

π und Co.

Kaleidoskop der Mathematik

Ehrhard Behrends • Peter Gritzmann
Günter M. Ziegler
Herausgeber

π und Co.

Kaleidoskop der Mathematik

 Springer

Prof. Dr. Ehrhard Behrends
Fachbereich Mathematik und Informatik
Freie Universität Berlin
Arnimallee 2–6
14195 Berlin
behrends@math.fu-berlin.de

Prof. Günter M. Ziegler
Institut für Mathematik, MA 6-2
Technische Universität Berlin
Straße des 17. Juni 136
10623 Berlin
ziegler@math.tu-berlin.de

Prof. Dr. Peter Gritzmann
Zentrum Mathematik
Technische Universität München
Boltzmannstraße 3
85747 Garching
gritzman@ma.tum.de

Korrigierter Nachdruck 2008

ISBN 978-3-540-77888-2

e-ISBN 978-3-540-77889-9

DOI 10.1007/978-3-540-77889-9

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

© 2008 Springer-Verlag Berlin Heidelberg

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Die dadurch begründeten Rechte, insbesondere die der Übersetzung, des Nachdrucks, des Vortrags, der Entnahme von Abbildungen und Tabellen, der Funksendung, der Mikroverfilmung oder der Vervielfältigung auf anderen Wegen und der Speicherung in Datenverarbeitungsanlagen, bleiben, auch bei nur auszugsweiser Verwertung, vorbehalten. Eine Vervielfältigung dieses Werkes oder von Teilen dieses Werkes ist auch im Einzelfall nur in den Grenzen der gesetzlichen Bestimmungen des Urheberrechtsgesetzes der Bundesrepublik Deutschland vom 9. September 1965 in der jeweils geltenden Fassung zulässig. Sie ist grundsätzlich vergütungspflichtig. Zuwiderhandlungen unterliegen den Strafbestimmungen des Urheberrechtsgesetzes.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Buch berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Satz und Herstellung: le-tex publishing services oHG, Leipzig
Einbandgestaltung: deblik, Berlin

Gedruckt auf säurefreiem Papier

9 8 7 6 5 4 3 2 1

springer.de

Vorwort

Haben Sie schon einmal das Stichwort „Mathematik“ bei *Google* eingegeben? Als dieses Buch entstand, waren es 27.200.000 Einträge, beim englischen „mathematics“ sogar 93.100.000; Tendenz steigend. Mathematik und Spaß brachten es immerhin auf 203.000 Einträge, Mathematik und Qual bzw. Mathematik und Frust dagegen „nur“ auf 78.000 bzw. 63.600. Also, Mathematik ist interessant und relevant, kann durchaus Spaß machen, aber manchmal auch frustrieren, dieses Fazit liegt nahe. Und doch scheiden sich an dem Fach die Geister. Glühende Begeisterung auf der einen, aber auch bissige Ablehnung auf der anderen Seite. „Kommt ein Mathematiker in ein Fotogeschäft: ‚Guten Tag, ich möchte einen Film entwickeln lassen.‘ Verkäuferin: ‚ 9×13 ?‘ Mathematiker: ‚117‘ wieso?“ Die perfidere Variante lässt den Mathematiker ‚137‘ antworten, eine Primzahl. Und das ist alles noch harmlos gegenüber den anderen Vorurteilen, denen das Fach bisweilen in der Öffentlichkeit begegnet: abstrakt, weltfremd, ohne Saft und Kraft, erfunden weniger als Mittel zur Bewältigung unserer immer komplexer werdenden Welt sondern eher als Folterwerkzeug für Generationen von Schülerinnen und Schülern. Da ist es schon fast ein Trost, dass Paul Möbius (nein, nicht der berühmte Mathematiker August Möbius, sondern ein, wie es damals hieß, Irrenarzt) vor hundert Jahren festgestellt hat, dass die Mathematik wenigstens „dem Liebestrieb nicht abträglich“ ist.

„Mathematik schult das logische Denkvermögen“, heißt es. Das stimmt, aber Mathematik ist noch viel mehr. Mathematik ist ästhetisch, nützlich und ein wichtiges Instrument der Aufklärung. Mathematik ist kreativ, spannend und unterhaltsam. Und sie kommt überall vor – na ja, fast überall. Sie durchdringt und beeinflusst mittlerweile fast alle Lebens- und Arbeitsbereiche: vom Kraftwerk- oder Fahrzeugbau bis zur Straßen- und Routenplanung, vom bargeldlosen Zahlungsverkehr im Supermarkt bis zur Architektur der kühnsten Gebäude, von der Wettervorhersage bis zum MP3-Player. Natürlich basiert auch das Internet wesentlich (und in großer Vielfalt) auf Mathematik, auch *Google* oder *eBay*. Die Mathematik hat vieles durchdrungen, aber es ist auch vieles noch ungelöst, und der Gang der Welt stellt immer höhere Anforderungen an die Mathematik, Mathematik, die hilft, technische, wirtschaftliche, biologische oder gesellschaftliche Prozesse zu verstehen und zu optimieren.

Dieses Buch will Schlaglichter werfen auf die Mathematik, nicht als Monographie, nicht als Lehrbuch, sondern als eine ganz bunte Collage. Wir haben 39 Artikel und Buchbeiträge zusammengestellt, die viele Aspekte von Mathematik beleuchten. Nicht jeder

Text wird alle ansprechen, aber für jeden sollte etwas dabei sein, wirklich für jeden, denn das Spektrum reicht von feuilletonistischen Einwürfen über fachliche Überblicke bis hin zu spezielleren mathematischen Texten. Leicht verständliche, unterhaltsame Texte finden sich ebenso wie anspruchsvollere mathematische Herausforderungen, naheliegendes ebenso wie kontraintuitives. Auch philosophische, theologische und kulturelle Aspekte werden aufgegriffen, genauso wie zentrale mathematische Probleme, die zum Teil schon seit mehr als einem Jahrhundert auf ihre Lösung warten.

Wenn also etwas zu leicht oder zu schwer ist, einfach überspringen: der nächste Text ist wieder ganz anders. Zwischen den Texten wird es manche Überschneidung und „Wechselwirkung“ geben. Doch jeder steht für sich, die Texte bauen nicht aufeinander auf. Gemeinsam, wie es bei einer Collage so ist, ergeben sie jedoch ein Ganzes, ein Bild von der Vielfältigkeit und Schönheit der Mathematik, von ihrer Nützlichkeit und ihren Herausforderungen und – ganz besonders – von ihrer „jungen Quicklebendigkeit“.

Aus einer Idee von Vasco Alexander Schmidt, die uns drei gleich begeistert hat, ist in kürzester Zeit der jetzt vorliegende Festband entstanden. Wir danken allen, die durch Hinweise, Ratschläge und Ideen, Genehmigungen und Zuarbeit das fast Unmögliche möglich gemacht haben, diesen Band zum Abiturtermin im Mathematikjahr 2008 fertig zu haben. Insbesondere genannt seien Ulrike Schmickler-Hirzebruch bei Vieweg, sowie Rüdiger Gebauer, Clemens Heine, Joachim Heinze und Eric Merkel-Sobotta bei Springer.

Die Herausgeber und die DMV sagen *Herzlichen Dank!*

Berlin und München, März 2008

*Ehrhard Behrends
Peter Gritzmann
Günter M. Ziegler*

Inhalt

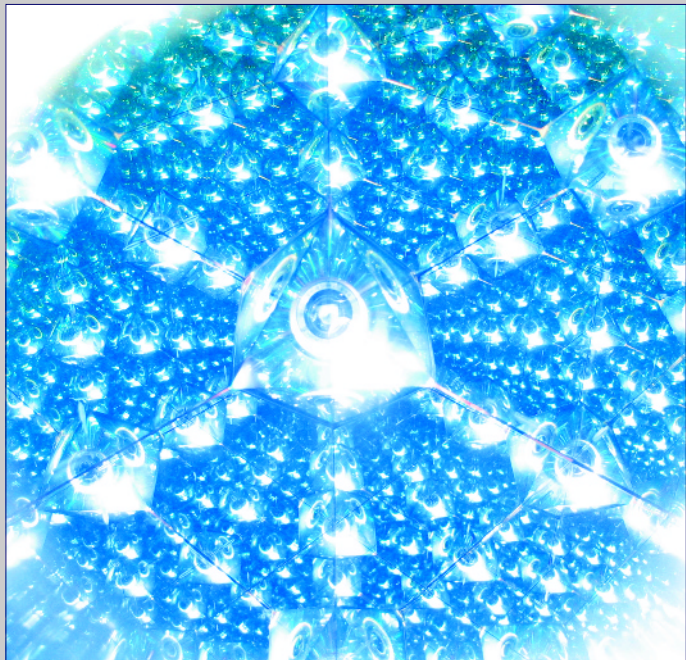
I	Prolog	1
	G. von Randow: Mathe wird Kult – Beschreibung einer Hoffnung	3
	A. Beutelspacher: Wieviel Mathematik gibt es?	9
	M. Aigner: Die pure Eleganz der Mathematik	15
	G.M. Ziegler: Wo Mathematik entsteht: Zehn Orte	20
	I. Stewart: Warum Mathematik?	25
II	Dauerbrenner	35
II.1	Primzahlen	
	R. Courant, H. Robbins: Die Primzahlen	41
	M. Aigner, G. M. Ziegler: Sechs Beweise für die Unendlichkeit der Primzahlen	51
	F. Bornemann: Ein Durchbruch für „Jedermann“	55
	G. M. Ziegler: Primzahltests und Primzahlrekorde	63
II.2	Unendlichkeiten	
	H. Heuser: Vorwort	67
	M. Aigner, G. M. Ziegler: Mengen, Funktionen und die Kontinuumshypothese	73
	D. Barthe: Leonhard Eulers unendliche Summen	83
	Lina: Eine Frage und zwei Antworten	88
II.3	Dimensionen	
	E. Behrends: Der fünfdimensionale Kuchen	91
	T.F. Banchoff: Zur Einführung von Dimensionen	94
	R. Courant, H. Robbins: Topologie	105
	T. Gowers: Dimension <i>engl.</i>	128

II.4	Wahrscheinlichkeiten	
	E. Behrends: Der Zufall lässt sich nicht überlisten	145
	J. Bewersdorff: Lottotipps – „gleicher als gleich“?	149
	M. Aigner, G. M. Ziegler: Das Nadelproblem von Buffon	157
	C. Drösner: Frauenfragen oder Mehr ist manchmal weniger	161
	O. Häggström: Drei Paradoxa	171
III	Harte Nüsse	191
III.1	Fermat	
	J. Kramer: Der große Satz von Fermat	195
III.2	P=NP	
	P. Gritzmann, E. Behrends: Eine Million Dollar für die Sicherheit Ihrer Kreditkarte?	206
	M. Grötschel: P = NP?	209
III.3	Die Zeta-Funktion	
	J. Kramer: Die Riemannsche Vermutung	216
III.4	Medaillen für Mathematik	
	G. M. Ziegler: Heiße Tage in Madrid	222
IV	Heiße Themen	231
IV.1	Diskrete Optimierung	
	P. Gritzmann, R. Brandenberg: Kombinatorische Explosion und das Traveling Salesman Problem	235
IV.2	Google	
	E. Behrends: Mit Mathematik zum Milliardär	261
IV.3	Finanzmathematik	
	W. Schachermayer: Die Rolle der Mathematik auf den Finanzmärkten	265
IV.4	Kryptographie	
	A. Beutelspacher, H. B. Neumann, T. Schwarzpaul: Der RSA-Algorithmus	279
IV.5	Spieltheorie	
	K. Sigmund: Eine kurze Geschichte des Nash-Gleichgewichts	297

