



11

Montessori
MONTESSORI
GESAMMELTE WERKE

Psychoarithmetik

HERDER



Maria Montessori
Gesammelte Werke

Band 11

Maria Montessori – Gesammelte Werke

Herausgegeben von Harald Ludwig
in Zusammenarbeit mit
Christian Fischer, Michael Klein-Landeck und Volker Ladenthin
in Verbindung mit der Association Montessori Internationale (AMI)

Band 11 Psychoarithmetik



Zwei spanische Kinder beim Überprüfen
ihrer Berechnungen (um 1930)

Maria Montessori

Psychoarithmetik

Die Arithmetik
dargestellt unter Berücksichtigung
kinderpsychologischer Erfahrungen
während 25 Jahren

Eingeleitet und textkritisch bearbeitet
von Harold Frank Baumann

HERDER 

FREIBURG · BASEL · WIEN

Historisch-kritische Bearbeitung der 1934 erschienenen spanischen Originalausgabe der *Psico Aritmética* (M), basierend auf der deutschen Erstausgabe (Teil 1, 1989; Teil 2, 2000; Teil 3, 2011) der Psychoarithmetik und der italienischen Erstausgabe der *Psicoaritmetica* von 1971 (G).

Die deutsche Übersetzung der italienischen Ausgabe erfolgte durch Harold F. Baumann, diejenige nach der spanischen Ausgabe besorgten Jörg Marti (Kapitel 1–3) und Maria Kunz (Kapitel 4–12, Anhang und Bildbeschriftungen).

Die Abbildungen wurden von Harold F. Baumann aus der spanischen Ausgabe mit dem Programm Photo Studio 6.0.0.157 © 2008 Arc Soft Inc. digitalisiert und mit dem Programm GIMP 2.6.11 (GNU Image Manipulation Program) © 1995–2008 S. Kimball, P. Mattis & the GIMP Development Team überarbeitet, deutsch beschriftet und teilweise korrigiert.

Für die Bereitstellung der Fotos heutiger Montessori-Materialien sowie die Ermöglichung des Abdrucks im Farbbilderanhang gilt der Dank der Lehrmittelfirma Nienhuis Montessori aus Zelhem (Niederlande).

Gedruckt mit Unterstützung folgender Organisationen und Personen, denen herzlich gedankt sei:

Deutsche Montessori-Vereinigung e. V., Deutsche Montessori-Gesellschaft e. V., Stiftung Reformpädagogik – Montessori-Pädagogik – Wissenschaft, Prof. Dr. Hildegard Holtstiege, Nienhuis Montessori (Niederlande).

© Verlag Herder GmbH, Freiburg im Breisgau 2012
Alle Rechte vorbehalten
www.herder.de

Titel der Originalausgabe: *Psico Aritmética*
© Montessori-Pierson Publishing Company 1934



Das AMI-Logo ist eine eingetragene Marke der
Association Montessori Internationale.

Inhalt und Übersetzung dieser Ausgabe wurden von der Association Montessori
Internationale (AMI) zugelassen.

Umschlaggestaltung: Reckels & Schneider-Reckels, Wiesbaden
Umschlagfoto: © Association Montessori Internationale

Satz und PDF-E-Book: SatzWeise, Bad Wünnenberg
Herstellung: CPI books GmbH, Leck

ISBN (Print) 978-3-451-32522-9
ISBN E-Book (pdf) 978-3-451-81591-1

Inhalt

Vorwort von Giuliana Sorge zur deutschen Erstausgabe	XI
Geleitwort von Martin Schneeberger zur Neuauflage	XV
Einführung des Herausgebers	XIX

Maria Montessori Psychoarithmetik

Vorwort	3
Allgemeine Betrachtungen	6
Überblick über das Vorschulalter	6
Das Material der losen Einheiten	13
Die Arithmetik im Primarschulunterricht	16
Das Dezimalsystem	16
Das Material zur Darstellung des Dezimalsystems	18
Bildung der großen Zahlen	22
Parallelübungen	26
Der Übergang von einem Zehner zum anderen	27
Die Zahlwörter	30
Andere Übungen	31
Das fortschreitende Zählen als eine Parallelübung	35
Lineare Zerlegung des Quadrats: Die Hunderter-Kette	35
Lineare Zerlegung des Würfels: Die Tausender-Kette	36
Andere Parallelübungen zum Dezimalsystem	40
Tafel der Übergänge	48
Rechentafeln – Schriftliche Übungen	51

Tafeln der Beziehungen	56
Übersicht	59
Die arithmetischen Operationen mit großen Zahlen	60
Die Multiplikation	64
Die Subtraktion	65
Die Division	70
Division durch eine mehrstellige Zahl	74
Parallelübungen – Addition von großen Zahlen ohne Perlenmaterial	77
Probleme der Arithmetik	86
Vertiefung	88
Die Multiplikation	88
Unterscheidung der Begriffe Multiplikand und Multiplikator	92
Multiplikationsübungen	93
Parallelübungen	100
Auswendiglernen der Kombinationen	100
Material	100
Multiplikations-Tafel mit allen Produkten	105
Vereinfachung der Multiplikations-Tafel	106
Das Dezimalsystem	110
Die Stelle gemäß dem Dezimalsystem	110
Der Aufbau der großen Zahlen	121
Die arithmetischen Operationen	125
Subtraktion	126
Multiplikation	128
Multiplikation von großen Zahlen auf dem Rahmen	130
Die Division	144
Die Division in der Analyse	144
Vorgehen	145
Division großer Zahlen durch mehrstellige Zahlen	149
Analyse der Einheiten	157
Operationen mit dem Material	162
Probe und Ähnlichkeiten	170
Der Rechenvorgang bei der Division	174

