

Aportes investigativos para el diseño curricular en geometría y estadística

Patricia Perry, Carmen Samper, Óscar Molina,
Leonor Camargo, Armando Echeverry

Felipe Fernández, Luisa Andrade,
Benjamín Sarmiento



UNIVERSIDAD PEDAGOGICA
NACIONAL
Educadora de educadores



Aportes investigativos para el diseño curricular en geometría y estadística



**UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA
NACIONAL**

Educadora de educadores



Catalogación en la fuente - Biblioteca Central de la Universidad Pedagógica Nacional

Aportes investigativos para el diseño curricular en geometría y estadística.
Grupo Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría. Grupo Educación Estadística. / Patricia Perry. Felipe Fernández... [et al.] -- 1ª. ed. -- Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional, CIUP, 2013
172 p.

Incluye bibliografía

ISBN: 978-958-8650-54-8 (Impreso)

ISBN: 978-958-8650-81-4 (Digital)

1. Educación – Investigaciones. 2. Formación profesional de maestros.
 3. Geometría – Enseñanza. 4. Geometría – Aprendizaje. 5. Estadística – Enseñanza. 6. Estadística – Aprendizaje. 7. Planificación curricular.
- I. Perry, Patricia. II. Samper, Carmen. III. Molina, Óscar. IV. Camargo, Leonor. V. Echeverry, Armando. VI. Fernández, Felipe. VII. Andrade, Luisa. VIII. Sarmiento, Benjamín. IX. Tit.

370.7 cd. 21 ed.

Aportes investigativos para el diseño curricular en geometría y estadística

**Patricia Perry, Carmen Samper, Óscar Molina,
Leonor Camargo, Armando Echeverry**

**Felipe Fernández, Luisa Andrade,
Benjamín Sarmiento**



**UNIVERSIDAD PEDAGOGICA
NACIONAL**

Educadora de educadores



Aportes investigativos para el diseño curricular en geometría y estadística

© Universidad Pedagógica Nacional
ISBN: 978-958-8650-54-8 (Impreso)
ISBN: 978-958-8650-81-4 (Digital)
Primera edición, Bogotá, D.C., noviembre 2013

Autores:

Grupo Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría

Patricia Perry
Carmen Samper
Óscar Molina
Leonor Camargo
Armando Echeverry

Grupo Educación Estadística

Felipe Fernández
Luisa Andrade
Benjamín Sarmiento

Hecho el depósito legal que ordena la Ley 44 de 1993 y decreto reglamentario 460 de 1995.

Fecha de evaluación: abril de 2013
Fecha de aprobación: mayo de 2013

Prohibida la reproducción total o parcial sin permiso escrito de los autores y la Universidad Pedagógica Nacional

Universidad Pedagógica Nacional

Juan Carlos Orozco Cruz
Rector

Édgar Alberto Mendoza Parada
Vicerrector Académico

Víctor Manuel Rodríguez Sarmiento
Vicerrector de Gestión Universitaria

Alfredo Olaya Toro
Subdirector Centro de Investigaciones, CIUP

Preparación Editorial
Universidad Pedagógica Nacional
Fondo Editorial
Calle 72 N° 11 - 86
Tel.: 347 1190 y 594 1894
editorial.pedagogica.edu.co

Víctor Eligio Espinosa Galán
Coordinador Fondo Editorial

Margarita Misas Avella
Corrección de estilo

Juan Manuel Martínez Restrepo
Fotografía de portada

Johny Adrián Díaz Espitia
Diseño de carátula y diagramación

Impreso y hecho en Colombia
Grupo Dao Digital
Bogotá, Colombia, 2013

Tabla de contenido

Presentación	11
<hr/>	
Parte I.	
Actividad instrumentada y mediación semiótica: dos teorías para describir la conjeturación como organizador curricular	13
<hr/>	
Introducción	15
<hr/>	
Capítulo 1.	
Marco teórico	17
Capítulo 2.	
Metodología de la investigación	25
Capítulo 3.	
Resultados del estudio	71
Capítulo 4.	
Comentarios finales	79
<hr/>	
Bibliografía	87
<hr/>	
Anexo	89