V	Mathematik ohne Grenzen	311
V.1	Zaubern	
	E. Behrends: Bezaubernde Mathematik: Zahlen	315
	E. Behrends: Bezaubernde Mathematik: Ordnung im Chaos	317
V.2	Kunst	
	E. Behrends: Escher über die Schulter gesehen – eine Einladung	320
V.3	Architektur	
	J. Richter-Gebert, U. Kortenkamp: Zusammenspiel: Mathematik und Architektur	342
V.4	Musik	
	E. Behrends: Von Halbtönen und zwölften Wurzeln	350
V.5	Wahlen	
	W. Leininger: Die Mehrheit entscheidet. Wirklich?	352
V.6	Medizin	
	P. Deuffhard: Maler, Mörder, Mathematiker	358
VI	Zugaben: Kurioses aus dem Alltag	365
	G. M. Ziegler: Mathematik im Alltag	366
VII	Schlussbemerkung	375
	Abbildungsverzeichnis	377
	Quellenverzeichnis	385
	Sachverzeichnis	389

I

Prolog



G. von Randow: Mathe wird Kult – Beschreibung einer Hoffnung aus „Alles Mathematik“ [Vieweg, 2. Auflage 2002], S. 3–7	3
A. Beutelspacher: Wieviel Mathematik gibt es? aus „In Mathe war ich immer schlecht ...“ [Vieweg], S. 43–47	9
M. Aigner: Die pure Eleganz der Mathematik aus: Gegenworte (Zeitschrift der BBAW), Heft 12, Herbst 2003, S. 11–15	15
G.M. Ziegler: Wo Mathematik entsteht: Zehn Orte aus: Gegenworte (Zeitschrift der BBAW), Heft 16, Dezember 2005, S. 12–16	20
I. Stewart: Warum Mathematik? Kapitel 1 aus „Warum (gerade) Mathematik? Eine Antwort in Briefen“ [Spektrum, 2007], S. 1–9	25

Mathe wird Kult – Beschreibung einer Hoffnung

Gero von Randow

Aus den Zeitungen der vergangenen Jahre dürfte der durchschnittliche Leser wohl das Folgende über die Mathematik erfahren haben:

- Ein ehrwürdiges Problem der Mathematik wurde gelöst – dann irgendwie doch nicht – dann irgendwie wieder doch. Der Beweis passt nicht an den Rand einer beschriebenen Seite.
- Jemand anders hat eine riesengrosse Primzahl entdeckt.
- Wieder jemand anders hat die soundsovielte Dezimalstelle hinterm Komma der Zahl Pi herausgefunden. Mit Computern.
- Mathematiker bekommen keinen Nobelpreis, sind aber so ziemlich die einzigen, die wirklich verstehen, was der letztjährige Nobelpreisträger für Wirtschaftswissenschaften eronnen hat.
- Chaostheorie ist der Schlüssel zu den Geheimnissen des Universums, des Managements, des Nahverkehrs und der Liebe.
- Deutsche Schüler können nicht rechnen.
- Staubsauger sind besser, wenn sie mit fusseliger Logik arbeiten.

Alles in allem: Kein sehr befriedigender Befund. Aber er beschreibt nicht die ganze Wirklichkeit. Trotz der nur rudimentären Spuren der Mathematik im öffentlichen Bewusstsein glaube ich, dass sie gute Chancen hat, ein neues Ansehen im breiten Publikum zu erwerben.

Es begann vor wenigen Jahren in Hollywood. Genauer: In dem Film „Jurassic Park“. Eine der Hauptrollen stellt einen Mathematiker dar, der durch folgende Eigenschaften gekennzeichnet ist:

- Sein Habitus erinnert an den frühen Tom Jones.
- Er versucht, die Hauptdarstellerin herumzukriegen.
- Sein Gebiet ist die Chaostheorie, aus der unweigerlich folgt, dass die Saurier ausbrechen werden.

Die Saurier brechen aus. Der Mathematiker wird von einem Saurier gebissen. In dem Film „Die Codebreaker“ trat auch ein Mathematiker auf. Diesmal nicht in schwarzen Lederklamotten, sondern in einem weissen Anzug. Er hatte ein sogenanntes Zahlensieb erfunden, mit dem sich ein RSA-Code brechen lässt. Aus diesem Grund wird der Mathematiker schließlich umgebracht.

In beiden Fällen endet es für die Mathematiker nicht eben erfreulich. Aber Opfer sind wohl nötig, um die Mathematik populär zu machen. In beiden Filmen umgibt den

4 Gero von Randow

Mathematiker eine Aura, die Aura des Wissens, die Kraft verleiht. Diese Aura kann der Inhalt eines neuen Kults um die Mathematik werden, den ich heraufziehen sehe. Und zwar aus mehreren Gründen. Der erste Grund liegt auf der Hand: In der Informationsgesellschaft ist die Mathematik ein sogenannter Standortfaktor. Der zweite Grund ist interessanter. Menschen suchen Wissen, auf das sie sich verlassen können, und mehr noch: Viele suchen nach einer neuen Quelle geistiger Sicherheit – die alten Quellen sind versiegt. Esoterische Bücher und naturwissenschaftliche Populärliteratur verkaufen sich aus dem gleichen Grund so gut: Das Publikum sucht Gewissheiten, Wahrheiten, Werte. Es kauft Bücher des Astrophysikers Stephen Hawking, die fast niemand begreifen kann, oder Bücher des Ufologen Johannes von Buttlar, die in gewisser Hinsicht noch unbegreiflicher sind. Und aus diesem Grund werden die Leser auch Bücher über Mathematik aufschlagen, wenn sie glauben, mit ihrer Hilfe die Welt verstehen zu können. Und sie werden Artikel über Mathematik verschlingen, wenn wir Journalisten sie mit dem Hinweis versehen, dass Mathematik etwas über die Welt oder das Denken aussagen kann.

Ein Zweig der Mathematik hat es in dieser Hinsicht bereits weit gebracht: Die sogenannte Chaosmathematik. Sie ist bereits ein Teil der Popkultur geworden.

Das hat unweigerlich auch zu Missverständnissen geführt – manche Leute scheinen mittlerweile zu glauben, in Hamburg gebe es Regenwetter, weil in China ein Sack Reis umfällt: Schmetterlingseffekt. Das ist aber nicht weiter besorgniserregend. Weitaus bedeutsamer ist, dass der Kult um das Chaos viele Menschen der Mathematik ausgesetzt hat. Das Interesse an Mathematik ist gestiegen, und die Attraktivität der Mathematik auch. Diejenigen, die die Chaostheorie und ihre Verwandten trotz des Naserümpfens der Kollegen populär gemacht haben, haben sich um die Mathematik verdient gemacht. Ich bin davon überzeugt, dass sich im lesenden Publikum eine wachsende Nachfrage nach Mathematik wecken lässt. Die Buchverlage scheinen das ähnlich zu sehen; in den vergangenen Monaten kamen etliche populärwissenschaftliche und biographische Bücher über Mathematik auf den Markt.

Das Schwierigste ist freilich nicht, die Nachfrage nach populär dargestellter Mathematik zu wecken, das Schwierigste ist, diese Nachfrage zu decken. Ich möchte ein wenig auf die Schwierigkeit eingehen, über Mathematik zu schreiben.

Journalisten schreiben keine Aufsätze, sondern Stories. Das ist wörtlich gemeint; sie schreiben Geschichten. Es sind Geschichten, die gelesen werden, keine Aufsätze. Journalismus ist der Kampf um die Aufmerksamkeit des Lesers, von der ersten bis zur vorletzten Zeile. Eine Geschichte entfaltet sich jedoch nach ganz anderen Gesetzmäßigkeiten als ein Beweis oder als eine schrittweise Darstellung eines mathematischen Sachverhalts. Wie kommt die Mathematik in die Zeitung? Im Rahmen einer Geschichte. Das Schöne am Fermat'schen Problem war nicht nur, dass es sich mit einer simplen Formel (die freilich für die meisten Redaktionen noch immer zu schwierig war) ausdrücken ließ, sondern dass seine Lösung eine so unglaubliche Geschichte war – da machte es schon nichts mehr, dass es vollkommen unmöglich war, den Lesern eine Ahnung des Beweises zu vermitteln.

Ein anderer Weg der Mathematik in die Zeitung ist das Gleichnis, aus dem wir Einsichten in nichtmathematische Probleme schöpfen können. Gerade weil doch die Mathematik eine Wissenschaft der abstrakten Formen ist, eignen sich etliche ihrer Ge-

genstände als Gleichnisse. Etwa die Theoreme über die Frage, wann sich, laienhaft ausgedrückt, komplexe Systeme aus einfachen Regeln herleiten lassen. Es gibt Systeme, bei denen das möglich ist – doch bei denen der Prozess der Herleitung so extrem viele Schritte erfordern würde, dass er niemals unternommen werden kann. Ein schönes Gleichnis für die Frage, ob es ein Geheimnis des Lebens gibt. Vielleicht gibt es das, aber möglicherweise können wir damit nichts anfangen. Ich glaube, dass Leser sich für solche Gedanken interessieren können.

Ein Problem besteht sicherlich darin, dass nur die wenigsten von uns Journalisten etwas von Mathematik verstehen. Die Mathematik ist für viele von uns so etwas wie ein blinder Fleck. Das menschliche Auge wird mit dem blinden Fleck fertig, indem das Bild, das sich auf der Retina abzeichnet, vom Gehirn ergänzt wird. Die Juristen kennen so etwas und nennen es „Parallelwertung in der Laiensphäre“. Leider hat die Mathematik – für Nichtmathematiker, versteht sich – so gar nichts Anschauliches; selbst Quantenphysik lässt sich noch anschaulicher darstellen. Allerdings wird heutzutage in Visualisierungslabors eine Art experimenteller Mathematik betrieben, die dem Leser auf dem Wege anschaulicher Vorstellung näher gebracht werden kann.

Da ist die Versuchung groß, den Leser wenigstens mit griffigen Anwendungen der Mathematik zu begeistern. Das ist ein legitimes Hilfsmittel. Ich habe auch schon Geschichten über die mathematische Optimierung von Babywindeln geschrieben, über die Simulation des Börsengeschehens oder über artificial life. Das kann unterhaltend sein, sogar lehrreich. Aber es erklärt nicht die Mathematik. Ich glaube, in den meisten Fällen können wir die Mathematik in der Zeitung gar nicht erklären.

Eine Erklärung der Riemannschen Vermutung zum Beispiel würde bereits am Konzept der komplexen Zahl scheitern. Aber das macht auch gar nichts. Der Wissenschaftsjournalist braucht dem breiten Publikum die Mathematik nicht zu erklären; er muss ihm vielmehr das Mathematische erklären. Er kann an einfachen Beispielen, die für einen Mathematiker trivial sein mögen, dem Publikum erklären, was denn das Mathematische ist. Und das sollte er unbedingt tun. Den Lesern das Mathematische nahebringen, ist eine ganz ernsthafte Aufgabe. In den Worten von Alfred North Whitehead: „An der Mathematik selbst gibt es nichts Geheimnisvolles. Sie ist einfach das bedeutendste Beispiel für eine Wissenschaft abstrakter Formen.“ Die abstrakten Schemata der Mathematik und Logik „repräsentieren das Ideenskapital, das jedes Zeitalter für seine Nachkommen treuhänderisch verwalten muss. . . . Man macht sich kaum jemals klar, wie lange solche Schemata im Geist heranreifen können, bis sich irgendwann einmal ein Kontakt mit praktischen Interessen ergibt.“

Dies ist der große, der wichtigste Gedanke, den wir den Lesern erläutern können. Und da ist halt ein bisschen Popkult um die Mathematik nicht hinderlich.

Die Mathematik hat allerdings noch eine andere Eigenschaft, die dem Journalisten sehr nützlich sein kann: das ist ihre Fähigkeit zu verblüffen. Die mathematische Betrachtung eines Problems kann zu kontraintuitiven Ergebnissen führen. So etwas ist für viele Menschen interessant, selbst wenn sie keinen mathematischen Schimmer haben. Sie finden es auch deshalb interessant, weil sie Humor haben. Und der Humor ist eine Hauptwaffe des Journalismus.