Übungen mit Zahlen	176
Die Teilbarkeit	176
Primzahlen	176
Primfaktoren und größter gemeinsamer Teiler	186
Die Vielfachen	191
Kleinstes gemeinsames Vielfaches	194
Die Potenzen	202
Multiplikations-Spiele	215
Analyse und Untersuchung der Beziehungen	215
Gewinkelte Konstruktion	222
Multiplikations-Spiele	231
Schachbrett-Spiel	231
Bankspiel	236
Algebra	245
Rückkehr in die Vergangenheit	245
Übungen mit den [numerischen] Stangen	245
Quadrate	250
Prismen	258
Kuben	262
Dritte Potenz eines Binoms	267
Dritte Potenz eines Trinoms	271
Quadratwurzel	275
Wurzeln mit mehreren Ziffern	278
Vorbereitende Übungen, bestehend aus geometrischen Analysen	278
Quadrate	282
Untersuchung des Leitquadrates	285
Numerische Beziehungen	294
Praktisches Verfahren zur Ermittlung der Quadratwurzel	296
Arithmetische Berechnung der Quadratwurzel	301

Das Ziehen von Wurzeln mit drei Ziffern	301
Das Ziehen von Wurzeln mit vier Ziffern	306
Kubikwurzel	316
Berechnung für das Ziehen der Kubikwurzel	319
Der Leitwürfel	322
Die Berechnung	328
Die trinomiale Wurzel	333
Direkter Rechengang	346
Operation mit den Zahlen	349
Das Material lehrt	351
Durchführung	353
Teil I	356
Teil II	360
Teil III	361
Teil IV	363
Dezimales metrisches System	366
Flächenmaße	377
Volumenmaße	382
Ein kinderleichtes Problem	383
Hohlmaße	385
Trockenmaße	388
Gewichte	389
Maße der spezifischen Gewichte	398
Einüben der Maße und Probleme	399
Probleme	400
Maße, die weder metrisch noch dezimal sind	403
Die Zeit	408

Verhältnisse und Proportionen	411
Einleitung	411
Dreisatz	415
Reduktion auf die Einheit	417

Anhang

Farbbilder zu heutigen Montessori-Materialien	421
Das Werk von Doktor Montessori	432
Entstehung und Entwicklung	432
Zusammenfassung	444
Literatur (Auswahl)	447
Sachverzeichnis	455
Personenverzeichnis	469

Vorwort zur deutschen Erstausgabe

Man wird sofort erkennen, dass es sich bei »Psico Aritmética« nicht um einen Arithmetiktext handelt, sondern viel eher um die Beschreibung der Entwicklung der fasziniert und sicher in die Welt der Zahlen eindringenden Intelligenz. »Psico Aritmética« macht den Vorschlag einer Methode als Weg zur Erforschung und Entdeckung, d. h. einer Methode, die vom Untersuchen des betrachteten kulturellen Ereignisses ausgeht, ganzheitlich gesehen und in genialer Art beharrlichen Analysen unterzogen.

Hier »die drei Stufen«, die das Wachstum des Wissens kennzeichnen: Präsentation der Zahlen von 1 bis 10, dezimale Organisation der Quantität und gleichzeitig geometrische Sicht derselben, relativer Wert der Ziffern einer Zahl und als letzte Stütze ihre symbolische Darstellung; danach Überraschung durch den Übergang zur autonomen Abstraktion.

Die *erste Stufe* ist für Kinder von ungefähr vier Jahren anregend; die Welt der Zahlen, die mit ihren Ausdrücken und Symbolen in unsere gegenwärtige Zivilisation eindringt, darf nicht feindlich erscheinen, sondern muss einen Weg zu ihrer Interpretation zulassen. Die numerischen Stangen sind zu diesem Zweck ein wertvolles Mittel.

Ich erinnere mich an das Jahr 1930. Maria Montessori hielt in Rom einen ihrer bewundernswürdigen internationalen Kurse im Borromini-Saal der Chiesa Nuova ab. Die Studenten, unter ihnen viele Universitätsprofessoren, kamen aus 26 verschiedenen Ländern. Unter ihnen war ein Abgesandter der Universität von Budapest, ein gewisser Prof. Jozsef Kiss. Maria Montessori demonstrierte mit ihrer erleuchtenden und wesentlichen Klarheit die »numerischen Stangen«, die auf die sensorielle Erfahrung folgen, welche die Kinder bei der Unterscheidung der Größe ähnlicher Gegenstände erlangen. [...] Plötzlich sieht man Prof. Kiss, ernst und imponierend in seiner vollen Größe durch den Saal nach vorne gehen und Maria Montessori umarmen, indem er ihr sagt: »Diese Stangen bereiten nicht nur auf die Arithmetik, sondern auf die ganze Mathematik vor. Man erkennt schon die Beziehungen zwischen den Zahlen, zwischen den Quantitäten in einer interessanten Gesamtheit. Ich werde diesen Schlüssel an die Universität von Budapest mitnehmen«.

Tatsächlich wäre es nötig, dieses anziehende Prinzip [der Gesamtübersicht, Anm. d. Herausgebers] zu würdigen, das den Kindern auf sympathische Art die Welt der Zahlen öffnet und zwar in einem Alter, in dem die Kinder gewöhnlich an Langeweile und geistiger Blutarmut leiden. Kehren wir also zu den »Stufen« zurück, die sich vom üblichen unbestimmten Weg, auf dem sich die Kinder verlieren, unterscheiden.