Parte II.	
Rehaciendo el camino hacia la comprensión de la variable aleatoria	93
<hr/>	
Introducción	95
<hr/>	
Capítulo 1.	97
Consideraciones metodológicas	
Capítulo 2.	103
Marco teórico	
Capítulo 3.	113
Trayectoria hipotética de aprendizaje	
Capítulo 4.	125
Resultados	
Capítulo 5.	163
Conclusiones	
<hr/>	
Bibliografía	167

Los Autores

Carmen Samper

Matemática de la Universidad de Ottawa (Canadá) y Magíster en Matemáticas de la Universidad de Maryland (EE. UU.). Profesora titular de la Universidad Pedagógica Nacional, en la cual ha laborado desde 1975, con una interrupción de 10 años, tiempo durante el cual fue profesora del Colegio Nueva Granada. Coautora de las series de textos escolares Alfa, Espiral y Delta, y autora del texto escolar *Geometría* de la Editorial Norma. Coautora de 3 libros y de 4 capítulos que reportan resultados de investigación y de 21 artículos en revistas de circulación nacional e internacional, todos ellos en temas relacionados con la enseñanza y el aprendizaje de la demostración. Coautora del texto *Elementos de Geometría*, publicado por la Universidad Pedagógica Nacional. Actualmente hace parte del grupo de investigación Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría ($\mathcal{A} \cdot \mathcal{G}$) de dicha universidad.

Óscar Molina

Licenciado en Matemáticas con Énfasis en Computación y Magíster en Docencia de la Matemática, de la Universidad Pedagógica Nacional. En 2004 trabajó como profesor de secundaria. Desde 2005 es profesor en la Universidad Pedagógica Nacional, los últimos cinco años como profesor de planta. En 2008 fue profesor ocasional en la Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Ha publicado alrededor de 26 artículos, cuatro de ellos en revistas nacionales (*Revista TED* y *Revista Integración*), tres en revistas internacionales (*Enseñanza de las Ciencias*, *Unión: Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, *Revista Educación Matemática*) y los demás en memorias de eventos nacionales e internacionales sobre temas de cálculo, teoría de conjuntos, trigonometría y didáctica de la geometría. Coautor del libro *Elementos de Geometría*. Actualmente hace parte del grupo de investigación Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría ($\mathcal{A} \cdot \mathcal{G}$) de la Universidad Pedagógica Nacional.

Felipe Fernández

Matemático de la Universidad de los Andes (Colombia) y Magíster en Estadística de la Universidad Nacional de Colombia. Profesor de planta de la Universidad Pedagógica Nacional desde 2005 hasta la fecha. También fue profesor investigador de la Universidad de los Andes, en el centro de educación e investigación “una empresa docente”, desde 1988 hasta 2003. Ha sido coautor de varios libros, capítulos de libros y artículos, relacionados con el ámbito de la Educación Matemática y la Estadística, y editor de la *Revista EMA*. Actualmente es el coordinador del grupo de investigación en Educación Estadística de la Universidad Pedagógica Nacional. Algunos de los textos universitarios publicados de los que es coautor son: *Matemáticas*, *Azar*, *Sociedad: Conceptos básicos de estadística* y *Estadística descriptiva. Introducción al análisis de datos*.

Benjamín Sarmiento

Licenciado en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional y Magíster en Docencia de la Matemática de la Universidad Pedagógica Nacional. Profesor de planta de la Universidad Pedagógica Nacional, en la cual ha laborado desde 2003. Coautor de los libros *Los tres problemas clásicos de la Geometría y Estadística Descriptiva con una introducción al análisis de datos*. También se ha desempeñado como docente de otras universidades de Bogotá, como la Escuela Colombiana de Ingeniería Julio Garavito ECI, Universidad Autónoma de Colombia, la Universidad Sergio Arboleda, Escuela de Administración de Negocios EAN y Universidad Incca de Colombia. Ha participado como profesor investigador en varios proyectos relacionados con Estadística y Tecnología en la enseñanza de las matemáticas. A nivel postgradual ha desarrollado varios cursos y dirigido varias tesis de maestría en la Especialización en Educación Matemática y en la Maestría en Docencia de la Matemática de la Universidad Pedagógica Nacional.