Als Beispiel möchte ich Ihnen von meiner Erfahrung mit dem Drei-Türen-Problem erzählen, das auch als das „Ziegenproblem“ bekannt geworden ist (in aller Ausführlich-

keit finden Sie die Geschichte in: G. v. Randow, *Das Ziegenproblem*, rororo science). Es lautet folgendermaßen: Sie nehmen an einer Spielshow im Fernsehen teil, bei der Sie eine von drei verschlossenen Türen auswählen sollen. Hinter einer Tür wartet ein Preis: ein Auto. Hinter den beiden anderen stehen Ziegen. Sie zeigen auf eine Tür, sagen wir: Nummer eins. Sie bleibt vorerst geschlossen. Der Moderator weiß, hinter welcher Tür sich das Auto befindet; mit den Worten „Ich zeige Ihnen mal was“ öffnet er eine andere Tür, zum Beispiel Nummer drei, und eine meckernde Ziege schaut ins Publikum. Nun fragt der Moderator: Bleiben Sie bei Nummer eins oder wählen Sie Nummer zwei? Es handelt sich um die zeitgenössische Variante eines alten Rätsels. In den USA hatte es die Journalistin Marilyn vos Savant zur Diskussion gestellt und die zutreffende Antwort gegeben: Tür Nummer zwei hat bessere Chancen.

Da mir das Rätsel gut gefiel, schrieb ich in der ZEIT einen kleinen Beitrag darüber, begründete die Lösung und fuhr in den Urlaub. Und so begrüßten mich die Leser-Zuschriften, als ich zurückkam: Der verehrte Herr von Randow sei „wohl ins Sommerloch gestolpert“, „jeder normale Zwölftklässler“ könne den „typischen Laienfehler“ erkennen, den „haarsträubenden Unsinn“, „Quatsch“, „Nonsens“, das sei ja alles „absurd“ und „abstrus“; es sei „traurig, dass die ZEIT so etwas überhaupt aufgreift“, und ein Mathematiker urteilte, das Ganze sei ja wohl „peinlich“.

Das Ziegenproblem hielt offenbar viele Menschen in Atem. Parties platzten, Ehepaare gerieten aneinander. Professoren setzten ihre Assistenten an das Ziegenproblem, Mathe-Lehrer verwirrten ihre Schüler. Der Mitarbeiter eines Softwarehauses schrieb mir: „Bei uns verfügen viele über eine umfassende analytische Ausbildung (Informatik, Mathematik, Physik). Verständlich also, dass das Ziegenproblem reizt. Wir haben die zur Verfügung stehenden analytischen Instrumentarien ausgepackt, Wahrscheinlichkeitsräume konstruiert, statistische Analysen durchgeführt usw. Ich erinnere mich an einen Freitagabend: Wir hatten in einer kleinen Gruppe bis gegen 19.00 Uhr ein Projekt diskutiert und wollten eigentlich nach Hause gehen, als zum wiederholten Mal das Gespräch auf das Ziegenproblem kam. Es war 21.00 Uhr vorbei, als wir, eher erschöpft als vom Ergebnis befriedigt, das Feld räumten und mehrere beschriebene Metaplanwände zurückließen.“

Es herrschte nicht gerade Saure-Gurken-Zeit. Bürgerkrieg in Jugoslawien, Putsch in Moskau, Probleme mit den neuen Bundesländern, Anschläge gegen Türken – aber Tausende diskutierten ein mathematisches Problem, mit Leidenschaft.

In den USA war unterdessen noch viel mehr los. Ich zitiere die New York Times, von der Seite eins: „Die Antwort, wonach die Mitspielerin die Tür wechseln sollte, wurde in den Sitzungssälen der CIA und den Baracken der Golfkrieg-Piloten debattiert. Sie wurde von Mathematikern am MIT und von Programmierern am Los Alamos National Laboratory untersucht und in über tausend Schulklassen des Landes analysiert.“

Das Beispiel lehrt: Menschen staunen gerne. Über kontraintuitive Lösungen regen sie sich nachgerade auf. Das ist die Chance für Mathematisches in der Zeitung.

Wir hatten einmal einen Text über Computerbeweise gedruckt und dabei den Vierfarbensatz erwähnt: Jede beliebige Landkarte, ob echt oder fiktiv, lässt sich mit nur vier Farben ausreichend kolorieren. Dieser Satz ist mit Hilfe von Computern bewiesen worden – aber das fanden viele Leser weniger interessant als den Satz selbst. Der ist nämlich kontra-intuitiv. Und so sandten sie uns komplizierte Karten zu; ich habe mir

den Spaß erlaubt, sie jedesmal mit vier Farben koloriert zurückzusenden. Keine sehr mathematische Tätigkeit, aber sehr befriedigend.

Dass die Mathematik kontraintuitive Lösungen parat hat, ist von hohem erzieherischen Wert. Es erinnert uns daran, dass wir nichts unbesehen glauben sollten, dass nichts der Kritik entzogen werden darf, selbst wenn es mit Autorität der Person oder der exakten Zahlenangabe daherkommt. Das ist wichtig, schliesslich ist die öffentliche Meinung in hohem Maße von Zahlen beeinflusst. Herausragende Beispiele sind Statistik und Computersimulation, etwa wenn es um Elektrosmog und Leukämie-Verteilungen geht, um das Kernkrafttrisiko, den Treibhauseffekt oder den Sozialstaat.

In der Öffentlichkeit spielen Zahlen eine starke Rolle, mit ihnen wird argumentiert und widerlegt, aber nur wenige können sachgerecht mit ihnen umgehen. Da lese ich ausgerechnet in einer Wissenschaftszeitschrift, amerikanische Ärzte hätten herausgefunden, dass Schlittenfahren gefährlicher sei als andere Kindersportarten: Denn in den USA verletzen sich etwa 33.000 Kinder pro Jahr beim Rodeln. Ein typischer Fall von Zahlenzauber. Der Leser stellt sich die 33.000 armen heulenden Kleinen vor und erschrickt.

Nun, in den USA gibt es grob geschätzt, etwa 33 Millionen Kinder im Rodelalter zwischen vier und vierzehn Jahren. Angenommen, nur die Hälfte rodeln wenigstens ein einziges Mal pro Jahr, dann verletzt sich nur jedes fünfhundertste Kind beim Rodeln. Das scheint mir nach aller Lebenserfahrung ein verblüffend geringes Risiko zu sein – jedenfalls gemessen an anderen Jugendsportarten.

Gut gefallen hat mir auch eine Meldung der Agentur Reuters, in der es hieß, die Welt werde von einer gigantischen vulkanischen Explosion bedroht. Der Reuters-Korrespondent hatte nämlich von einem britischen Wissenschaftler erfahren, dass etwa zweimal in hunderttausend Jahren das globale Klima von Vulkanexplosionen durcheinander gebracht würde. Die letzte habe vor 70.000 Jahren bei Toba in Indonesien stattgefunden, eine Eiszeit sei die Folge gewesen, und statistisch gesehen sei die Erde jetzt seit langem wieder fällig.

Triviale Beispiele, gewiss. Allerdings ist die öffentliche Rede voll solcher Beispiele, und Mathematikern, ich erinnere an den Dortmunder Statistiker Walter Krämer, steht es gut an, hier freundlich-berichtigend einzugreifen. Sie können sich dabei darauf verlassen, wegen ihrer Sonderrolle hochgeachtet zu sein – ein bisschen wie die Verrückten in primitiven Gesellschaften (ich weiss, diese Worte soll mensch nicht mehr benutzen, aber sie sind so schön einfach). Mathematiker spielen eine Sonderrolle. Denn sie widmen sich einem abstrakten und schönen Spiel. Auch diese Sonderrolle gibt ihnen eine besondere Aura: Coolness. Deswegen scheinen sich Biographien von Mathematikern ja so gut zu verkaufen.

Mathematik hat alle Chancen, populär zu werden. Die Mathematiker auch. Und im Interesse des Fachs – seiner Finanzen, seines Nachwuchses, seiner Pädagogik – sollten die Mathematiker diese Chancen mutig nutzen.

Wieviel Mathematik gibt es?

Albrecht Beutelspacher

Gibt es in der Mathematik überhaupt noch etwas zu erforschen? Dieser Frage liegt die Vorstellung zu Grunde, dass, nachdem der Satz des Pythagoras und alle anderen Formeln schon entdeckt seien, es für Mathematiker eigentlich nichts mehr zu tun gebe. Das Gegenteil ist richtig: Die Mathematik wächst so schnell, dass kaum noch ein Satz von den Axiomen an verfolgt und kontrolliert werden kann.

Stellen wir uns vor, dass ein Mathematiker, nennen wir ihn Prof. B., einen Satz bewiesen hat. Nach wochen-, vielleicht monatelangen Kämpfen, langwierigen Literaturrecherchen, häufigen Gesprächen mit Kollegen, intensivem Nachdenken, intelligenten Fallunterscheidungen, seitenlangen Rechnungen (und vielen Irrwegen!) hat er endlich sein ersehntes Ergebnis erzielt: *Der endliche projektive Raum $PG(3, q)$ besitzt einen Parallelismus!*

Prof. B. ist so stolz auf diesen Satz, dass er sich nicht mit der Erkenntnis an sich begnügt und diese still bei sich behält, sondern er möchte diese Tatsache der Welt bekannt machen. Dafür gibt es verschiedene Möglichkeiten. Er kann an alle Kollegen, die dies interessiert, einen Brief oder eine E-Mail schreiben; er kann auf mathematischen Tagungen darüber berichten; er kann seine Studenten in Spezialvorlesungen davon informieren; – aber die richtige Art und Weise, sich die Urheberansprüche an diesem Satz zu sichern, besteht darin, diesen in einer mathematischen Zeitschrift zu veröffentlichen.

Prof. B. wird also versuchen, seinen Satz so aufzuschreiben, dass auch seine Kollegen verstehen, worin seine neue Erkenntnis besteht. Dann reicht er diese Arbeit bei einer der vielen mathematischen Zeitschriften ein. Er hat dabei die Wahl zwischen allgemeinen Zeitschriften, wie etwa dem 1826 von Leopold Crelle gegründeten *Journal für die reine und angewandte Mathematik* (kurz Crelle's Journal) oder moderneren, auf ein Gebiet spezialisierten Zeitschriften, wie etwa der Zeitschrift *Linear Algebra and its Applications*. In diesem Fall wird Prof. B. wohl eher versuchen, ihn bei einer geometrischen Zeitschrift, wie etwa dem *Journal of Geometry* oder (ganz vornehm) der Zeitschrift *Geometriae Dedicata* („der Geometrie geweiht“) unterzubringen. Alle diese Zeitschriften dienen ausschließlich dem Zweck, solche neuen Ergebnisse zu veröffentlichen.

Die eingereichte Arbeit wird dort zunächst mit einem Stempel mit dem Eingangsdatum versehen, um später etwaige Prioritätsansprüche entscheiden zu können. Danach leitet der Herausgeber der Zeitschrift die Arbeit geeigneten Referenten zu. Dies sind Fachkollegen, deren Aufgabe darin besteht, festzustellen,

- ob die Ergebnisse der eingereichten Arbeit neu sind,
- ob die Ergebnisse richtig sind,
- ob die Beweise richtig sind (das ist etwas anderes!),
- ob die Arbeit gut aufgeschrieben ist, und zusammenfassend
- ob die Ergebnisse so interessant sind, dass sie eine Veröffentlichung in dieser Zeitschrift rechtfertigen.

Dafür brauchen die Kollegen, die ja noch viele andere Aufgaben zu erledigen haben, wenn's gut geht, zwei Monate. Danach wird dem Autor das Ergebnis mitgeteilt. Häufig lautet dies so, dass die Arbeit im Wesentlichen eine Veröffentlichung rechtfertige, *wenn* noch die Änderungswünsche und Anmerkungen der Referenten berücksichtigt werden. Außerdem, so setzt der Herausgeber hinzu, habe die Zeitschrift so viele Arbeiten zu veröffentlichen, dass der Autor seine Arbeit so kürzen müsse, dass sie maximal zehn Seiten umfasst.

