer hier nicht sattelfest ist, wird am Arbeiten mit jedwedem FE-Programm – nicht nur mit Z88 oder Z88Aurora – sehr bald auf die Nase fallen und sich auch gegebenenfalls den Hals brechen. Warum? Weil es beim Arbeiten mit der Finite Elemente Analyse eigentlich zwei Hindernisse gibt – und die sind systemimmanent. Die erste Falle: Das eigentliche Erzeugen des Finite Elemente Netzes – wie grob oder wie fein, welche Elementtypen – das ist sehr viel Erfahrung und Training. Die zweite Falle: Die Wahl der Randbedingungen, also wie und wo Lager anbringen, Kräfte aufgeben und dergleichen. Auch hier ist Erfahrung im Spiel, aber zunächst sind solide Mechanikkenntnisse gefragt: Ein statisch unterbestimmtes System bricht auch beim teuersten Rechenprogramm in sich zusammen.

Aber auch für Ingenieure kann das Herangehen an die Finite Elemente Analyse aus streng mathematischer Sicht durchaus sehr spannend und sinnvoll sein. Tatsächlich sind elastostatische Probleme durch Extremalprinzipien darstellbar, z. B. durch das Prinzip vom Minimum der gesamten potentiellen Energie: Unter allen Verschiebungszuständen, die den kinematischen Randbedingungen genügen, minimiert der tatsächliche Gleichgewichtszustand die potentielle Energie. Diese Funktionale der potentiellen Energie, die sich für Stäbe, Balken, Torsionsstäbe, Scheiben, Platten etc. aufstellen lassen, müssen also stationär werden. Das kann mit der Methode von *Ritz* erfolgen. Und die gewählten Funktionen des Ritz'schen Verfahrens sind durchaus mit den Ansatz- bzw. Formfunktionen der Finiten Elemente Analyse gedanklich verwandt. Eine der herausragenden Quellen für die Herleitung der diversen Elementsteifigkeitsmatrizen über Funktionale ist das Buch von *Schwarz /6/*, das dem mathematisch interessierten Leser sehr empfohlen werden kann.

Allerdings möchten wir wieder daran erinnern, dass man sich die Finite Elemente Analyse nicht durch theoretische Betrachtungen allein erschließen kann. Nur durch umfangreiche Übung und Arbeiten am Computer wird man es auf diesem Gebiet zu einer gewissen Meisterschaft bringen. Es erscheint uns daher wichtig, dass Sie die Beispiele des Buches selbst nachvollziehen, sinnvoll abändern und ergänzen – und zwar am Computer. Daher haben wir die folgenden theoretischen Kapitel relativ kurz gehalten, damit Sie möglichst bald an die praktischen Aspekte kommen. Wo wir allerdings der Meinung waren, dass bei anderen Autoren bestimmte Fragen, z. B. die Elastizitätstheorie, eher etwas zu kurz kommen, haben wir bewusst keine Kürzungen in Kauf genommen.

Dieses von uns sehr empfohlene Üben am Computer können Sie mit den beiden downloadbaren Programmen Z88 Version 15 und Z88Aurora Version 5 vornehmen. Sie können so den Quellcode studieren und ggf erweitern oder abändern, was, wenn man dem theoretischen Unterbau der FEA wirklich verstehen will, äußerst sinnvoll ist. Zum reinen Durcharbeiten unserer vielen Beispiele brauchen Sie sich selbstverständlich nicht mit den Interna der Programmierung zu befassen; Z88 steht passend für die verschiedenen Betriebssysteme ladefertig auf www.feabuch.z88.de und dazu gehört ein etwa 200-seitiges Handbuch im PDF-Format, dem Sie Hinweise zur Installation und zum Betrieb entnehmen können. Eine Kurzfassung der Bedienungsanleitung finden Sie für einen ersten Start hier in den Kapiteln 9 und 10. Z88 ist ein ganz klassisches und ursprüngliches FE-Programm, das über Ein- und Ausgabedateien gesteuert wird. Wie alle derartigen klassischen Programme ist es zum Studium des grundlegenden Vorgehens sehr geeignet – aber in der täglichen Arbeit etwas hölzern und nicht wirklich komfortabel.