Auf der *zweiten Stufe* wird auf brillianteste Art und Weise die dezimale Organisation der Quantitäten präsentiert und zwar mit Gegenständen, die sich zum Zusammensetzen und Zerlegen eignen. Während sich die Exteriorität der Objekte, die so genannten Materialien, abschwächt, dringen wir auf der *dritten Stufe* zur Betrachtung des Wertes der Ziffer entsprechend ihrer Position, die sie in der Zahl einnimmt, vor und lenken unsere Aufmerksamkeit auf die geometrische Darstellung der »Stellenwerte« mit der faszinierenden Hervorhebung der denkbaren, materiell nicht mehr darstellbaren Unendlichkeit. Jetzt sind die Kinder bereit, ihrem eigenen Ruf folgend und mit eigenen Kräften die Wege in der Welt der Zahlen zu begehen; in einer Welt, die nichts Feindliches mehr an sich hat, sondern ein hilfreicher Freund wird. Mit 8 Jahren wird sich den so vorbereiteten und begeisterten Kindern die Algebra mit suggestiver Anziehung öffnen.

Das Buch »Psico Aritmética« wurde von Maria Montessori nach mehr als 20jähriger Erfahrung in zahlreichen Primar- und Sekundarschulen Europas und Amerikas geschrieben. In den Jahren 1930 und 1931 wurde das Buch fertig geschrieben, und ich hatte das große Vergnügen, mit Maria Montessori zusammen zu sein, beim letzten Schliff zu helfen und manchmal auch zusammen mit unseren Studenten der römischen »Scuola di Metodo«¹ Illustrationen anzufertigen. Maria Montessori hielt sich aber damals nicht mehr für längere Zeit in Italien auf; sie lebte abwechselungsweise in Holland, England und v. a. in Barcelona, wo der Verleger Araluce, ein großer Freund und Unterstützer des Werkes, den

¹ Bei der Scuola di Metodo handelt es sich um eine Ausbildungsschule für Montessori-Lehrkräfte in Rom, die im Schuljahr 1928–29 ihre Arbeit aufnahm, im Januar 1929 offiziell eröffnet und 1936 wieder geschlossen wurde. Direktorin war in den ersten Jahren Maria Montessori. Giuliana Sorge hatte dort anfangs die Hauptdozentur für Pädagogik inne. Wegen des Verdachts des Antifaschismus wurde sie 1932 verhaftet, was einen energischen Protestbrief Montessoris an den Erziehungsminister auslöste, und aus ihrem Amt entlassen. Vgl. Baumann, Harold: Montessori-Pädagogik und Faschismus – Eine Entgegnung, in: Fischer, R./Heitkämper, P. (Hg.): Montessori-Pädagogik: Aktuelle und internationale Entwicklungen, Münster 2005, S. 122–176; ferner Leenders, Hélène: Der Fall Montessori – Die Geschichte einer reformpädagogischen Erziehungskonzeption im italienischen Faschismus, Bad Heilbrunn 2001.

Wunsch hatte, als erster das Buch zu veröffentlichen. Die spanische Ausgabe wurde dadurch besonders wertvoll, und ihr folgte das Zwillingswerk »Psico Geometría«, dem der dritte Band der Trilogie, nämlich »Psico Grammatica«, hätte folgen sollen – dieser wurde jedoch nie vollendet.² »Psico Aritmética« erschien somit zuerst in spanischer Sprache. [...]

Die italienische Ausgabe von »Psico Aritmética« erschien erst im Jahre 1971. Sie musste aus dem Spanischen übersetzt werden, da [...] das Manuskript verloren ging. Das Verlagshaus Araluce war inzwischen aufgelöst worden.

Mit Freude begrüße ich die Arbeit für eine deutschsprachige Ausgabe. Mich erfüllt die Hoffnung, dass dadurch neue Montessori-Schulen die Methode in ihrer Gesamtheit verwirklichen werden. Diese werden die tröstlichen Hoffnungen beleben und einer neuen Generation von Lehrern ein Feld von fruchtbaren Entdeckungen und ausgearbeiteten Vorschlägen erschließen können.

29. Dezember 1982

Giuliana Sorge †³

² Im Nachlassarchiv Maria Montessoris gibt es ein entsprechendes Manuskript geringen Umfangs, das in Band 10 der Gesammelten Werke (»Grundlagen meiner Pädagogik«) veröffentlicht werden soll.

³ Giuliana Sorge (1903–1987), Schülerin von Maria Montessori, führte zahlreiche Montessori-Ausbildungskurse durch. Siehe auch: H. Baumann, Montessori-Werkbrief, Aachen, Jg. 26, Heft 3/4, 160 (1988) »Zum Tode von Giuliana Sorge«; I. Şulea-Firu, Montessori-Erinnerungen, Heft 2, AM(S), Zürich, S. 29–58 (1991) »Porträt von Giuliana Sorge (1903–1987)«.

Geleitwort zur Neuausgabe

Die deutsche Übersetzung der »Psico Aritmética« von Maria Montessori ist allen Kindergarten- und Primarlehrpersonen, allen Fachleuten für das Entwickeln und Erforschen des Mathematikunterrichts der Elementarstufe oder all jenen zur Lektüre empfohlen, die Maria Montessori als Mathematikdidaktikerin kennenlernen möchten.