Prof. B. muss also seine Arbeit umarbeiten, was nicht ganz einfach ist, da er inzwischen mit ganz anderen Gedanken beschäftigt ist. Dann reicht er die revidierte Fassung seiner Arbeit ein, diese wird nochmals referiert und, wenn alles gut geht, zur Veröffentlichung angenommen.

Das bedeutet aber nur, dass sie in die Warteschlange der Zeitschrift eingereiht wird. In der Regel dauert es noch ein Jahr, in vielen Fällen erheblich länger, bis der glückliche Prof. B. seine Arbeit im Druck sieht, die Sonderdrucke erhält und diese an seine engsten Fachkollegen verschicken kann.

So stellt sich eine mathematische Veröffentlichung aus Sicht eines *Autors* dar.



Ganz anders sieht das aus Sicht eines *Lesers* aus. Für ihn ist diese Arbeit eine in einer riesigen Menge von Veröffentlichungen, er kann eine einzelne Arbeit eigentlich gar nicht wahrnehmen.

In jedem Jahr werden mehr als 60.000 mathematische Arbeiten veröffentlicht. Jede Arbeit enthält mindestens einen neuen Satz. Also gibt es jedes Jahr

mehr als 60.000 neue mathematische Sätze, pro Tag mehr als 150. Wer kann diese Menge bewältigen?

Dabei sind mathematische Arbeiten keineswegs leicht zu lesen, im Gegenteil: Wenn ich eine Arbeit aus meinem Spezialgebiet gründlich lesen will, brauche ich für eine Seite mindestens eine Stunde, häufig viel mehr. Fortgeschrittene Studierende, die über eine 10seitige Arbeit einen Seminarvortrag halten müssen, benötigen oft Monate, bis sie die Arbeit verstanden haben! Wie soll also ein einzelner Mensch 60.000 mathematische Arbeiten in einem Jahr zur Kenntnis nehmen können? Völlig unmöglich!

Daher hat man schon vor längerer Zeit *neue Zeitschriften* gegründet, aber nicht Publikationsorgane für weitere Arbeiten, sondern Zeitschriften, in denen das Wesentliche jeder veröffentlichten Arbeit kurz (und manchmal auch kritisch) dargestellt wird.

Es handelt sich um „Meta-Zeitschriften“, also solche, die über Veröffentlichungen in Zeitschriften berichten. Das erste dieser „Referateorgane“ waren die *Jahrbücher der Fortschritte der Mathematik*, die von 1869 bis 1945 erschienen. Schon zu Lebzeiten der *Fortschritte* wurden 1931 in Deutschland das *Zentralblatt für Mathematik und ihre Grenzgebiete* und 1940 in den USA die *Mathematical Reviews* gegründet. Das russische Pendant heißt *Referativnij Journal Matematika* und erscheint seit 1945.

Für eine solche Referatzeitsschrift wird jede mathematische Veröffentlichung nochmals von einem Fachkollegen kritisch gelesen und kurz zusammengefasst. Bei der eingangs erwähnten Arbeit von Prof. B. über Parallelismen in $PG(3, q)$ lautet das Referat der *Mathematical Reviews* kurz und bündig so:

Let $\Sigma = PG(d, q)$ be the d -dimensional projective space of order q . A t -spread of Σ is a set S of t -dimensional subspaces of Σ with the property that each point of Σ is incident with exactly one element of S . A t -parallelism of Σ is a collection P of t -spreads such that each t -dimensional subspace of Σ is contained in exactly one t -spread of S . The author proves first that there exist 1-parallelisms in any 3-dimensional projective space of finite order. Then, by induction, he proves that any finite projective space of dimension $d = 2^{j+1} - 1$ ($j = 1, 2, \dots$) admits parallelism of lines.

Jede mathematische Arbeit wird also im Idealfall von mindestens fünf vom Autor unabhängigen Personen kritisch gelesen: Von den beiden Referenten, die ein Gutachten für die Zeitschrift machen, und von den Referenten des *Zentralblatts*, der *Mathematical Reviews* und der *Referativnij Journal Matematika*.

Insgesamt werden jährlich vom Zentralblatt und von den *Mathematical Reviews* jeweils etwa 60.000 Arbeiten aus ca. 700 Zeitschriften referiert. Sie können sich vorstellen, wie umfangreich dann diese Zeitschriften werden. In der

Tat bringen es die Referatzeitschriften jährlich auf etwa einen laufenden Meter. Daher hat man vor einigen Jahren auch angefangen, die Daten nicht nur auf Papier, sondern auch auf CD-ROM zur Verfügung zu stellen.

Die Aufgabe der Referatzeitschriften besteht aber nicht nur darin, eine Kurzbeschreibung der Arbeit zur Verfügung zu stellen, sondern auch, die referierte Arbeit in ein spezielles mathematisches Gebiet einzuordnen. Man hat dazu die Mathematik nach einem gewissen Schema in Gebiete eingeteilt. Das geschieht zunächst grob: Algebra, Geometrie, Analysis, Stochastik usw. Jedes Gebiet wird dann nochmals in verschiedene Ebenen unterteilt. Obige Arbeit wurde beispielsweise dem Gebiet 51 E 20 zugeteilt. Dabei bedeutet „51“ Geometrie, „E“ heißt endliche Geometrie und „20“ zeigt an, dass es sich um das Spezialgebiet „kombinatorische Strukturen in endlichen projektiven Räumen“ handelt.

Das Verzeichnis all dieser Gebiete ist ein Heft von 50 eng bedruckten Seiten. Unten ist eine typische Seite abgedruckt. Jeder Mathematiker kennt sich nur in wenigen dieser Gebiete wirklich aus. Auf der abgebildeten Seite sind diejenigen Gebiete (dieser Seite) hervorgehoben, von denen ich sagen würde: Da fühle ich mich kompetent.

Also keine Spur von „in der Mathematik ist bereits alles erforscht“ – ganz im Gegenteil: Wie in allen anderen Wissenschaften auch ertrinken die Mathematiker in der Fülle der Information.

Wie konnte es zu dem Vorurteil „in der Mathematik nichts Neues“ kommen? Kein Mensch würde auf den Gedanken kommen, in der Physik, in der Biologie, in der Medizin sei bereits alles erforscht. Es wird höchstens die Frage gestellt, ob in diesen Wissenschaften die „richtigen“ Dinge erforscht werden.

Meinem Eindruck nach kommt dieses Vorurteil durch die Art und Weise zustande, wie Mathematik unterrichtet wird. Im Mathematikunterricht der Schule und in den Vorlesungen an den Universitäten wird die Mathematik als ein in der Regel abgeschlossenes Gebiet von Begriffen, Sätzen und Methoden präsentiert. Schüler und Studierende erleben Mathematik als eine für sie unzugängliche Wissenschaft, als ein zumindest scheinbares Gebiet.

Nur selten einmal haben Schüler oder Studierende die Möglichkeit, selbst Begriffe zu suchen, selbst Verfahren zu entwickeln, selbst Sätze zu entdecken. Schade. Denn so könnten Schüler und Studierende erleben, dass Mathematik eine quicklebendige Wissenschaft ist, die dann Spaß macht, wenn man sie aktiv betreibt!

51Dxx Geometric closure systems

- 51D05 Abstract (Maeda) geometries
- 51D10 Abstract geometries with exchange axiom
- 51D15 Abstract geometries with parallelism
- 51D20 Combinatorial geometries [See also 05B25, 05B35]
- 51D25 Lattices of subspaces [See also 05B35]
- 51D30 Continuous geometries and related topics [See also 06Cxx]
- 51D99 None of the above, but in this section

51Exx Finite geometry and special incidence structures

- 51E05 General block designs [See also 05B05]
- 51E10 Steiner systems
- 51E12 Generalized quadrangles, generalized polygons
- 51E14 Finite partial geometries (general), nets, fractal spreads
- 51E15 Affine and projective planes
- 51E20 Combinatorial structures in finite projective spaces [See also 05B05, 05B25]
- 51E21 Blocking sets, ovals, k-arcs
- 51E22 Linear codes and caps in Galois spaces [See also 94B05]
- 51E23 Spreads and packing problems
- 51E24 Buildings and the geometry of diagrams [See also 20E42]
- 51E25 Other finite nonlinear geometries
- 51E26 Other finite linear geometries
- 51E30 Other finite incidence structures [See also 05B30]
- 51E99 None of the above, but in this section

51Fxx Metric geometry

- 51F05 Absolute planes
- 51F10 Absolute spaces
- 51F15 Reflection groups, reflection geometries [See also 20H10, 20H15; for Coxeter groups see 20F55]
- 51F20 Congruence and orthogonality [See also 20H05]
- 51F25 Orthogonal and unitary groups [See also 20H05]
- 51F99 None of the above, but in this section

51G05 Ordered geometries (ordered incidence structures, etc.)**51Hxx Topological geometry**

- 51H05 General theory
- 51H10 Topological linear incidence structures
- 51H15 Topological nonlinear incidence structures
- 51H20 Topological geometries on manifolds [See also 57-XX]
- 51H25 Geometries with differentiable structure [See also 53Cxx, 53C70]
- 51H30 Geometries with algebraic manifold structure [See also 14-XX]
- 51H99 None of the above, but in this section

51Jxx Incidence groups

- 51J05 General theory
- 51J10 Projective incidence groups
- 51J15 Kinematic spaces
- 51J20 Representation by near-fields and near-algebras [See also 12K05, 16Y30]
- 51J99 None of the above, but in this section

51Kxx Distance geometry

- 51K05 General theory
- 51K10 Synthetic differential geometry
- 51K99 None of the above, but in this section

51Lxx Geometric order structures [See also 53C75]

- 51L05 Geometry of orders of nondifferentiable curves
- 51L10 Directly differentiable curves.
- 51L15 n-vertex theorems via direct methods
- 51L20 Geometry of orders of surfaces
- 51L99 None of the above, but in this section

51Mxx Real and complex geometry

- 51M04 Elementary problems in Euclidean geometries
- 51M05 Euclidean geometries (general) and generalizations
- 51M09 Elementary problems in hyperbolic and elliptic geometries
- 51M10 Hyperbolic and elliptic geometries (general) and generalizations
- 51M15 Geometric constructions
- 51M16 Inequalities and extremum problems [For convex problems see 52A40]
- 51M20 Polyhedra and polytopes; regular figures, division of space [See also 51F15]
- 51M25 Length, area and volume [See also 26B15]
- 51M30 Line geometries and their generalizations
- 51M35 Synthetic treatment of fundamental manifolds in projective geometries (Grassmannians, Veronesians and their generalizations) [See also 14M15]
- 51M99 None of the above, but in this section

51Nxx Analytic and descriptive geometry

- 51N05 Descriptive geometry [See also 65D17, 68U07]
- 51N10 Affine analytic geometry
- 51N15 Projective analytic geometry
- 51N20 Euclidean analytic geometry
- 51N25 Analytic geometry with other transformation groups
- 51N30 Geometry of classical groups [See also 20Gxx, 14L35]
- 51N35 Questions of classical algebraic geometry [See also 14Nxx]
- 51N99 None of the above, but in this section

51P05 Geometry and physics [Should also be assigned at least one other classification number from Sections 70 - 86]



Martin Aigner

Die pure Eleganz der Mathematik

Wie allgemein bekannt, unterscheiden sich Mathematiker erheblich von der Mehrheit ihrer Mitmenschen. Man braucht nur einige von Enzensbergers Gedichten zu lesen, in denen er staunend feststellt, dass sie (die Mathematiker) sich vornehmlich in gekrümmten Räumen aufhalten und ohne weiteres Links- mit Rechtsidealen vertauschen, ganz zu schweigen von Unterkörpern, die für sie etwas ganz anderes bedeuten, als der unbefangene Beobachter meinen könnte.