Daher kamen unsere ehemaligen Mitarbeiter Dr.-Ing. B. Roith, Dr.-Ing. A. Troll und Prof. Dr.-Ing. M. Zimmermann in 2009 auf die Idee, auf die Strukturen des oben genannten Z88 aufbauend einen sehr zeitgemäße Bedienoberfläche mit Namen Z88Aurora zu schaffen, deren besonderer Fokus darauf liegt, direkt CAD-Dateien im STEP- oder STL-Format einzulesen, das Netz zu erzeugen und sodann interaktiv mit Randbedingungen und Materialien versehen zu können. Sehr schnell schlossen sich weitere Mitarbeiter des Lehrstuhls den Arbeiten an. Im Juni 2010 kam diese erste Version Z88Aurora heraus und wurde sofort ein voller Erfolg. Sehr bald begann Dr.-Ing. B. Roith mit den Arbeiten an der Nachfolgeversion; seine Nachfolge trat Dipl.-Ing. M. Zimmermann an, der das System in seiner jetzigen Version 5 zusammen mit Dr.-Ing. B. Alber-Laukant, J. Glamsch, M.Sc., K. Deese, M.Sc. und F. Rieg weitgehend gestaltet hat. Sie werden diese neue Version 5 von Z88Aurora als sehr angenehm und intuitiv im Umgang empfinden, wozu auch ein einmaliges Feature beiträgt, die sog. *Spider-Help* von Dr.-Ing. B. Alber-Laukant und Dr.-Ing. B. Roith. *Spider-Help* führt Sie durch den Workflow einer Finite Elemente Analyse.

Es war sofort klar, dass wir die Neuentwicklung von Z88Aurora in unser FEA-Buch integrieren mussten; obwohl wir Z88Aurora V5, sehr umfangreichen Tests unterzogen haben, wissen Sie, dass Software nie fehlerfrei sein kann. Wenn Sie also Fehler oder Unregelmäßigkeiten entdecken, zögern Sie nicht, uns zu benachrichtigen. Oder schauen Sie auf unserer Internetseite www.z88.de, ob es inzwischen vielleicht Programm-Updates gibt. Auf unserer Internetseite werden Sie auch die Versionen für LINUX und Mac OS X sowie die englische Programmversion finden.

Und nun: Beginnen Sie mit dem *grundsätzlichen Vorgehen!*

2

Das grundsätzliche Vorgehen

Wir werden nun in ganz kurzer Form das Grundlegende der *Finite Elemente Analyse* zeigen und werden auch ganz bewusst eine Reihe von Sachverhalten einfach annehmen, ohne sie zunächst herzuleiten. So behält man den Überblick und sieht nach der Lektüre weniger Seiten, wie einfach an sich das Vorgehen ist. Dass dahinter oft anspruchsvolle Theorien und mathematische Verfahren lauern, sei nicht verschwiegen, aber das werden wir dann, nachdem wir den Gesamtüberblick gewonnen haben, ganz entspannt in den Kapiteln 3 bis 8 betrachten – wobei man diese Kapitel tatsächlich für eine erste Lektüre überspringen kann. Wenn Sie uns über die nächsten Seiten folgen, dann haben Sie in der Tat die *Finite Elemente Analyse* im Prinzip verstanden! Alles, was dann kommt, sind nur noch Verfeinerungen und streng genommen Spezialaspekte. Sagen Sie selbst: Ist das nicht hoch motivierend?

Betrachten wir zu Beginn eine ganz einfache Zugfeder aus Stahl, die wir am einen Ende einspannen und am anderen Ende belasten. Das Belasten können wir prinzipiell auf zwei Arten durchführen: Entweder wir geben eine bekannte Kraft von z. B. 100 N auf oder wir ziehen die Feder um einen bestimmten Weg von z. B. 5 mm länger. Für eine Feder gilt das Hooke'sche Gesetz $F = K \cdot U$, das heißt, die Federkraft F ist das Produkt aus Federsteifigkeit K und Federweg U .