Die Psico Aritmética ist zum einen historisch interessant, werden doch darin Ideen von Piaget¹, Vygotsky² und Freudenthal³ in praktischer Form vorweggenommen, beispielsweise von Piaget die Idee, dass mathematische Operationen einen Handlungskern aufweisen, von Vygotsky die »Zone der nächsten Entwicklung«, die Maria Montessori als »sensible Phase bzw. Periode« bezeichnet, in der die Lehrperson mit person- und inhaltssensiblen, fein dosierenden, maßgeschneiderten und situativen Hilfestellungen das Kind optimal fördern kann, und von Freudenthal den Appell, dass es ein Verbrechen sei, einem Kind etwas zu erklären, das es selber erarbeiten könne. In den Details gibt es allerdings zwischen diesen vier Lehr-Lern-Sachverständigen mehr Unterschiede als Gemeinsamkeiten, die vor allem daher rühren, dass sie für die Vision eines verstehenden statt eines blinden Lernens unterschiedliche Argumente ins Feld führen und verschiedene Sprachen sprechen. Es bleibt aber das Ver-

¹ Jean Piaget (1896–1980), Schweizer Entwicklungspsychologe; Professor an der Universität Genf. Piaget war zeitweise Präsident der Schweizer Montessori-Gesellschaft und nahm an internationalen Montessori-Kongressen in Nizza (1932) und Rom (1934) teil. Vgl. Baumann, Harold: Hundert Jahre Montessori-Pädagogik 1907–2007. Eine Chronik der Montessori-Pädagogik in der Schweiz, Bern u. a. 2007, S. 203 ff.

² Lev Semyonovich Vygotsky (im Deutschen auch geschrieben als Lew Semjonowitsch Wygotski) (1896–1934), russischer Psychologe; bekannt u. a. wegen seiner Aktivitätstheorie und seiner Beiträge zur Entwicklung von Sprache und Denken und zur allgemeinen Entwicklungspsychologie.

³ Hans Freudenthal (1905–1990), aus einer jüdischen Familie stammender, in Luckenwalde geborener Mathematiker und Wissenschaftsdidaktiker; seit Ende der 1920er Jahre in Amsterdam; wirkte als Dozent und Professor an Universitäten in Amsterdam und Utrecht. Er übte großen Einfluss auf die Mathematikdidaktik aus.

dienst von Maria Montessori, so früh für Fragen empfänglich gewesen zu sein, die Fachleute für das Lehren und Lernen bis heute beschäftigen.

Die *Psico Aritmética* ist zum anderen handwerklich sehr aufschlussreich, weil man beim Lesen der kreativen Herstellerin von Entwicklungsmaterialien und von Modellierungshilfen bei der Ausübung ihres didaktischen Handwerks des Entwickelns von Hilfen zur Selbsthilfe sozusagen über die Schultern schauen kann. Man erhält dabei wertvolle Einblicke in die große didaktische Sensibilität und das fachliche und psychologische Engagement Maria Montessoris für die Lernenden, wie u. a. die folgenden zwei Zitate von ihr anschaulich belegen:

»Die Zehn ist nichts anderes als ein Zurückkehren zum Zählen von eins bis neun. Hier überschreiten wir gewissermassen den Rubikon, was uns zu einem entscheidenden Sprung in eine andere Einheit zwingt. So lässt sich mit lediglich neun Ziffern die Gruppierung der Einheit in Stellenwerte organisieren, denen keine Grenzen gesetzt sind.«⁴

»Wenn wir die Zehner-[Perlen]-Stäbchen aus ihrem Quadrat lösen und sie nur an den Enden in Verbindung lassen, erhalten wir eine *Kette* von hundert Perlen, die in Zehner, also in kleine aufeinander folgende Stäbchen, unterteilt sind. Die Länge der *Hunderterkette* hinterlässt einen größeren Eindruck als die Oberfläche des Quadrats, weil sie den ganzen Weg darstellt, auf dem die Einheit über die Zehner den Hunderter bilden.«⁵

Dank der deutschen Übersetzung der *Psico Aritmética* von Harold Frank Baumann ist es nun auch den deutschsprachigen Lesern möglich, bei Maria Montessori durch Lernen am Modell eine Art Meisterlehre im Entwickeln von didaktischen Vorgehensweisen und Materialien zu absolvieren. Dabei scheinen mir die Prozesse des Herstellens von minimalen Hilfen bzw. von Lern- und Problemlösegerüsten (*scaffolds*) wichtiger zu sein als die Ergebnisse dieser Prozesse, die zum Teil, wie z. B. das Ziehen von Quadrat- und Kubikwurzeln, heute nicht mehr die gleiche Bedeutung haben wie zu Lebzeiten der kreativen Mathematikdidaktikerin.

Was die tatsächlich vorliegenden didaktischen Ideen und Materialien von Maria Montessori anbetrifft, kann – auch wenn vieles einleuchtet und gefällt – nicht gesagt werden, ob sie das bewirken, was man von ihnen erwartet. Als Mathematiker, Lehr-Lernforscher und Didaktiker mahne ich beim Beurteilen von didaktischen Arrangements und Programmen stets zu Vorsicht, denn allzu leicht beginnt man, dies zu glau-

⁴ S. u. S. 17.

⁵ S. u. S. 35.

ben und jenes zu behaupten, wo doch vergleichendes Messen objektiver wäre, was m. E. durchaus auch als »ein in der Praxis verankertes, auf das Kind abgestimmtes Vorgehen«⁶ gesehen werden könnte. Leider gibt es in unseren Schulen noch keine etablierte Kultur des objektiven Messens von Wirksamkeitsunterschieden der verschiedenen didaktischen Vorgehensweisen und Materialien. Dieser Mangel an vergleichender Empirie betrifft auch die Psico Aritmética. Aber die meisten anderen Programme, wie beispielsweise Wittmann & Müllers »Zahlenbücher« oder Freudenthals »Realistic Mathematics Education«, stehen diesbezüglich nicht besser da. Insofern kann beim heutigen Stand des Wissens noch niemand empirisch belegen, welche Mathematikdidaktik wirksamer ist.