Hier wollen wir uns mit einem weiteren Unterschied befassen, der geradezu mitten ins Leben greift. Während sich die Mehrheit über die wirklich wichtigen Dinge wie Mülltrennung oder Zahnpflege einig ist, sich aber über künstlerische Dinge lustvoll auseinander setzt (der Volksmund sagt bekanntlich: Über Geschmack lässt sich nicht streiten – und meint natürlich das Gegenteil), so ist das in der mathematischen Welt genau umgekehrt. Spätestens seit Plato stehen sich Platonisten und Formalisten

*»[...] es ist durchaus kein Zufall, dass den meisten Mathematikern ästhetische Kriterien nicht fremd sind. Es genügt ihnen nicht, dass ein Beweis stringent ist; ihr Ehrgeiz zielt auf ›Eleganz‹.«
H. M. Enzensberger*

ideologiebewehrt gegenüber; der Disput, ob mathematische Gesetze entdeckt oder erfunden werden, ist ein Dauerbrenner; und die Frage über den Primat von reiner versus angewandter Mathematik kann ganze Institute in Aufregung versetzen. Aber wenn sich zwei Mathematiker über ein Blatt Papier beugen und der eine sagt: »Das ist ein ausgesprochen eleganter Beweis!«, kann er sich der Zustimmung seines Kollegen sicher sein. Über Schönheit und Eleganz von mathematischen Formeln, Sätzen und insbesondere Beweisen gibt es keinen Disput, da sind sich alle einig.

Aber was ist nun Eleganz in der Mathematik? Merkwürdigerweise lässt sich darüber bei den Großschreibern

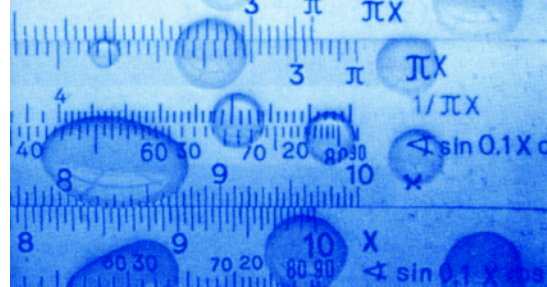
der Zunft nichts erfahren (wohl aber über Schönheit, wie wir gleich sehen werden). Ich will die Leser ein wenig in die mathematische Welt verführen, eine ganz persönliche Definition von Eleganz vorschlagen und sie mit einigen klassischen Beispielen illustrieren.

Vom Schönen und Wahren

Als 1995 Andrew Wiles das berühmteste offene mathematische Problem, die Fermat'sche Vermutung, bewies, war dies allen Zeitungen eine Schlagzeile auf Seite eins wert. In einer überregionalen Zeitung stand zu lesen: »Rechenkünstler aus Cambridge löste 350 Jahre altes mathematisches Rätsel«. Die virtuose Abfolge von logischen Schlüssen und Strukturaussagen in der Arbeit von Wiles als Rechnen zu bezeichnen könnte der Wahrheit nicht ferner sein. Aber offenbar ist es allgemeine Ansicht, dass ein Mathematiker jemand ist, der 99 Formeln durcheinander mischt und daraus eine 100. Formel gebiert.

Was einige der größten Mathematiker dazu meinen, hört sich anders an. Aristoteles schreibt in seiner *Meta-physik*: »Insbesondere die mathematischen Wissenschaften drücken Ordnung, Symmetrie und Beschränkung aus – und dies sind die höchsten Formen der Schönheit.« Johannes Kepler, der ohnehin zum Schwärmen neigte, war hingerissen von den »goldenen« Proportionen der Mathematik. Henri Poincaré postulierte den erstaunlichen Satz: »Das Ästhetische mehr als das Logische ist die dominierende Komponente in der mathematischen Kreativität.« G. H. Hardy, ein Meister der Zahlentheorie, die notorisch komplizierte Formeln hervorbringt, merkte mit untypischem britischen Overstatement an: »There is no permanent place for ugly mathematics!« Ich hoffe, Ihre Sicht des Mathematikers als rigorosem Rechenmeister endgültig erschüttert zu haben, wenn ich den Physiker Paul Dirac zitiere: »Es ist wichtiger, dass eine Gleichung schön ist, als dass sie mit dem Experiment übereinstimmt.« Am prägnantesten beschreibt diese Gegenwart des Schönen vielleicht Hadamard in seiner *Psychology of Invention*: »Das mathematische Genie offenbart sich in zwei Weisen; es wählt mit untrüglicher Sicherheit unter einer Vielzahl von Alternativen die einzig richtige, und es wird dabei geleitet von der Idee des Vollkommenen, einer Ahnung vom Paradies, vom ewig Gültigen.«

Man sollte nun nicht meinen, die Mathematiker hät-



ten sich in ihren Meta-Schriften nur mit dem Schönen beschäftigt – ganz im Gegenteil. In der Hauptsache geht es um Mathematik als Denkmodell, als Abbild der Wirklichkeit, kurz: um Erkenntnis und Wahrheit. Derselbe Poincaré schreibt in seinen *Letzten Gedanken* sinngemäß: Wissenschaft ist der Drang nach Wahrheit auf sittlicher Basis. Wittgenstein betont die kategorische Strenge der Logik, und Popper führte das masochistische Prinzip in die Wissenschaft ein: Eine Theorie ist nur dann etwas wert, wenn sie falsifizierbar ist. Man liest Sätze wie: »Nur der Nutzen adelt die Erkenntnis«, »Mathematik ist Humanismus«, und in dem vielleicht besten neueren Buch *Erfahrung Mathematik* von Davis und Hersh sind ganze vier von 400 Seiten Fragen der Ästhetik gewidmet.

Auch wenn der ästhetische Aspekt in den Hintergrund tritt, scheint er ein einigendes Band zu sein. Wenn ein Gutachter die bedeutenden Anwendungen einer mathematischen Arbeit herausstellt, so wird der Autor erfreut sein; schreibt er aber in seinem Referat: »The beauty of the theorem is matched by the elegance of its proof«, so kann er sich der Rührung und des ewigen Dankes des Verfassers sicher sein.

Das Buch der Beweise

Legenden werden üblicherweise nach dem Tod gestrickt. Entstehen sie zu Lebzeiten, so muss es sich um einen außergewöhnlichen Menschen handeln – und der ungarische Mathematiker Paul Erdős war solch eine Jahrhunderterscheinung. Er war der produktivste Mathematiker der jüngeren Geschichte mit über 1 500 Veröffentlichungen. Unermüdlich reiste er von Kontinent zu Kontinent, die eine Woche in Jerusalem, dann in den USA, und nächsten Monat war ein Touch-down in Berlin fällig. Mit seinem einen Koffer in der Hand war seine Begrüßung zugleich sein Motto: »My brain is open.« Gleichermaßen großzügig im Leben wie in der Wissenschaft, verschenkte er nicht nur die meisten seiner vielen Preisgelder, sondern teilte auch seine Ideen und Geistesblitze mit jedem, der sie hören wollte. Er lebte für die und in der Mathematik. Es gibt zahllose Anekdoten über Erdős, die folgende hat den Vorzug, wahr zu sein, weil ich selber dabei war. Eines Abends gegen 22 Uhr saßen wir zu dritt in New York über einem Problem, besser gesagt: Wir saßen fest und kamen nicht weiter. Plötzlich sagte Erdős: »Am besten,

Manche Beweise sind wunderschön, sie haben nur den kleinen Makel, dass sie falsch sind. Wieder andere sind richtig, aber hässlich.



*Ein Computer-Beweis ist weder transparent noch von
Leichtigkeit beseelt, aber vor allem lehrt er uns nichts.*

wir rufen meinen Freund Davenport in Cambridge an, der kann uns bestimmt weiterhelfen.« – »Aber«, so wandte ich ein, »in Cambridge ist es jetzt 4 Uhr morgens.« Darauf Erdős: »Na umso besser, dann ist er sicher zu Hause.«

Ein immer wiederkehrendes Diktum von Paul Erdős führt geradewegs zu unserem Thema. Manche Beweise, erzählte er, sind wunderschön, sie haben nur den kleinen Makel, dass sie falsch sind. Wieder andere sind richtig, aber hässlich. Aber, so war er überzeugt, für jeden mathematischen Satz gibt es *den* Beweis, und mehr noch: Es gibt das BUCH, in dem der liebe Gott die perfekten Beweise aufbewahrt. Und er fügte hinzu: »Man muss nicht an Gott glauben, aber als Mathematiker sollte man an die Existenz des Buches glauben.« Mitte der neunziger Jahre schlugen Günter Ziegler und ich ihm vor, gemeinsam eine erste (und sehr bescheidene) Annäherung an das BUCH aufzuschreiben. Erdős hat die Idee enthusiastisch aufgegriffen, die Fertigstellung von *Proofs from the BOOK* aber nicht mehr erlebt. Wahrscheinlich wäre er weniger als wir über die überwältigende Resonanz auf das BUCH überrascht gewesen. Mathematiker sind in der Mehrzahl introvertierte Menschen. Die ungezählten Zuschriften, die wir erhielten, mit Vorschlägen, Korrekturen, eigenen Erlebnissen und viel Zustimmung, kommen daher einem veritablen Gefühlsausbruch gleich. Das BUCH hatte offenbar eine Saite zum Schwingen gebracht, die jedem mathematischen Instrument zu Eigen ist – mit Eleganz als gemeinsamer Grundstimmung.

Die Leichtigkeit des Augenblicks

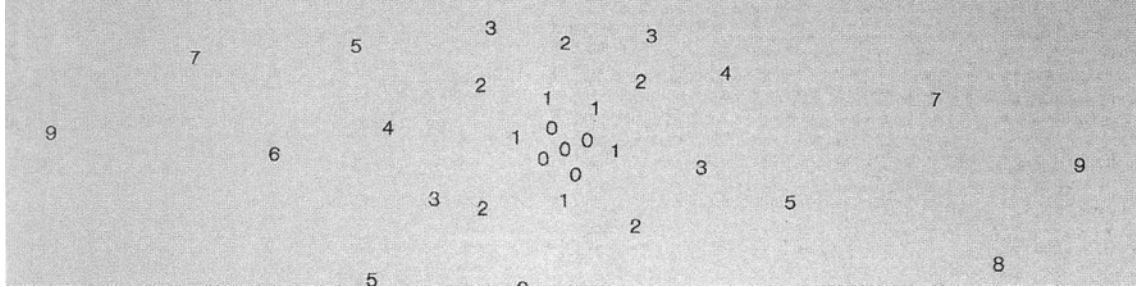
Das Wesen der Mathematik ist das Beweisen von Sätzen – und das ist es, was Mathematiker tun: Sie beweisen Sätze. Aber, um ehrlich zu sein, was sie wirklich beweisen wollen, wenigstens einmal in ihrem Leben, ist ein Lemma, wie das Lemma von Fatou in der Analysis oder das von Gauß in der Zahlentheorie. Mit fast jedem berühmten Namen ist solch ein Lemma verbunden – das Wort hat für Mathematiker-Ohren einen fast mythischen Klang.

Nun, wann wird eine mathematische Aussage ein wirkliches Lemma? Zunächst sollten die Aussage (und der Beweis) vollkommen transparent sein: Das Komplex wird einfach und folgerichtig, und man weiß: That's it!

Auch ein akuter Anfall des *Livor academicus* (einer besonders häufigen Form des gemeinen Neides) ist denkbar: Warum habe ich das nicht gesehen? Zweitens sollte der Satz stringent sein (oder im mathematischen Jargon: tief). Der Beweis zeigt auf, worauf es wirklich ankommt; er hat vielfältige Anwendungen, sogar auf Probleme, die nichts miteinander zu tun zu haben scheinen. Und schließlich sollte ein Moment der Leichtigkeit vorliegen. Jeder Wissenschaftler hat einen Sack voll Methoden, den er immer wieder öffnet (von manchen, auch prominenten, heißt es, sie hätten mit nur einer Idee ganze Disziplinen beherrscht). Aber es gibt diese Ausnahmekönner, die ein Problem der Algebra mit Methoden der Topologie lösen und umgekehrt, die uns zeigen, dass die Mathematik in all ihrer Vielfalt eine wunderbare Einheit bildet, die uns die Leichtigkeit des Denkens für einen Augenblick erahnen lässt. Transparenz, Stringenz und Leichtigkeit bilden also den Dreiklang eines eleganten Beweises.