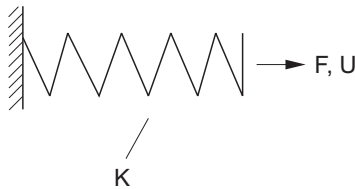
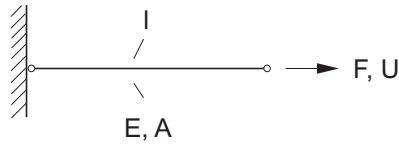


Bild 2-1: Das Hooke'sche Gesetz

Nun verhalten sich die allermeisten Gegenstände des täglichen Lebens wie diese Schraubenfeder, d. h. sie verformen sich linear-elastisch: Kraft F und Weg U sind einander proportional. Jede noch so kleine Kraft bedingt einen Weg bzw. eine Verschiebung bzw. eine Verformung. So hat ein Seil oder ein Zugstab der Länge ℓ , des Querschnitts A und des Elastizitätsmoduls E die Kraft-Weg Beziehung:

$$F = \frac{E \cdot A}{\ell} \cdot U$$

**Bild 2-2:** Der Zugstab

Wenn man setzt:

$$K = \frac{E \cdot A}{\ell}$$

dann erkennt man wieder das Hooke'sche Gesetz

$$F = K \cdot U \quad \text{mit} \quad K = \frac{E \cdot A}{\ell}$$

Jetzt definieren wir einen Stab ganz allgemein, indem wir an seinem linken Ende eine Verformung U_1 bzw. eine Kraft F_1 und an seinem rechten Ende eine Verformung U_2 bzw. eine Kraft F_2 aufgeben:

**Bild 2-3:** Der allgemein definierte Stab

Bilden wir das Kräftegleichgewicht, dann ist:

$$F_1 = K \cdot U_1 - K \cdot U_2$$

$$F_2 = K \cdot U_2 - K \cdot U_1$$

Dieser Gleichungssatz dargestellt in Matrizen-Schreibweise ergibt:

$$\begin{bmatrix} K & -K \\ -K & K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix}$$

Beweis: Durch Ausmultiplizieren erhält man:

$$K \cdot U_1 - K \cdot U_2 = F_1$$

$$-K \cdot U_1 + K \cdot U_2 = F_2$$

Den Ausdruck

$$\begin{bmatrix} K & -K \\ -K & K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} EA/\ell & -EA/\ell \\ -EA/\ell & EA/\ell \end{bmatrix}$$

nennen wir die Element-Steifigkeitsmatrix. Sie gilt hier für einen waagrecht liegenden Stab in der Ebene. Das Gleichungssystem ist normale Matrix-Schreibweise. Dasselbe in symbolischer Matrix-Schreibweise (Matrizen und Vektoren in symbolischer Darstellung werden wir ab jetzt **fett-kursiv** schreiben):

$$K U = F$$

Das ist schon wieder das Hooke'sche Gesetz! Nur stehen statt der Skalare nun Matrizen!

Rechenbeispiel 1

Wir geben auf einen Stab Kräfte F_1 und F_2 :

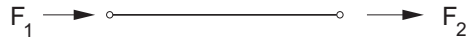


Bild 2-4: Kräfte an einem Stab

mit

$$F_1 = -1.000 \text{ N}$$

$$F_2 = +1.000 \text{ N}$$

Der Stab habe folgende Kennwerte:

$$\text{Länge } \ell = 1.000 \text{ mm}$$

$$\text{Elastizitätsmodul } E = 200.000 \text{ N/mm}^2$$

$$\text{Querschnittsfläche } A = 100 \text{ mm}^2$$

Damit wird K :

$$K = \frac{200.000 \cdot 100}{1.000} = 20.000 \text{ N/mm}$$

Diese Zahlenwerte eingesetzt ergibt:

$$\begin{bmatrix} 20.000 & -20.000 \\ -20.000 & 20.000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.000 \\ +1.000 \end{bmatrix}$$

Ausmultiplizieren des Gleichungssystems:

$$20.000 \cdot U_1 - 20.000 \cdot U_2 = -1.000 \text{ (B1)}$$

$$-20.000 \cdot U_1 + 20.000 \cdot U_2 = +1.000 \text{ (B2)}$$

Um das 2×2 Gleichungssystem zu lösen, addieren wir die Gleichung (B1) und (B2), um eine der beiden Unbekannten zu eliminieren:

$$0 + 0 = 0$$

Das Ergebnis der Addition ist zwar richtig, es liefert aber keine Lösung. Warum? Weil die Gleichungen linear abhängig sind! Z.B. Gleichung (B2) mit -1 multiplizieren liefert (B1). Wann tritt so etwas auf? *Wenn ein System statisch unterbestimmt ist!*

1. REGEL FEA

Nie statisch unterbestimmt. Immer statisch bestimmt (kinematisch bestimmt) oder beliebig statisch überbestimmt!