Die nun vorliegende deutsche Übersetzung der Psico Aritmética könnte daran insofern etwas ändern, als die detaillierte Beschreibung des Vorgehens und der Materialien nun auch deutschsprachigen Lehr-Lernforschern zugänglich ist und damit vergleichende Messungen in Österreich, Deutschland und der Schweiz, wo eine empirische Lehr-Lernforschung allmählich im Entstehen ist, überhaupt erst möglich werden. Deshalb empfehle ich die Lektüre nicht nur Lehrpersonen, sondern auch Lehr-Lernforschern, damit in Zukunft besser beurteilt werden kann, ob die »Psychoarithmetik« von Maria Montessori, die »Zahlenbücher« von Wittmann & Müller, die niederländische »Realistic Mathematics Education« oder eine andere Didaktik zu besseren mathematischen Kenntnissen und Fähigkeiten führt.

Ich wünsche der Psychoarithmetik möglichst viele Leserinnen und Leser, die damit entweder eine Meisterlehre im Entwickeln von Lern- und Problemlösergeräten absolvieren oder zu vergleichender Forschung angeregt werden möchten, oder die Maria Montessori als engagierte und kreative Mathematikdidaktikerin kennenlernen wollen.

Zuzwil, im November 2011

Martin Schneeberger
Dozent Mathematik
Pädagogische Hochschule Bern

⁶ S. u. S. XXIII.

Einführung des Herausgebers

1. Zum Inhalt

»Psico Aritmética« stellt eine Erweiterung früherer Arbeiten von Maria Montessori dar, die u. a. auf den Entwicklungsmaterialien der französischen Ärzte Itard und Séguin basierten¹. In »Il metodo della pedagogia scientifica«² stellte sie die numerischen Stangen vor, weiter das Vorgehen bei der Einführung der geraden und ungeraden Zahlen, die Addition und Subtraktion (mittels der Stangen), die Multiplikation und Division (mittels gezeichneter Stangen) und das Konzept des Stellenwertes. In »L'autoeducazione nelle scuole elementari«³ wurde das Zählen bis zur Tausendergrenze (mit Hilfe der Perlenstäbchen, der Hunderter- und der Tausender-Kette), das Memorieren der Addition (mit den entsprechenden Brettern), Multiplikation (mittels Tafeln) und Division (mit dem Divisions-Brett), die Operationen mit den Stellenwert-Rahmen, die Ausführung der Division auch mit mehreren Ziffern im Divisor (mit dem Material der großen Division), die Vielfachen (mit den auf quadratischen Blättern angeordneten Zahlen von 1 bis 100) und die Potenzen (mittels Perlenstäbchen, -quadraten und -kuben) behandelt.

Die erste Ausgabe von »Psico Aritmética« erschien zusammen mit »Psico Geometría« im Jahre 1934 in Barcelona. Der Einfluss Maria Montessoris auf die Erziehungswissenschaft und -praxis war durch diese fortgesetzte publizistische Tätigkeit nicht gering. So führte etwa Jean Piaget⁴

¹ S. z. B. H. du Fougeray & L. Couëtoux, *Manuel pratique des méthodes d'enseignement spéciales aux enfants anormaux*, Félix Alcan, Paris 1896.

² M. Montessori, *Il metodo della pedagogia scientifica applicato all'educazione infantile nelle case dei bambini*, Max Bretschneider, Roma 1909, 242 ff. Vgl. Montessori GW Bd. 1, *Die Entdeckung des Kindes*, Freiburg 2010, S. 307–325.

³ M. Montessori, *L'autoeducazione nelle scuole elementari*, Ermanno Loescher, Roma 1916, 391 ff. Vgl. Montessori GW Bd. 6/2, *Die Selbsterziehung des Kindes in der Grundschule: Praxis*, Freiburg 2013.

⁴ H. Baumann, Arbeitstagung der »Montessori-Vereinigung e. V. Aachen«, Gemen bei Borken (Westfalen), 21. 10. 1983. »Geschichtliche Hintergründe der Montessori-Piaget-Beziehungen«; H. Baumann, *Montessori Werkbrief*, 22, 3 (1984). »Geschichtliche

in den Zwanzigerjahren in Genf in der von der Montessori-Pädagogik mitgeprägten »Maison des Petits« (»Casa dei Bambini«)⁵ als Assistent von Édouard Claparède⁶ kinderpsychologische Untersuchungen durch. Auf dieser Basis baute er erst seine Vorstellungen über die Entwicklung der Sprache und später des mathematischen Denkens beim Kind auf. Nach seiner Teilnahme am 2. Montessori-Kongress in Nizza im Jahre 1932 übernahm er das Präsidium der Schweizerischen Montessori-Gesellschaft.

Montessori und Piaget setzten aber deutlich verschiedene Schwerpunkte: sie bei der Schule, er bei der Entwicklungspsychologie. Piaget hat nach dem Tode Montessoris verschiedentlich zu ihrem pädagogischen Ansatz Stellung bezogen⁷. Am deutlichsten (wenn auch indirekt) in einer an seinem Institut ausgeführten Dissertation⁸. Montessoris Pädagogik wird darin u. a. folgendermaßen charakterisiert:

- als bildliche und anschauliche Methode mit gewissen aktiven Momenten,
- als auf dem Dezimalsystem und damit nicht auf einer sogenannten »objektiven Basis« beruhend,
- durch zu frühes Einführen der Einheit, des Zählens und Messens,
- durch die Vernachlässigung des Übergangs zur Abstraktion,
- durch die Vernachlässigung der Individualität der einzelnen Kinder.