Als 1976 das berühmte und seit 100 Jahren offene Vier-Farben-Problem mit enormem Computereinsatz gelöst wurde, zog dies eine bis heute andauernde Kontroverse nach sich: Ist solch ein Beweis akzeptabel? Ein computergestützter Beweis derartiger Länge ist für den, der nicht über ähnliche Rechnerkapazität verfügt, nicht nachzuprüfen. Er ist, überspitzt formuliert, mehr eine Glaubenssache als ein mathematisches Faktum. Solche Einwände sind heute, auch aufgrund gestiegener Rechenleistung, nicht wirklich relevant. Der Computer macht nichts anderes als die Mathematiker mit Bleistift und Papier: Er geht Schritt für Schritt voran, bis das Resultat vorliegt. Aber das ist genau der springende Punkt: Ein Computer-Beweis ist weder transparent noch von Leichtigkeit beseelt, aber vor allem lehrt er uns nichts. Er zerhackt das Problem in endlich viele Einzelfälle und schließt dann einen Fall nach dem anderen aus, kurz: Er erschlägt den Satz, statt ihn zu erklären.

Der Physiker Eugene Wigner wird oft mit dem Wort von der »unreasonable effectiveness of mathematics« zitiert. Bescheidener drückt dies Erwin Schrödinger aus: »Ob die Natur nach mathematischen Gesetzen funktioniert, wissen wir nicht, aber wir haben vorläufig nichts Besseres.« Ich möchte Wigners Bonmot mit dem Satz von der »unreasonable beauty of mathematics« ergänzen. »Die schöne Formel ist oft nahe an der wahren Natur,



und der elegante Beweis ist oft auch derjenige, der uns den größten Erkenntnisgewinn beschert.«

Vom Unendlichen ...

Nun ist es aber an der Zeit, ein paar Beispiele solch eleganter Beweise zu präsentieren. Der Klassiker schlechthin ist Euklids Beweis der Unendlichkeit der Primzahlen. Eine Primzahl ist bekanntlich eine Zahl größer als 1, die nur durch sich selbst und 1 teilbar ist. Jeder kennt die ersten Primzahlen 2, 3, 5, 7, 11, 13, und heute kann man Primzahlen mit Millionen von Stellen konstruieren, aber auch die raffiniertesten Methoden liefern bis jetzt nur endlich viele. Gibt es vielleicht nur endlich viele? Nein, und der Beweis der Unendlichkeit, der Euklid zugeschrieben wird, ist von bestechender Einfachheit. Euklid argumentierte indirekt: Angenommen, es gäbe nur endlich viele Primzahlen, nennen wir sie p_1, p_2, \dots, p_k . Dann bilden wir die neue Zahl $M = p_1 \times p_2 \times \dots \times p_k + 1$. M hat einen Primteiler p , und dieser Teiler muss nach unserer Annahme unter den p_i vorkommen. Damit teilt p die Zahl M , das Produkt $p_1 \times \dots \times p_k$, also auch die Differenz 1. Die Zahl 1 hat aber keine Primteiler! – Widerspruch und Ende des Beweises.

Es gibt Dutzende weiterer amüsanter und lehrreicher Beweise für diesen Satz, aber der euklidische ist ein Muster an Transparenz und Leichtigkeit, und er arbeitet auch die Gründe für die Unendlichkeit heraus. Sieht man sich die Argumentation genau an, so erkennt man, dass sie auf zwei Tatsachen beruht: Es gibt unendlich viele Zahlen, 1, 2, 3, 4, ..., und jede Zahl größer als 1 besitzt einen Primteiler. Man kann also einen analogen Schluss auf jedes algebraische System anwenden, das denselben Bedingungen genügt.

Thomas von Randow alias Zweistein, der jahrzehntelang die Wissenschaftsredaktion der *Zeit* leitete, brachte einmal in einer Augustnummer den Beweis von Euklid und resümierte ihn kurz: So viele Primzahlen ich auch habe, es gibt stets noch eine weitere, also unendlich viele. Wie immer erhielt er eine Anzahl von Zuschriften, darunter auch von einer Hausfrau in Bayern, die ihm schrieb: »Sehr geehrter Herr von Randow, ich sitze hier am Ammersee inmitten einer Heerschar von Mücken. So viele ich auch erschlage, es gibt immer noch eine weitere, kann ich daher schließen ...?« Ja, ein Journalist hat es auch nicht leicht.

Mit Unendlichkeiten ganz anderer Art befasste sich Georg Cantor, der Schöpfer der Mengenlehre. Seine ra-

dikale Neubegründung der Mathematik wurde ebenso kompromisslos von vielen seiner Zeitgenossen abgelehnt, so dass der große David Hilbert ihm mit dem Ruf zu Hilfe eilen musste: »Niemand wird uns aus dem Paradies vertreiben, das Cantor für uns geschaffen hat!« Eine seiner größten Leistungen betraf die Frage: Wann sind zwei Mengen gleich groß? Für endliche Mengen bereitet dies natürlich kein Problem: Wir zählen sie einfach ab, und wenn dieselbe Anzahl herauskommt, dann (und nur dann) sind die Mengen gleich groß. Aber wie ist es mit unendlichen Mengen? Gibt es verschiedene große Unendlichkeiten? Machen wir das folgende Gedankenexperiment: Nehmen wir an, einige Personen steigen in einen Bus; können wir feststellen, ob die Anzahl der Leute gleich jener der Sitze ist, ohne die Personen zu zählen? Natürlich geht das: Der Busfahrer ruft »Setzen«, und falls jede Person einen Sitz findet und kein Sitz frei bleibt, dann sind die beiden Mengen (der Leute und der Sitze) gleich groß. Mit anderen Worten, die beiden Mengen sind gleich groß, wenn es eine eindeutige Zuordnung oder, wie die Mathematiker sagen, eine Bijektion zwischen ihnen gibt.

Diese Idee übertrug Cantor nun auf ganz beliebige Mengen A und B : Sie sind gleich groß, wenn es eine Bijektion von A auf B gibt. Für endliche Mengen entspricht dies, wie gesehen, genau unserem gewohnten Zählbegriff, aber für unendliche Mengen wird Cantors Theorie sehr interessant und in hohem Maße nicht-intuitiv. Nehmen wir zum Beispiel die Menge $N = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ der natürlichen Zahlen. Wir nennen eine beliebige Menge A abzählbar, falls sie bijektiv auf N abgebildet werden kann, oder anders ausgedrückt, wenn die Elemente von A in der Form a_1, a_2, a_3, \dots durchnummeriert werden können. Aber jetzt passiert etwas Unerwartetes. Angenommen, wir geben zu A ein weiteres Element z hinzu. Dann ist A zusammen mit z immer noch abzählbar und daher gleich groß wie A , obwohl doch A in der Menge A plus z enthalten ist! Eine hübsche Illustration für dieses merkwürdige Phänomen ist »Hilberts Hotel«: Es hat abzählbar viele Zimmer mit den Nummern 1, 2, 3, 4 und so weiter, und es ist vollkommen ausgebucht. Nun kommt ein neuer Gast an und verlangt ein Zimmer, worauf der Hotelmanager sagt: Tut mir Leid, alle Zimmer sind belegt. Kein Problem, sagt der Gast: Bitten Sie doch den Gast aus Zimmer 1, in Zimmer 2 zu übersiedeln, den aus Zimmer 2 in Zimmer 3, und so fort – und dann nehme ich das freigewordene Zimmer 1. Zur Überraschung des Managers



(er ist des Unendlichen nicht so recht mächtig) funktioniert das: Er kann wieder alle Gäste unterbringen und den neuen Gast dazu.

... zum Unvollständigen

Verlassen wir ›Hilberts Hotel‹ und sehen wir uns ein paar vertraute Zahlbereiche an. Die Menge Z der ganzen Zahlen (positiv, negativ und 0) ist wieder abzählbar, da wir Z in der Form $Z = \{0, 1, -1, 2, -2, \dots\}$ durchnummern können. Auch die Menge aller Brüche ist nach wie vor abzählbar. Und wie ist es mit den reellen Zahlen R ? Hier konnte Cantor mit einer genialen Idee zeigen, dass R *nicht* mehr abzählbar ist. Wie schon Euklid argumentierte Cantor indirekt. Betrachten wir die reellen Zahlen zwischen 0 und 1. Jede solche Zahl r ist ein nicht endender Dezimalbruch $r = 0, r_1 r_2 r_3 \dots$ so wie etwa $\frac{1}{3} = 0,33333\dots$. Angenommen, diese Zahlen könnten nummeriert werden, dann schreiben wir sie in einem Schema untereinander:

$$r_1 = 0, \mathbf{r_{11}} r_{12} r_{13} \dots$$

$$r_2 = 0, r_{21} \mathbf{r_{22}} r_{23} \dots$$

$$r_3 = 0, r_{31} r_{32} \mathbf{r_{33}} \dots$$

Die ›Diagonale‹ des Schemas ist hervorgehoben, also die Zahlen $r_{11}, r_{22}, r_{33} \dots$. Wir wählen nun für jeden Index n eine Kommastelle $b_n \neq 0$, welche verschieden von r_{nn} ist (offensichtlich ist dies möglich), und bilden $b = 0, b_1 b_2 b_3 \dots$. Da die Zahl b zwischen 0 und 1 liegt, muss sie in unserer Liste vorkommen und hat daher einen Index, sagen wir $b = r_k$. Aber das geht nicht, da $b_k \neq r_{kk}$ ist – und das ist der ganze Beweis!

Diese verblüffende Diagonalisierungsmethode von Cantor ist zu Recht in den Olymp der Mathematik aufgestiegen: Kürzer und eleganter geht es wirklich nicht! Und was die Stringenz betrifft, so führt sie uns bis an die Wurzeln der mathematischen Erkenntnis. Mit einer ganz ähnlichen Diagonalisierung bewies Kurt Gödel seinen Unvollständigkeitssatz, der von vielen als das bedeutendste mathematische Ergebnis des letzten Jahrhunderts angesehen wird. Dabei geht es um Folgendes: Gödel zeigte, dass es in jedem formalen System, in dem wir Schlüsse aufgrund unserer logischen Regeln ziehen, immer Sätze gibt, die innerhalb dieses Systems nicht bewiesen werden können. Und jetzt kommt die Pointe: Einer dieser Sätze ist die Widerspruchsfreiheit der Mathematik

selbst! Wir werden niemals wissen, ob die Mathematik, wie wir sie betreiben, nicht einen Widerspruch in sich enthält und alles wie ein Kartenhaus zusammenstürzt.

Und wenn es denn so ist, dass die Mathematik eine pure Ausgeburt des Gehirns ist (es ist ja alles in der Mathematik erdacht), sie aber möglicherweise widerspruchsvoll ist, liegt da nicht der Rückschluss nahe, dass unser Gehirn vielleicht nicht ganz richtig verdrahtet ist oder dass es ganz anders funktionieren könnte und damit auch eine ganz andere Mathematik möglich und denkbar ist? Der Unvollständigkeitssatz ist sozusagen die Erbsünde der Mathematik. Wie Katholiken um die Erbsünde wissen (und sich nicht weiter darum kümmern), so wissen auch die Mathematiker um den schwankenden Grund, auf dem sie sich bewegen: Sie schreiben trotzdem ihre Bücher und beweisen ihre Sätze, immer in der Hoffnung, dass ihre Theoreme dereinst Eingang finden in das Paradies der ewigen Wahrheiten – und der eleganten Beweise.

Literatur

M. Aigner und G. M. Ziegler: Das Buch der Beweise. Berlin/Heidelberg/New York 2002

P. J. Davis und R. Hersh: Erfahrung Mathematik. Basel/Boston/Stuttgart 1985

J. Hadamard: The Psychology of Invention in the mathematical Field. Princeton 1945

G. H. Hardy: A Mathematician's Apology. Cambridge 1969

H. Poincaré: Letzte Gedanken. Leipzig 1913

B. Schechter: My Brain is open, the mathematical Journeys of Paul Erdős. Oxford 1998

Günter M. Ziegler

Wo Mathematik entsteht: Zehn Orte

Wo entsteht Mathematik? Im Kopf! Mathematik wird aus Ideen gemacht.