Luisa Andrade

Matemática de la Universidad Javeriana. Profesora catedrática e investigadora de la Universidad Pedagógica Nacional desde 1994. Profesora e investigadora del centro de educación e investigación “una empresa docente” de la Universidad de los Andes durante 12 años. Coautora de libros, capítulos y artículos en revistas de circulación nacional e internacional, todos relativos a resultados de proyectos e investigaciones en el ámbito de la Educación Matemática y la Estadística. Editora de la *Revista EMA. Investigación e innovación en educación matemática*, durante varios años; también editora y traductora de algunos libros en el campo. Actualmente hace parte del grupo de investigación Educación Estadística de la Universidad Pedagógica Nacional.

Leonor Camargo

Licenciada en Matemáticas y Química de la Universidad Pedagógica Nacional (Colombia), Magíster en Docencia de la Matemática de la Universidad Pedagógica Nacional (Colombia) y Doctora en Didáctica de la Matemática de la Universidad de Valencia (España). Profesora asociada e investigadora del Departamento de Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional desde 1994. Coautora de las series de textos escolares Alfa y Espiral. Coautora de 2 libros y de 4 capítulos que reportan resultados de investigación y de 21 artículos en revistas de circulación nacional e internacional, todos ellos en temas relacionados con la enseñanza y el aprendizaje de la demostración. Actualmente hace parte del grupo de investigación Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría ($\mathcal{A} \cdot \mathcal{G}$) de dicha universidad.

Patricia Perry

Licenciada en matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional (Colombia). Desde 2003 hace parte del grupo de investigación Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría ($\mathcal{A} \cdot \mathcal{G}$) de la Universidad Pedagógica Nacional. Fue profesora e investigadora del centro

de educación e investigación “una empresa docente” de la Universidad de los Andes entre 1988 y 2003. Coautora de libros, capítulos y artículos en revistas de circulación nacional e internacional, todos relativos a resultados de estudios de investigación en diversos campos de la educación matemática: diseño y desarrollo curricular, desarrollo profesional de profesores de matemáticas, enseñanza y aprendizaje de la demostración en geometría. Primera editora de la *Revista EMA. Investigación e innovación en educación matemática*, y también editora y traductora de algunos libros en el campo.

Armando Echeverry

Licenciado en matemáticas y física (Universidad del Tolima) Especialista en educación matemática (Universidad Pedagógica Nacional) y Magíster en Docencia de la Matemática del la Universidad Pedagógica Nacional (Colombia). En la actualidad es profesor de la Secretaria de Educación Distrital (Bogotá), catedrático de las universidades Pedagógica Nacional y Jorge Tadeo Lozano. Miembro del grupo de investigación Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría ($\mathcal{A} \cdot \mathcal{G}$) desde 2006 hasta 2011, con el cual participó como coautor de ponencias nacionales e internacionales, así como de artículos en revistas especializadas de carácter nacional e internacional, un libro de texto para los estudiantes de licenciatura en matemáticas y un libro de investigaciones en didáctica de la geometría.

Presentación

El presente libro está dirigido a personas interesadas en la investigación en Educación Matemática, profesores y estudiantes de doctorado y de maestría. Con él se pretende contribuir a suplir una deficiencia de bibliografía de referencia que oriente procesos investigativos en la comunidad educativa de habla hispana. Para ello, se presentan dos investigaciones realizadas: una por el grupo Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría, y otra por el grupo Educación Estadística, del Departamento de Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional (Bogotá, Colombia) en 2010 y 2011, con el apoyo del Centro de Investigaciones de dicha universidad, CIUP. Ambos equipos centraron su mirada investigativa en la formación inicial de profesores con la convicción de que, al reconocer que la geometría y la probabilidad son frágiles en la matemática escolar, es necesario incidir en la formación matemática de los próximos profesores para fortalecer, a futuro, estos dominios en la escuela.

El libro lo conforman dos partes; en cada una de ellas se encuentran elementos que contribuyen a entender diversos aspectos que inciden en una investigación. Se presenta la síntesis de la investigación que encapsula un informe completo del estudio, incluyendo componentes centrales del desarrollo de esta como son el marco teórico, la metodología, los análisis y los resultados. Se identifica, en cada parte, un recuento de la experiencia investigativa, que incluye el señalamiento de logros y dificultades, lo que posibilita la recreación del proceso vivido y la comprensión de la dinámica de la actividad investigativa. Además, se exponen los productos de la investigación que se pone a consideración de la comunidad para su discusión y difusión, esperando así que estos se constituyan en el germen para otras investigaciones.