Die Aktivitäten der Kinder einer Montessori-Schule lassen an Piagets Kritik Zweifel aufkommen. Jedes Kind beschäftigt sich mit einem ihm entsprechenden Material, und sobald es sich sicher fühlt, braucht es diese Stütze nicht mehr: es schreitet weiter zu einem neuen Entwicklungsmate-

Hintergründe der Montessori-Piaget-Beziehungen»; H. Baumann, *Il Quaderno Montessori* (Castellanza, Varese), 1991/92, 7/8, (31/32), 6. »Piaget e il Movimento Montessori«; H. Baumann, *Communications*, 1999, 2–3, 6 »On the historical background of the Montessori-Piaget relations«.

⁵ Dieses Kinderhaus war 1914 in Verbindung mit dem »Institut Jean-Jacques Rousseau« (s. u. Anm. 6) und seinen Dozenten entstanden. Es arbeitete unter Leitung von Mina Audemars und Louise Lafendel (s. u. Anm. 10). Vgl. Baumann, *Hundert Jahre ...* (s. o. Geleitwort zur Neuausgabe Anm. 1), S. 89 ff.

⁶ Édouard Claparède (1873–1940), Schweizer Psychologe und Pädagoge, der ursprünglich Medizin studiert hatte. Er wirkte von 1908–1940 als Psychologieprofessor an der Universität Genf und gründete 1912 die außeruniversitäre École de Psychologie et des Sciences de l'Éducation, das Institut Jean-Jacques Rousseau. Die Erforschung der Kindheit war eines seiner zentralen Themengebiete.

⁷ S. z. B. J. Piaget, *Theorien und Methoden der modernen Erziehung*, Fischer Frankfurt a. M. 1974.

⁸ B. H. Fischer, *Didactique de l'initiation mathématique et l'école primaire*, Dissertation am Institut der Erziehungswissenschaften der Universität Genf 1955.

rial. Warum auch sollte das Kind sich nicht mit dem Dezimalsystem, dem gängigen System unserer Gesellschaft beschäftigen? Die Kinder der verschiedenen Nationen der Welt erwerben doch auch Sprachfähigkeit in ihrer Muttersprache und gehen *nicht* von einer »objektiven Basis« aus.

Piaget sieht bei Montessori die Vorstellung von einer Art Transfer von den statischen, dem Material innewohnenden Strukturen zur Intelligenz. Sie anerkenne angeblich nur eine bestimmte Struktur für jeden Begriff und beschränke den Unterricht durch die Idee, dass die Begriffe immer mit einem einzigen Material erarbeitet werden. Im Gegensatz dazu provozieren die an der »Maison des Petits« entwickelten Methoden gemäß Piaget beim Kind einen Übergang von der aktiven zur intellektuellen Struktur. Nach Piaget prägt sich beispielsweise die Idee der Zahl nicht durch die Objekte ein, sondern durch die mit ihnen vorgenommenen Operationen (Ordnen, Verteilen). Die Gesetze der pränumerischen logischen Gruppierungen gehen – gemäß Piaget und anderen – in diejenigen der natürlichen Zahlen über. Der Zahlenbegriff entwickelt sich gleichzeitig mit dem Operationsbegriff. Montessori berücksichtige dies – nach Piaget – wohl durch serielle Ordnungen (wie diejenige der numerischen Stangen), jedoch immer unter einem metrischen Gesichtspunkt, und sie setze, wie schon erwähnt, die Einheit zu früh voraus.

Das Montessori-Material und das an der »Maison des Petits« entwickelte Material hätten demnach verschiedene Funktionen. Piaget lehnt aber alle speziell gefertigten Materialien ab, was wohl sein späteres Desinteresse sowohl an der Montessori-Schule als auch an der »Maison des Petits« weitgehend erklärt.

Freudenthal⁹ empfindet viele Aussagen Piagets als vom Mathematiker-Standpunkt aus zumindest widersprüchlich, wenn nicht ganz und gar unhaltbar. Bei einigen seiner Versuchsanordnungen scheint Piaget durch Suggestivfragen zum gewünschten Resultat gelangt zu sein. Im Gegensatz zu Montessori, die empfahl, die Kinder bei ihren »freien« Tätigkeiten zu beobachten, hat Piaget doch oft »künstliche« Versuchsanordnungen aufgebaut.

Nach Piaget bauen sich die logischen Strukturen beim Kind erst mit 7 bis 8 Jahren auf. Die kindlichen Entwicklungsstufen, die Piaget 1923 von Audemars & Lafendel¹⁰ übernommen hat, sind wohl als psychologische

⁹ H. Freudenthal, *Mathematik als pädagogische Aufgabe*, Band 1, Klett, Stuttgart 1973.

¹⁰ Vgl. Mina Audemars und Louise Lafendel, *La Maison des Petits de l'Institut J.-J. Rousseau*, Neuchâtel und Paris 1923.

Entdeckung interessant, doch sollten sie nicht als Vorwand dazu dienen, die Tätigkeit des Kindes zu beschränken. Piaget hat mit seinem Beharren auf dem Lernen gemäß diesen Entwicklungsstufen, gewollt oder ungewollt, das traditionelle Schulgefüge eher sanktioniert.