Also Festlegen einer Randbedingung:

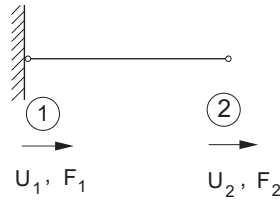


Bild 2-5: Wenn am Punkt 1 ein Festlager ist, dann ist die Verschiebung $U_1 = 0$

F_1 kann als äußere Kraft nicht mehr aufgegeben werden, denn das Lager fängt alles ab! Es kann also nur noch aufgegeben werden:

U_2 eine Verschiebung oder
 F_2 eine äußere Kraft

Nun kommt eine sehr grundlegende Unterscheidung, wie wir die Aufgabe angehen: Welche Lösungen suchen wir, Kräfte oder Verschiebungen? Das uns schon bekannte Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} K & -K \\ -K & K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{K} \mathbf{U} = \mathbf{F}$$

würde in der Mathematik so lauten: $\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Das ist die übliche Darstellung eines linearen Gleichungssystems: \mathbf{A} ist die Koeffizientenmatrix, \mathbf{x} der Lösungsvektor, also die Unbekannten, und \mathbf{b} ist die Rechte Seite. Daher:



Vorgabe der äußeren Kräfte und Berechnen der Verschiebungen =
Verschiebungsgrößen-Verfahren

Es geht aber auch anders:

$$\mathbf{K}^{-1} \mathbf{F} = \mathbf{U}$$

$$\mathbf{A}^{-1} \mathbf{b} = \mathbf{x}$$

Dabei ist \mathbf{A}^{-1} die Inverse von \mathbf{A} . Daher:



Vorgabe der Verschiebungen und Berechnen der Kräfte =
Kraftgrößen-Verfahren

Heute arbeiten praktisch alle FEA-Systeme nach dem Verschiebungsgrößen-Verfahren:

2. REGEL FEA

FEA = Berechnen der Verschiebungen des Systems

Unsere Aufgabe war:

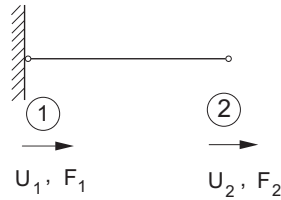


Bild 2-6: Festlagerung an Punkt 1

$$\begin{bmatrix} K & -K \\ -K & K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix}$$

Dabei sind: K die Gesamtsteifigkeitsmatrix, U die Verschiebungen, d. h. die Unbekannten des Systems und F die äußeren Kräfte.

Die Gesamt-Steifigkeitsmatrix K entspricht, weil nur ein einziges Element, der Stab, vorhanden ist, dessen Element-Steifigkeitsmatrix K^{Stab} .

Die Randbedingung ist: $U_1 = 0$, eine sog. *homogene Randbedingung!* Diese homogenen Randbedingungen werden im Gleichungssystem wie folgt berücksichtigt:



VORGEHEN 1: EINBAU HOMOGENE RANDBEDINGUNG $U_j = 0$

V1.1: Setze in K Zeile j zu 0

V1.2: Setze in K Spalte j zu 0

V1.3: Setze Diagonalelement j in K zu 1

V1.4: Setze Kraft F_j in F zu 0

Also:

V1.1 und V1.2

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix}$$

V1.3

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix}$$

V1.4

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ F_2 \end{bmatrix}$$

Ausrechnen ergibt:

$$1 \cdot U_1 + 0 \cdot U_2 = 0 \rightarrow U_1 = 0$$

$$0 \cdot U_1 + K \cdot U_2 = F_2 \rightarrow U_2 = \frac{F_2}{K}$$

Wie werden die eigentlichen Stabkräfte, also die inneren Kräfte berechnet? Bis jetzt wurden ja nur äußere Kräfte betrachtet!



VORGEHEN 2: KNOTENKRÄFTE BERECHNEN

V2: Multipliziere die jeweilige Element-Steifigkeitsmatrix des gesuchten Elements mit den berechneten Verschiebungen!