Wer Mathematiker und Mathematikerinnen nach dem Moment, dem Ort und dem Zeitpunkt fragt, ›wo die entscheidende Idee entstand‹, wird meist keine befriedigende Antwort bekommen. Mathematische Ideen entstehen nicht im Labor, nur selten planmäßig aufgrund intensiven Nachdenkens, sondern als Schritte und Sprünge entlang eines Weges, der sich ›durchs Leben zieht‹.

Zum Mathematik-Machen braucht man sehr wenig. Papier und Stift sind wohl die Standardausstattung (für mich etwa: Karopapier und ein Druckbleistift), aber Nachdenken geht im Kopf, Nachrechnen etwa im Laptop. Die Laborausstattung des Mathematikers ist also sehr bescheiden, und seine Labore sind transportabel. Deshalb ist der ›Ort, wo Mathematik entsteht‹, nicht durch Sachzwänge festgelegt; mathematische Ideen sind nicht durch ihre Produktionsmittel und Produktionsbedingungen lokalisierbar.

Wer als Mathematiker Ideen entwickeln will, muss sich frei machen von den Zwängen der Schreibtische. Er muss Zeit finden zum Nachdenken, muss Überlegungen nachhängen können, muss Ruhe und Muße haben, muss sich konzentrieren oder ausspannen. Er muss gedanklich auf die Reise gehen können. Dafür gibt es kein Erfolgsrezept. Mathematik ist vielfältig, und die Mathematiker sind vielfältig, auch wenn man weiter versucht, sie in grauhaarige Stereotypen mit dicker Brille zu pressen. Die Orte, an denen mathematische Ideen entstehen, spiegeln das wider. Wir machen deshalb einen Ausflug in die Vielfalt und nähern uns anekdotisch der Frage, wie und wo Mathematiker arbeiten, wie und wo ›Mathematik entsteht‹.

1) Am Schreibtisch

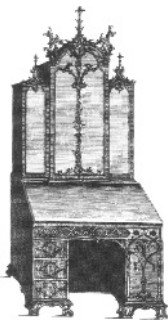
»Der Mathematiker ist ein mythologisches Wesen, halb Mensch, halb Stuhl.« So wird Simon Golin zitiert. Natürlich entsteht viel Mathematik am Schreibtisch, und oft ist ›die entscheidende Idee‹ einfach im Lauf einer langen Rechnung, einer Folge kleiner Skizzen, beim Ausarbeiten von Beispielen am Schreibtisch entstanden. ›Der Schreibtisch‹ markiert dabei einen Ort der Ruhe, der Konzentration ohne Ablenkung.

Der schwere, primitiv anmutende Labortisch, an dem Otto Hahn die Kernspaltung entdeckte, wird im Deutschen Museum in München ausgestellt. Das Arbeitszimmer von Thomas Mann kann man in Zürich im Original bestaunen. Ich weiß von keinem Mathematiker-Arbeitsplatz, der in einem Museum ausgestellt wird. Und vermutlich wird das auch in Zukunft nicht passieren – auch, weil die Schreibtische der Wissenschaftler wegen der Stapel von Forschungsantragsformularen für Exzellenzinitiativen nur noch eingeschränkt zum Forschen nutzbar sind.

Von Leonhard Euler (1707–1783) wird berichtet, dass er konzentriert und effektiv am Schreibtisch arbeiten und schreiben konnte, während seine vielen Kinder auf seinem Rücken herumturtelten und zwischen seinen Beinen spielten. Euler, einer der produktivsten Mathematiker der Neuzeit, war offenbar ohnehin kaum abzulenken: Auch die Erblindung 1771 hat seine Produktivität nicht ernsthaft eingeschränkt; fast die Hälfte seiner Werke entstand danach.

2) Im Computer

Ein Computer kann keine Ideen haben und deshalb auch keine Mathematik machen. Aber es gibt Entdeckungen am Computer, im Computer, die ohne Computer nicht möglich wären. Zu diesen Entdeckungen zählt sicher das



berühmte Apfelmännchen; die bemerkenswerten fraktalen Strukturen, die unter Iterationen entstehen, sind ohne Rechner (und Bildschirm) nicht zu sehen.

Aber auch tief in den Zahlen stecken Geheimnisse, die man ohne Computer nicht entdecken würde. Da ist zum Beispiel die Beobachtung, die ein gewisser Roy D. North in den siebziger Jahren in Kanada gemacht hat. Sie bezieht sich auf eine der schönsten Formeln der Mathematik – von Leonhard Euler, 1734: Wenn man die Inversen aller Quadratzahlen aufaddiert, also $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots$, so erhält man laut Euler ein Sechstel von π^2 . Dieses wunderbare, wichtige Ergebnis hat eine Vielzahl von brillanten Beweisen, Verallgemeinerungen und Anwendungen ermöglicht.

Die Euler-Summe ist eine *unendliche Reihe*, unendlich viele Terme sind aufzusummieren, und das Ergebnis ist eine *irrationale Zahl*, 1,64493406684822643647... Wenn man die Summe auf dem Computer bildet und diesen genau genug rechnen lässt, dann die Summe nach einer Million Terme abbricht, so erhält man die Summe auf fünf Stellen genau, 1,64493306684872643630... Dass die sechste Stelle falsch ist, muss hier nicht überraschen: Die unendliche Summe konvergiert eben nicht besonders gut. Dass aber die siebte, achte, neunte, zehnte, elfte und zwölfte Stelle alle wieder richtig sind, das ist überraschend! Dass die Fehler also ungefähr an sechster, zwölfter, achtzehnter usw. Stelle auftreten und die Größe der Fehler auch ganz systematisch ist, wobei die *Bernoulli-Zahlen* $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, 0, -\frac{1}{30}, 0, \frac{1}{42}, \dots$ eine wichtige Rolle spielen, das ist »von Hand« nicht zu errechnen oder »mit dem bloßen Auge« nicht zu erkennen, auch nicht für meisterhafte Rechner wie Euler, Gauß und Riemann, sondern eben nur mit einem modernen Computer, dem hoch entwickelte Mathematik in Form von Software zur Verfügung steht. Als mathematisches Resultat *formulieren* und das *beweisen* muss der Mathematiker dann aber doch, letztlich mit Papier und Bleistift. Das haben die Brüder Borwein und Karl Dilcher als Erste getan.

3) Im Bett

Die Konstruktion des regelmäßigen Siebzehnecks durch den jungen Carl Friedrich Gauß (1777–1855) beschreibt er selbst in einem Brief (Gauß und Gerling, S. 187f.):

»Das Geschichtliche jener Entdeckung ist bisher nirgends von mir öffentlich erwähnt, ich kann es aber sehr

genau angeben. Der Tag war der 29. März 1796, und der Zufall hatte gar keinen Anteil daran. [...] Durch angestrengtes Nachdenken über den Zusammenhang aller Wurzeln untereinander nach arithmetischen Gründen glückte es mir, bei einem Ferienaufenthalt in Braunschweig am Morgen des gedachten Tages (ehe ich aus dem Bette aufgestanden war) diesen Zusammenhang auf das klarste anzuschauen, so daß ich die spezielle Anwendung auf das 17-Eck und die numerische Bestätigung auf der Stelle (sic!) machen konnte.«

G. H. Hardy berichtet über den indischen Mathematiker Ramanujan, »the most romantic figure in the recent history of mathematics«:

»Ramanujan used to say that the goddess of Namakkal inspired him with the formulae in his dreams. It is a remarkable fact that frequently, on rising from bed, he would note down results and rapidly verify them, though he was not always able to supply a rigorous proof.

4) In der Kirche

Göttliche Inspiration ist vermutlich in kaum einer mathematischen Entdeckung nachweisbar. Aber warum soll nicht die feierliche Atmosphäre eines vatikanischen Gottesdienstes (inklusive der berausenden Wirkung des Weihrauchs) zu Ideen führen?

»Es ist überliefert, dass Dirichlet den entscheidenden Gedanken zum Beweis des [Einheiten-]Satzes fand, während er die Ostermesse in der Sixtinischen Kapelle des Vatikans hörte. [...] Für seine Arbeitsweise war es charakteristisch, dass er seine Überlegungen erst dann schriftlich formulierte, wenn er sie vollständig im Kopf durchdacht hatte«, schreibt Koch (S. 148) über Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805–1859), dessen 200. Geburtstag dieses Jahr gefeiert wurde.

5) In Gefangenschaft

Jean Leray (1906–1998) entwickelte seine tiefsten und wichtigsten Erkenntnisse, fundamentale Beiträge zur modernen algebraischen Topologie wie die Spektralsequenzen und die Theorie der Garben, im Kriegsgefangenenlager Edelbach in Österreich. Der napoleonische Offizier Jean-Viktor Poncelet entwickelte die projektive Geometrie in fünf Jahren russischer Kriegsgefange-

schaft. »Nothing is more favourable than prison for the abstract sciences«, schrieb André Weil – in deutscher Kriegsgefangenschaft.

6) Die Kaffeemaschine

Der legendäre ungarische Mathematiker Paul Erdős (1913–1996) liefert vielfältige Aspekte und Anekdoten zur Entstehung mathematischer Ideen. Jahrzehntlang reiste Erdős ohne feste Stelle und ohne festen Wohnsitz um die Welt, zu Gast bei Freunden und Bekannten. Erdős' alter Reisekoffer, der seinen gesamten Besitz enthielt, war 2003 im Museum ausgestellt, in der Ausstellung »10+5=GOTT« des Jüdischen Museums Berlin.

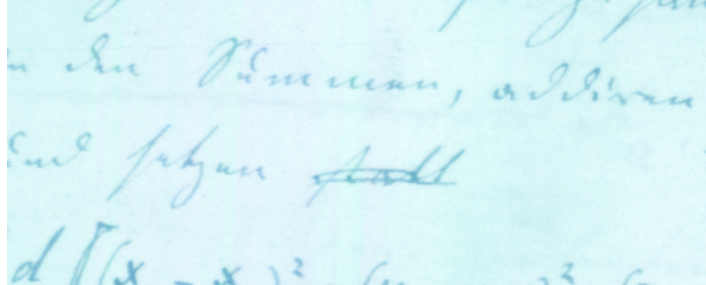
Wenn Erdős angekommen war auf dem Sofa im Wohnzimmer, eine Kaffeetasse in der Hand, fiel oft der Satz »My mind is open«: Mit dem Sofa und dem Kaffee waren die Voraussetzungen für Gespräche über Mathematik erfüllt. Dann können auch die Ideen kommen.

Erdős sagte: »A mathematician is a machine that converts coffee into theorems.« Meiner Erfahrung nach gibt es dabei keine Korrelation in der Qualität. Am Mathematik-Department des MIT wurde in den achtziger Jahren miserabler Kaffee in (teilweise) exzellente Mathematik überführt. Und in Berkeley wird auch immer noch zu viel »vanilla decaf low-fat cappuchino« konsumiert und trotzdem exzellente Mathematik gemacht. Erdős selbst brauchte Muntermacher und Schlaftabletten zusätzlich zum Koffein. Von einem Monat, den er (aufgrund einer Wette) ohne Tabletten durchhielt, sagte er: »It was a bad month for mathematics«.

7) Am Strand

Natürlich kann man als Mathematiker am Strand arbeiten, und Mathematiker tun das – gern und mit legendärem Erfolg. Stephen Smale berichtet über die Umstände seiner Arbeit 1960 in Rio de Janeiro:

»In a typical afternoon I would take a bus to IMPA and soon be discussing topology with Elon, dynamics with Mauricio or be browsing in the library. Mathematics research typically doesn't require much, the most important ingredients being a pad of paper and a ballpoint pen. In addition, some kind of library resources, and colleagues to query are helpful. I was satisfied.