Georges Cuisenaire¹¹ hat seine Rechenmethode 1952 an der Universität Straßburg unter dem Patronat der UNESCO erstmals einem größeren Kreis vorgestellt – ungefähr 20 Jahre nach der Entstehung von »Psico Aritmética«, das ähnliche Vorschläge enthält. Die nach Cuisenaire benannten farbigen Rechenstäbchen werden vielerorts als offizielles Schulmaterial benutzt. Sie haben allerdings dem entsprechenden Montessori-Material nichts voraus. Sie basieren auf dem metrischen System, reicht doch ihre Länge von einem bis zehn Zentimeter. Das Fehlen einer Einteilung in die Einheiten befriedigt wohl die Vorstellung Piagets, die Einheit nicht zu früh einzuführen, erschwert aber den Umgang mit ihnen erheblich, da die Kinder an den Stäbchen die dargestellten Zahlen nicht abzählen können, sondern gezwungen sind, sich diese durch Merken der Farbe, Vergleichen mit anderen Stäbchen oder Abmessen mit einem Maßstab einzuprägen.

In den sechziger und siebziger Jahren wurde vielerorts die sogenannte »neue Mathematik« an den Schulen eingeführt. Im Vorwort eines damals populären Buches¹² stehen folgende Sätze:

»In zahllosen Schulhäusern auf unserem Globus schwitzen nämlich immer noch Tag für Tag Schüler über wenigstens genauso unwichtigen Rechenaufgaben – dürfen dabei aber nicht einfach ›durchdrehen‹ wie der Computer im Raumschiff, wenn der Lehrer seine ›Restart-order‹ erteilt. [...] ›Rechnen‹ und ›Mathematik‹ sind nämlich grundverschiedene Dinge, wie wir noch sehen werden. Das soll in der Erziehungslandschaft nun anders werden: Was an Aufgaben ›in deutschen Ländern frisch auf den Tisch‹ der Mathematikzöglinge kommt, soll das Gütesiegel ›reine Mathematik‹ tragen, [...] Heute lernen die Schulkinder auf Neuguinea die neue Mathematik ganz ähnlich wie in einem Schweizer Bergbauerndorf, in Singapur nicht viel anders als in London, in Zagreb gleichermaßen wie in Nancy.«

Die Verachtung der Numerik, die mit dieser begeisterten Propagierung der sogenannten »reinen Mathematik« einherging, hat ihre Folgen gezeigt. Vielen Kindern bereitete das Kopfrechnen Schwierigkeiten. Ein

¹¹ Georges Cuisenaire (1891–1976), belgischer Pädagoge und Mathematiker, arbeitete als Grundschullehrer.

¹² W. R. Fuchs, Eltern entdecken die neue Mathematik, Knaur, München 1974.

Junglehrer-Berater in Zürich¹³ entwickelte als Gegenmittel ein Lehrmaterial, bei dem die Schüler 24 Rechnungen in einer mit der beigelegten Sanduhr gemessenen Minute zu lösen hatten. Der Erfinder dieses Rechentrainings gab zu, dass dieses Wettrennen gegen die Sanduhr für nervöse Kinder wenig geeignet sei!

Der Vormarsch der Computer in unserer Gesellschaft hat in jüngerer Zeit zu einer wieder anderen Entwicklung geführt. Während die Einführung der Mengenlehre an den Schulen noch auf mathematischen Überlegungen beruhte, drängten Computerfirmen u. a. aus kommerziellen Gründen auf eine rasche Einführung der Computer an den Schulen. Genau wie bei der Überbetonung der Mengenlehre wird auch diese Entwicklung ihre Folgen zeigen. Die Aufgabe der Volksschule ist in erster Linie das Hinführen der jungen Menschen zur Selbstständigkeit, ihnen zu zeigen, wie Probleme angegangen werden können – das Erklären von wichtigen Prinzipien und weniger das Beibringen von Fachkenntnissen. Der Beitrag, den die Schule im Zusammenhang mit der stürmischen Computerentwicklung zu leisten hat, besteht demnach vor allem im Vermitteln von Grundbegriffen, wie etwa »Algorithmus« oder »Programm«. Dazu braucht man nicht in erster Linie Computer anzuschaffen.

Es wird wegen der Zurückhaltung vieler Montessori-Pädagogen gegenüber allen Modeerscheinungen gerne behauptet, dass die Montessori-Schule sich zu wenig mit den neuen Entwicklungen befasse. Das hängt damit zusammen, dass Montessori-Pädagogen nur ein in der Praxis verankertes, auf das Kind abgestimmtes Vorgehen akzeptieren.

Maria Montessori hat die Wichtigkeit des mathematischen Denkens für unsere Gesellschaft schon früh erkannt und vor einem »mathematischen Analphabetismus« gewarnt. Für sie ist Erziehung eine *den ganzen Menschen in seiner gesellschaftlichen und natürlichen Umwelt* erfassende Aufgabe. Das Phänomen Montessori-Erziehung lässt sich nicht bloß durch eine die Mathematikdidaktik beleuchtende Kritik allein verstehen. Wenn durch die rasche Computer-Entwicklung der letzten Jahrzehnte die in »Psico Aritmética« vorgestellten Algorithmen an Wichtigkeit zugenommen haben, so ist das Zufall.

¹³ B. Aeschlimann, Tempo 60 – das Sanduhr-Rechentraining, Profax, Küssnacht 1983.

2. Textgeschichte

Die Bücher »Psico Aritmética« und »Psico Geometría« fanden bei ihrem ersten Erscheinen nur wenig Beachtung. Erst im Jahre 1947 erschien von Margret Drummond¹⁴ eine bescheidene englische Kurzfassung von »Psico Aritmética«. Camillo Grazzini verfasste zum 100. Geburtstag von Maria Montessori eine überarbeitete italienische Übersetzung des Buches (= G). Die vorliegende deutsche Ausgabe basiert auf der spanischen Urfassung (= M), erwähnt aber in Fußnoten Änderungen der italienischen gegenüber der ursprünglichen und fügt noch weitere Kommentare, die sich auf andere Werke der Autorin bzw. jüngere pädagogische Entwicklungen beziehen, hinzu. Ein Sachregister soll den Lesern helfen, Begriffe und Materialien rasch im Kontext aufzufinden.