Also:

$$\begin{bmatrix} K & -K \\ -K & K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ F_2/K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -F_2 \\ F_2 \end{bmatrix}$$

Das sind die Stabkräfte am Element, also innere Kräfte. *Actio = Reactio!*

Rechenbeispiel 2

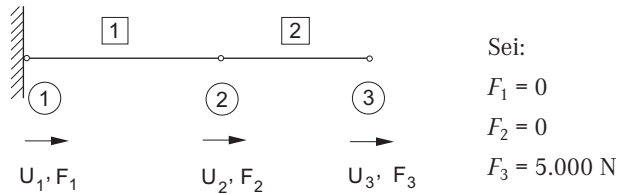


Bild 2-7: Beispiel mit zwei Stäben

Stab 1: $\ell_1 = 500 \text{ mm}$, $E_1 = 206.000 \text{ N/mm}^2$, $A_1 = 100 \text{ mm}^2$

Stab 2: $\ell_2 = 400 \text{ mm}$, $E_2 = 206.000 \text{ N/mm}^2$, $A_2 = 40 \text{ mm}^2$

daher: $K_1 = 41.200 \text{ N/mm}$, $K_2 = 20.600 \text{ N/mm}$

Damit werden die Elemente-Steifigkeitsmatrizen:

$$\text{Erster Stab} = FE_1: \begin{bmatrix} K_1 & -K_1 \\ -K_1 & K_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 41.200 & -41.200 \\ -41.200 & 41.200 \end{bmatrix} = \mathbf{K}_1^e$$

$$\text{Zweiter Stab} = FE_2: \begin{bmatrix} K_2 & -K_2 \\ -K_2 & K_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20.600 & -20.600 \\ -20.600 & 20.600 \end{bmatrix} = \mathbf{K}_2^e$$

Diese beiden Element-Steifigkeitsmatrizen müssen zur Gesamt-Steifigkeitsmatrix zusammengebaut werden. Diesen Vorgang nennt man *Compilation*.

Es gilt:

$$\mathbf{K} = \sum_i \mathbf{K}_i^e$$

3. REGEL FEA

Gesamtsteifigkeitsmatrix = Summe der Elementsteifigkeitsmatrizen

Hier:

Element 1

$$\begin{bmatrix} K_1 & -K_1 \\ -K_1 & K_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}$$

Element 2

$$\begin{bmatrix} K_2 & -K_2 \\ -K_2 & K_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_2 \\ U_3 \end{bmatrix}$$

Damit wird die Gesamtsteifigkeitsmatrix:

$$\begin{bmatrix} K_1 & -K_1 & 0 \\ -K_1 & K_1 + K_2 & -K_2 \\ 0 & -K_2 & K_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 41.200 & -41.200 & 0 \\ -41.200 & 61.800 & -20.600 \\ 0 & -20.600 & 20.600 \end{bmatrix}$$

Also wird das Gleichungssystem zunächst:

$$\begin{bmatrix} 41.200 & -41.200 & 0 \\ -41.200 & 61.800 & -20.600 \\ 0 & -20.600 & 20.600 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 5.000 \end{bmatrix}$$

Einbau der Randbedingungen: $U_1 = 0$ nach Vorgehen 1:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 61.800 & -20.600 \\ 0 & -20.600 & 20.600 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 5.000 \end{bmatrix}$$

Die Lösung dieses Gleichungssystems ist dann:

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,1214 \\ 0,3641 \end{bmatrix}$$

Nunmehr Rückrechnen der inneren Kräfte nach Vorgehen 2, um die Stabkräfte zu erhalten:

Element 1

$$\begin{bmatrix} 41.200 & -41.200 \\ -41.200 & 41.200 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0,1214 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5.000 \\ +5.000 \end{bmatrix}$$



Bild 2-8: Kräfte an den Knoten von Stab 1

Element 2

$$\begin{bmatrix} 20.600 & -20.600 \\ -20.600 & 20.600 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,1214 \\ 0,3641 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5.000 \\ +5.000 \end{bmatrix}$$



Bild 2-9: Kräfte an den Knoten von Stab 2

Im Beispiel war eine Kraft F_3 vorgegeben. Nun soll stattdessen eine definierte Verschiebung aufgegeben werden. Das Gleichungssystem sieht zunächst so aus:

$$\begin{bmatrix} 41.200 & -41.200 & 0 \\ -41.200 & 61.800 & -20.600 \\ 0 & -20.600 & 20.600 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix}$$

Als nächstes bringen wir die äußeren Kräfte an:

$$\begin{bmatrix} 41.200 & -41.200 & 0 \\ -41.200 & 61.800 & -20.600 \\ 0 & -20.600 & 20.600 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Wenn wir keine äußeren Kräfte aufbringen, sind sie auch alle logischerweise 0.