Especially enjoyable were the times spent on the beach. My work was mostly scribbling down ideas and trying to see how arguments could be put together. Also I would sketch crude diagrams of geometric objects flowing through space, and try to link the pictures with formal deductions. Deeply involved in this kind of thinking and writing on a pad of paper, the distractions of the beach didn't bother me, moreover, one could take time off from the research to swim.«

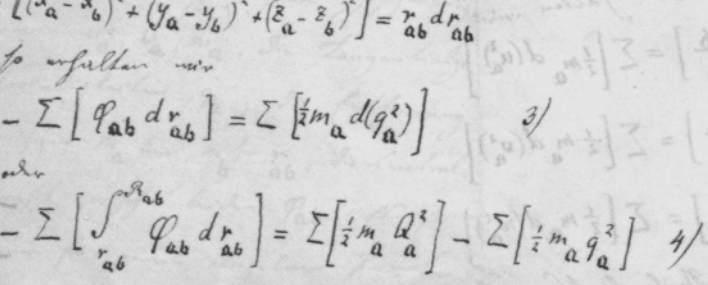
Smale wurde berühmt für seine Arbeiten aus Rio, darunter der Beweis der Poincaré-Vermutung für Dimensionen $n > 4$, und wichtige Einsichten zur Theorie der dynamischen Systeme. Die Behauptung »I did some of my best work on the beaches of Rio« hat Smale aber massiven Ärger eingebracht: Als man ihn wegen seines Engagements gegen den Vietnamkrieg angreifen wollte, wurde ihm das Arbeiten »on the beaches of Rio« vom Wissenschaftsberater des US-Präsidenten als Verschwendung von Steuergeldern vorgeworfen.

Das Arbeiten am Strand führt auch heute noch zu kuriosen Kontroversen. Die folgende Passage (Grötschel, S. 358) aus einer Festrede von Claude Berge wollte der Verlag zensieren, weil die Redakteurin die Passage für frauen-diskriminierend hielt:

»One may bump into Manfred here, there, everywhere, Berlin, Bonn, Lausanne, New York, Tampa, Hawaii, Grenoble, Paris, but do not interpret his work on the Traveling Salesman Problem in the context of his own peregrinations. If you meet him on the beach of Saint-Tropez, he will be very likely working on a portable, without a look to the sea or to a group of attractive ladies! My personal opinion is that Manfred Padberg is a perfect specimen of a new type of man, one who prefers spending his time in front of a computer. Maybe after *Homo Erectus*, *Neanderthals*, *Cro-Magnons*, *Homo Sapiens*, we are confronting a new breed of *Homo Mathematicus*?«

8) Paradiese für Mathematiker

Für viele Mathematiker ist die perfekte Arbeitsumgebung ein Ort wie das Mathematische Forschungsinstitut Oberwolfach im Schwarzwald, an dessen Eingangstür ein Amerikaner einmal die Ankommenen mit den Worten »Welcome to mathematicians' paradise« begrüßt haben soll.



Das Forschungs- und Tagungszentrum Oberwolfach liegt recht abgelegen im Schwarzwald. Es gibt dort Ruhe, gutes Essen, eine hervorragende Bibliothek, große Tafeln, einen Fotokopierer, Computer, mehrere Espressomaschinen, einen Billardtisch, einen Tischtennisraum, ein Musikzimmer, einen großen Weinkeller, lange Wanderwege und Kollegen aus aller Welt. Jede einzelne dieser Komponenten kann man je nach Geschmack und Stimmungslage exzessiv nutzen oder nicht, und vermutlich spielt fast jede eine bedeutende Rolle beim Entstehen von Ideen.

So existiert angeblich noch ein roter Tischtennisschläger aus Oberwolfach, auf dem Günter Frey (Essen) mit einem schwarzen Filzstift Günter Harder (Bonn) begeistert seine Idee erklärt hat, die den Ausgangspunkt zum Beweis der Fermat'schen Vermutung gebildet hat.

Im weiteren Gang der Geschichte spielt dann doch wieder ein Café eine wichtige Rolle, das Caffè Strada in Berkeley, wo ein junger Amerikaner, Ken Ribet, den nächsten wichtigen Schritt schaffte.

9) Ein Dachzimmer in Princeton

Der Beweis der Fermat'schen Vermutung durch Andrew Wiles – dass $x^n + y^n = z^n$ für $n > 2$ keine Lösung in positiven ganzen Zahlen hat – gehört zu den großen dramatischen Stoffen der modernen Wissenschaft. Dass einer sich sieben Jahre in ein Dachzimmer zurückzieht, um eines der ganz großen Probleme der Mathematik zu lösen, für die Lösung wie ein Held gefeiert wird, dass sich dann in der Lösung aber doch ein fataler Fehler findet, der Held sich noch einmal in sein Dachzimmer zurückzieht, den Fehler letztlich nicht korrigieren, aber mit einer neuen Idee umschiffen kann: Warum soll man das nicht mit antiken Heldentaten vergleichen?

Warum soll man sich wundern, dass eben nicht nur Homer ein Epos, sondern ein britischer Wissenschaftsjournalist einen Bestseller schreibt? Das Drama spielt nicht in einer griechischen Arena, sondern landet als Theaterstück und als Musical auf dem Broadway. Das sind eben die modernen Zeiten.

Darüber, wie und wo die entscheidenden Ideen entstanden, berichtet Andrew Wiles selbst (Singh, S. 257f., 297f.):

»Much of the time I would sit writing at my desk, but sometimes I could reduce the problem to something very specific – there's a clue, something that strikes me as

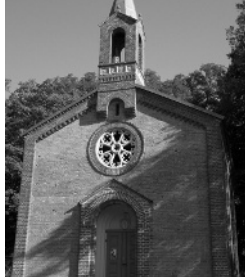
strange, something just below the paper which I can't quite put my finger on. If there was one particular thing buzzing in my mind then I didn't need anything to write with or any desk to work at, so instead I would go for a walk down by the lake. When I'm walking I find I can concentrate my mind on one very particular aspect of a problem, focusing on it completely. I'd always have a pencil and paper ready, so if I had an idea I could sit down at a bench and start scribbling away.

I was sitting at my desk one Monday morning, 19 September, examining the Kolyvagin–Flach method. It wasn't that I believed I could make it work, but I thought that at least I could explain why it didn't work. I thought I was clutching at straws, but I wanted to reassure myself. Suddenly, totally unexpectedly, I had this incredible revelation. I realised that, although the Kolyvagin–Flach method wasn't working completely, it was all I needed to make my original Iwasawa theory work. [...] It was so indescribably beautiful; it was so simple and so elegant. I couldn't understand how I'd missed it and I just stared at it in disbelief for twenty minutes. Then during the day I walked around the department, and I'd keep coming back to my desk looking to see if it was still there. It was still there. I couldn't contain myself, I was so excited. It was the most important moment of my working life. Nothing I ever do again will mean as much.«

10) Die Bibliothek

Viele der besten neuen mathematischen Ideen sind Verbindungen zwischen alten. Dafür muss man natürlich die alten Ideen kennen: Die altbekannten finden sich in der Bibliothek, die neuen bekannten kennen die Kollegen. Man muss dann nur die Dinge richtig zusammensetzen.

Von Richard P. Stanley, Professor für Mathematik am MIT, stammt eine kurze Schilderung seines Wegs zu einer Meisterleistung der modernen Geometrie, die ihn 1979 berühmt machte und der er auch seine Professur am MIT verdankt. Er erzählt, wie er dazu kam, den »harten Lefschetz-Satz für torische Varietäten« in Stellung zu bringen, um ein fundamentales Problem aus der Theorie der Polyeder zu lösen: den Beweis von »McMullen's g-Vermutung« für simpliziale Polytope. Diese Bedingungen hatte Peter McMullen 1971 in einem mutigen Geniestreich postuliert, aufgrund sehr wenig »experimenteller



Daten« (nicht, wie ein Gerücht besagte, von viel Bier inspiriert, sondern verkatert – sagt McMullen heute).

Stanleys Schilderung sei hier im entschärften Originalton wiedergegeben. Wir zitieren Stanley (S. 221), ersetzen dabei aber die spezielleren mathematischen Details durch Pünktchen:

»The following comments on how the proof of the necessity of the g -conjecture was found may be of interest. I had realized from my first work on the [...] that the necessity of the g -conjecture would follow from [...] In 1976, Toni Iarrobino brought the hard Lefschetz theorem to my attention. It was now apparent that one needed a smooth projective variety X whose [...] I had been aware for some time of the theory of toroidal embeddings [24] and had checked this reference to see whether the variety $X(P)$ had the right properties. Three problems arose: (i) I could not understand [24] well enough [...] (ii) [...] (iii) [...] There matters rested until the spring or summer of 1979, when I stumbled upon the paper of Danilov [10] on the new journal shelf of the MIT library. Remark 3.8 immediately caught my attention. It asserted that [...] But in reading [10] more carefully it became apparent that Remark 3.8 was stated rather carelessly. One needs to assume [...] I therefore asked some algebraic geometers whether [...] but none knew. Shortly thereafter I took the book [22] out of the library in order to look at a paper related to a completely different topic in which I was interested. In browsing through this book I discovered the paper of Steenbrink [41], with its proof of the hard Lefschetz theorem for projective V -varieties. It remained only to ascertain that for convex polytopes the varieties $X(P)$ were projective. This was accomplished via a conversation with David Mumford on September 13, 1979, and the proof was complete.«

Keiner wusste damals, dass der Beweis von Steenbrink nicht richtig war – und damit auch die Argumentationskette von Stanley eine Lücke enthielt. Davon erfuhr Stanley erst viel später, als die Lücke (von M. Saito) schon endgültig geschlossen worden war.

Mathematik ist vielfältig, und die Mathematiker sind vielfältig. Wir haben hier zehn Orte besucht, »wo Mathematik entsteht«. Es gibt viele andere Orte. Keiner davon ist eine Bühne. Die meisten der »Helden« sind (weitgehend) uneitel, und das Glück des Findens ist oft umgeben von der Banalität des Alltags. Ich habe ja deshalb auch absichtlich die Akteure im Originalton zitiert. Die Hagiografie mag später kommen.

Literatur

- M. Aigner und G. M. Ziegler: Das BUCH der Beweise. Heidelberg 2004 (2. Auflage)
 K. Barner: Der verlorene Brief des Gerhard Frey, *Mitteilungen der DMV* 2/2002, S. 38–44
 J. M. Borwein, P. B. Borwein und K. Dilcher: Pi, Euler numbers, and asymptotic expansions, *Amer. Math. Monthly* 96, 1989, S. 681–687
 G. P. Csicsery: N Is a Number. A portrait of Paul Erdős. Dokumentarfilm (57 Minuten), 1993
 C. F. Gauß und Ch. L. Gerling: Briefwechsel, hg. von Clemens Schaefer. Berlin 1927
 M. Grötschel (Hg.): The Sharpest Cut: The Impact of Manfred Padberg and His Work. Philadelphia 2004
 G. H. Hardy: Ramanujan. Twelve Lectures on Subjects suggested by his life and work. Cambridge, MA. 1940
 H. Koch: Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805–1859). Zum 200. Geburtstag, *Mitteilungen der DMV* 3/2005, S. 144–149
 P. McMullen: The numbers of faces of simplicial polytopes, *Israel J. Math.* 9, 1971, S. 559–570
 A. M. Sigmund, P. Michor und K. Sigmund: Leray in Edельbach, *Mathematical Intelligencer* 2/2005, S. 41–50
 S. Singh: Fermat's Last Theorem. London 1997
 S. Smale: The Story of the Higher Dimensional Poincaré Conjecture (What Actually Happened on the Beaches of Rio), *Mathematical Intelligencer* 2/1990, S. 44–51
 R. P. Stanley: The number of faces of simplicial polytopes and spheres, in: J. E. Goodman u. a. (Hg.): Discrete Geometry and Convexity. New York 1985, S. 212–223