3. Dank

Es bleibt die angenehme Pflicht, allen herzlich zu danken, die zum Gelingen dieses Werks beigetragen haben. Frau Annamaria Huber verglich die von mir übersetzten Textteile mit der italienischen Ausgabe. Herr Jürg Spring las den deutschen Text sorgfältig durch. Prof. Günter Schulz-Benesch † regte den Einbezug der spanischen Erstausgabe in die deutsche Übersetzung an. Die Herren Norbert Ehlen und Alfons Schaffrath † sowie Frau Dorothea Keune † kontrollierten den Text in Bezug auf die Nomenklatur und das heute übliche Vorgehen an deutschen Schulen. Herrn Albert Heuberger verdanke ich wertvolle Hinweise auf heutige mathematikdidaktische Entwicklungen. Professoressa Giuliana Sorge † verdanke ich die spanische Ausgabe des Werks und interessante historische Hinweise. Mario Montessori sr. †, Ada Montessori † und besonders Mario Montessori jr. † danke ich für ihr großes Vertrauen und der Association Montessori Internationale (AMI) für die Publikationsrechte. Schließlich danke ich meiner Frau Claudine Baumann-Closuit, dass sie mich im Jahre 1961 in die Welt der Montessori-Pädagogik einführte und mir während der Entstehung der Übersetzung stets beratend zur Seite stand, meiner Tochter Anja und meinem Sohn Daniel, dass sie für dieses Buch auf manches gemeinsame Wochenende verzichteten. Ich danke der Ernst Göhner Stiftung Zug für einen finanziellen Beitrag. Großer Dank

¹⁴ M. Drummond, Learning Arithmetic by the Montessori Method, George G. Harrap, London, Sydney, Bombay, Toronto 1947.

gebührt der Steo-Stiftung, c/o Dr. Heidi Strässler, 8700 Küssnacht, für die großzügige finanzielle Unterstützung, ohne welche dieses Werk nicht realisierbar gewesen wäre und schließlich dem Verleger Chris Müller für die unermüdliche Mithilfe bei der ersten deutschen Herausgabe dieses Werks. Er war nach Absagen aller wichtigen Verlage im deutschen Sprachraum der einzige, der bereit war, dieses aufwändige Werk in seinem Kleinverlag herauszugeben. Dem Herausgeber der Gesammelten Werke von Maria Montessori, Prof. Harald Ludwig, danke ich herzlich dafür, dass er meine langjährige Arbeit an der Psychoarithmetik belohnt hat und meine Bearbeitung in seine Reihe als Band 11 aufgenommen hat. Herrn Jochen Fähndrich, dem Programmleiter Buch im Fachverlag Pädagogik des Herder-Verlages, danke ich für seine geduldige Förderung dieses Bandes.

Meikirch, im September 2011

Harold Frank Baumann

Maria Montessori
Psychoarithmetik

Vorwort

Die Arithmetik, wie sie in diesem Buch dargelegt wird, umfasst ein noch unbekanntes Kapitel der »Kinderpsychologie«, zumal es sich hier um eine Form von Arithmetik handelt, die rational und in ihren Gedankengängen auf das Kind ausgerichtet ist. Die Zahlen, und alles, was mit ihnen zusammenhängt, haben dabei als wissenschaftliche Anreize zur geistigen Aktivität gedient.

Es ist zwar immer wieder gesagt worden, dass der Arithmetik, und den mathematischen Wissenschaften überhaupt, in der Erziehung die wichtige Aufgabe zukommt, das Denken des Kindes zu lenken und es dabei durch gründliche Schulung auf die hohe Stufe der Abstraktion vorzubereiten. Aber dieser doppelten Bedeutung der Arithmetik – als »Mittel zur geistigen Entwicklung« einerseits, als »notwendige Bildungsgrundlage« andererseits – wurde in den Primarschulen zu wenig Rechnung getragen. Vielmehr wurde die Arithmetik als ein schwer überwindbares Hindernis, als eine höchste Anstrengungen erfordernde »Schwierigkeit« und als »trockene Materie« betrachtet.

Legt man dem Kind »wissenschaftlich festgelegtes Material« vor, das ihm auf »klare« und »einleuchtende« Art und Weise die Grundlage für vernunftmäßiges Handeln vermittelt, so erleichtert man ihm nicht nur das Erlernen der Arithmetik, indem man sie in höherer Form darlegt, sondern auch die Entwicklung einer logischen Tiefe, von der man geglaubt hat, sie sei für Kinder unerreichbar. Die Materialien der Arithmetik sind vergleichbar mit »einem Turnplatz der geistigen Ertüchtigung«. Bei der auf der Klarheit der Dinge und auf aktiver Übung beruhenden minutiösen Analyse wird die geistige Entwicklung von allen Einzelheiten begleitet, als wäre die Arithmetik das geeignetste Mittel für den echten psychologischen Umgang mit dem Kind, ein Arsenal experimenteller Psychologie.

Jedes Individuum übt mit regem Interesse für sich selbst; bei jedem Schüler stellt sich der Fortschritt gemäß dem inneren Gebot der Notwendigkeit, sich zu entwickeln, ein. Von hier aus erreicht der einzelne die ihm entsprechende Reifestufe, und als Folge der freien Wahl wird ein logi-