Es soll nun eine Verschiebung $U_3 = 0,3641$ mm aufgegeben werden. Da sie von 0 verschieden ist, nennt man sie eine *inhomogene Randbedingung*:



VORGEHEN 3: EINBAU INHOMOGENE RANDBEDINGUNG

Die inhomogene RB habe den Wert C_j und gelte am Freiheitsgrad j

- V3.1: Subtrahiere von Rechter Seite F den Spaltenvektor, der das Produkt aus C_j und Spalte j von K ist.
- V3.2: Wende Vorgehen 1 an.
- V3.3: Ersetze F_j durch C_j .

Das probieren wir gleich aus:

Schritt V3.1:

$$U_3 = 0,3641 = C_j \quad \text{d.h.} \quad j = 3$$

$$\begin{bmatrix} 41.200 & -41.200 & 0 \\ -41.200 & 61.800 & -20.600 \\ 0 & -20.600 & 20.600 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 - 0,3641 \cdot 0 \\ 0 - 0,3641 \cdot (-20.600) \\ 0 - 0,3641 \cdot 20.600 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ +7.500,46 \\ -7.500,46 \end{bmatrix}$$

Schritt V3.2:

Vorgehen 1 anwenden, also Zeile 3 und Spalte 3 in K je 0, Diagonalelement K_{33} zu 1, F_3 zu 0:

$$\begin{bmatrix} 41.200 & -41.200 & 0 \\ -41.200 & 61.800 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ +7.500,46 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Es wäre aber so $U_3 = 0$. Eindeutig falsch! Daher müssen wir nun setzen: F_3 zu $C_3 = U_3 = 0,3641$.

Schritt V3.3:

$$\begin{bmatrix} 41.200 & -41.200 & 0 \\ -41.200 & 61.800 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 7.500,46 \\ 0,3641 \end{bmatrix}$$

Nun wird noch die Randbedingung $U_1 = 0$ also das linke Festlager, eingebaut gemäß Vorgehen 1:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 61.800 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 7.500,46 \\ 0,3641 \end{bmatrix}$$

Die Lösung des Gleichungssystems ist:

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,1214 \\ 0,3641 \end{bmatrix} \quad \dots \text{ und das stimmt!}$$

Rechenbeispiel 3

Nun das Ganze mit einem Balken in der Ebene am Beispiel eines Trägers:

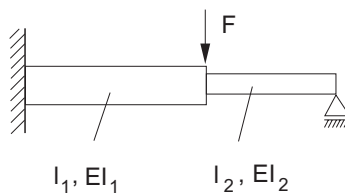


Bild 2-10: Kräfte am Balken

Das System ist statisch überbestimmt! Das stört uns aber gar nicht! Einer der großen Vorteile der FEA ist, dass man mit ihr beliebig statisch überbestimmte Systeme berechnen kann. Gegenüber der „Handrechnung“ mit „0“- und „1“- bzw. „2“-... „n“-System der Technischen Mechanik, die mit jeder weiteren Überbestimmten sprunghaft aufwendiger wird, steigt der Rechenaufwand bei der FEA praktisch nicht. Daher ist die FEA auch außerordentlich geeignet, um beliebig statisch überbestimmte Stab- und Balkenfachwerke oder Durchlaufträger zu berechnen.

Hingegen müssen Sie bereits bei diesem einfach statisch überbestimmten System bei Berechnung mit der klassischen Technischen Mechanik schon mitdenken: Entweder Sie nehmen das rechte Loslager weg und kompensieren die dann auftretende Verschiebung w mit einer Kraft X , so dass die Verschiebung am rechten Lager wieder 0 wird, Bild 2-11, oder Sie nehmen die Momenteneinspannung am linken Lager weg und kompensieren den nun auftretenden Verdrehwinkel φ mit einem Moment \bar{X} , Bild 2-12. Alle diese Überlegungen brauchen Sie beim Einsatz der FEA nicht mehr durchzuführen.

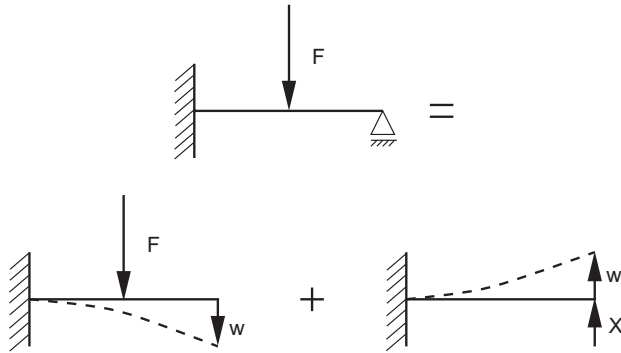


Bild 2-11: Statisch Überbestimmte X als Kraft

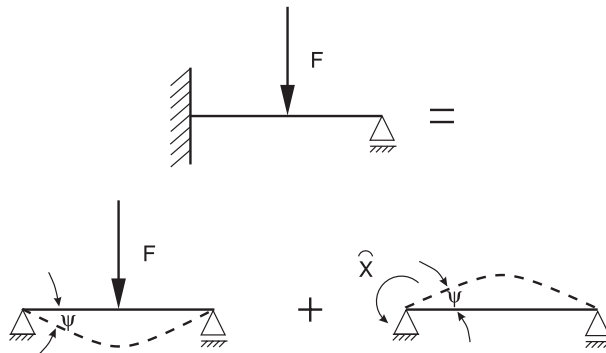


Bild 2-12: Statisch Überbestimmte \hat{X} als Moment

Dafür brauchen wir zunächst einen waagrecht in der Ebene liegenden Balken:



Bild 2-13: Die Verschiebungen und Verdrehungen am Balken

Dessen Element-Steifigkeitsmatrix (wir entnehmen sie momentan einfach der Literatur und glauben sie ohne Nachfragen) ist wie folgt:

$$EI \cdot \begin{bmatrix} \frac{12}{l^3} & -\frac{6}{l^2} & -\frac{12}{l^3} & -\frac{6}{l^2} \\ -\frac{6}{l^2} & \frac{4}{l} & \frac{6}{l^2} & \frac{2}{l} \\ -\frac{12}{l^3} & \frac{6}{l^2} & \frac{12}{l^3} & \frac{6}{l^2} \\ -\frac{6}{l^2} & \frac{2}{l} & \frac{6}{l^2} & \frac{4}{l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{bmatrix}$$

oder

$$K U = F$$

oder

$$\sum_j K_{ij} U_j = F_i$$

Derartige Element-Steifigkeitsmatrizen findet man in der Literatur /1-7/ oder liest Kapitel 4. Manche Autoren stellen den Sachverhalt wie folgt dar:

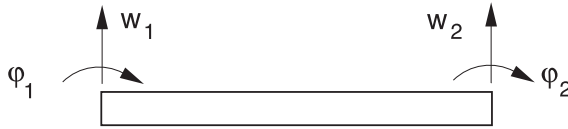


Bild 2-14: Alternative Darstellung der Verschiebungen und Verdrehungen

$$EI \cdot \begin{bmatrix} \frac{12}{\ell^3} & \frac{-6}{\ell^2} & \frac{-12}{\ell^3} & \frac{-6}{\ell^2} \\ \frac{-6}{\ell^2} & \frac{4}{\ell} & \frac{6}{\ell^2} & \frac{2}{\ell} \\ \frac{-12}{\ell^3} & \frac{6}{\ell^2} & \frac{12}{\ell^3} & \frac{6}{\ell^2} \\ \frac{-6}{\ell^2} & \frac{2}{\ell} & \frac{6}{\ell^2} & \frac{4}{\ell} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ \varphi_1 \\ w_2 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ M_1 \\ F_2 \\ M_2 \end{bmatrix}$$

Hier wird zwar vordergründig deutlich, dass am Balken Verschiebungen w , Verdrehungen φ , Kräfte F und Momente M wirken, aber die sehr erwünschte schematische Behandlung wird erschwert. Vor allem für die Darstellung

$$\sum_j K_{ij} U_j = F_i$$

völlig ungeeignet! Und gerade die Indexform der Matrizen-Schreibweise braucht man zum Programmieren.

Zurück zu unserem Beispiel:

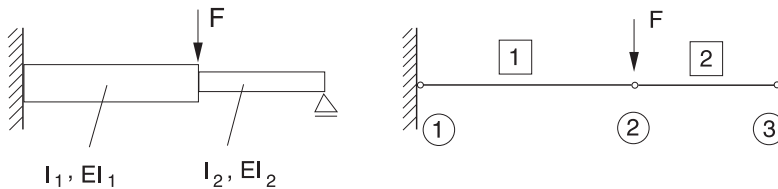


Bild 2-15: Darstellung des Rechenbeispiels 3