La primera parte del libro corresponde a una investigación en educación geométrica y es un estudio de la producción de conjeturas en el aula y la organización del contenido temático de una clase de Geometría Plana a partir de estas. La intención, que ha guiado la trayectoria investigativa del grupo Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría,

ha sido profundizar en temas relacionados con la enseñanza y el aprendizaje de la demostración en geometría. En particular, el foco del estudio que se reporta en este libro es la actividad instrumentada con el artefacto Cabri y la mediación semiótica del profesor en torno a las conjeturas propuestas por los estudiantes, con el propósito de construir los teoremas que conformarán el sistema teórico de la clase.

La segunda parte describe una investigación en educación estadística, en la que se aborda la enseñanza de la variable aleatoria. La investigación, siguiendo la perspectiva metodológica de los experimentos de enseñanza, propone una trayectoria hipotética de aprendizaje que se va afinando en el proceso de implementación de las tareas propuestas. Los resultados de la investigación sugieren que el desarrollo de razonamiento estadístico alrededor del trabajo con la variable aleatoria, se ve limitado por dificultades de los estudiantes que conciernen a conceptos básicos de la probabilidad, tales como experimento aleatorio y espacio muestral. La indagación de tales dificultades pone de relieve la problemática de la enseñanza al respecto y la naturaleza compleja de la concepción de variable aleatoria. El trabajo realizado deja como aporte ideas para trabajar en torno a un aprendizaje interconectado y con sentido de los conceptos mencionados, y para establecer conexiones más explícitas entre el trabajo en estadística y el de probabilidad.

Parte I.
Actividad instrumentada
y mediación semiótica:
dos teorías para describir
la conjeturación como
organizador curricular

Patricia Perry, Carmen Samper, Óscar Molina,
Leonor Camargo y Armando Echeverry

Introducción

Los estudiantes participan de manera genuina, autónoma y relevante en la construcción del contenido geométrico que se estudia en el curso. Comienzan por formular, con el apoyo de un software de geometría dinámica, varias conjeturas al problema que les plantea el profesor y luego se involucran en una interacción orquestada por el profesor, a través de la cual las conjeturas formuladas se constituyen en organizador curricular del contenido.

La declaración anterior hace parte de nuestro relato al presentar el nuevo diseño curricular del curso Geometría Plana, que se ubica en el segundo semestre del programa de formación inicial de profesores de matemáticas, ofrecido por la Universidad Pedagógica Nacional (Colombia). Y, la reacción de nuestro auditorio no se hace esperar: “¿varias conjeturas para un mismo problema?”, “¿si nadie propone la conjetura que el profesor espera, le toca hacerlo a él?”, “¿qué más cosas se pueden estudiar alrededor de una conjetura?”, “¿qué hacer con las conjeturas que no son las esperadas por el profesor?”, etc. Enfrentarnos a preguntas como las mencionadas nos permitió ver la pertinencia de enfocar nuestra mirada investigativa en el proceso de conjeturación y en el trabajo posterior que se hace en el aula con las conjeturas propuestas por los estudiantes, hasta llegar a decidir si son candidatas para entrar en un proceso de validación.

Durante los años 2010 y 2011 hicimos nuestra primera aproximación al estudio¹ metódico de la producción de conjeturas en el aula y de la organización del contenido a partir de las conjeturas producidas. Este esfuerzo académico se suma al que hemos venido haciendo desde 2004 para profundizar en asuntos de interés relativos a la enseñanza y el aprendizaje de la demostración en geometría, en el nivel universitario. En el estudio documentamos el proceso a través del cual las conjeturas que producen los estudiantes -apoyados en el software de geometría dinámica Cabri,

1 Estudio que recibió apoyo financiero del Centro de Investigación de la Universidad Pedagógica Nacional -CIUP-.

usado en la resolución de problemas geométricos que se les proponen en clase- se constituyen en un organizador curricular en el aula. Para ello, primero nos enfocamos en caracterizar la actividad instrumentada de los estudiantes, recurriendo a esquemas de utilización; y luego describimos la gestión del profesor, mediante la cual las ideas que producen los estudiantes se constituyen en elementos clave de la construcción de conocimiento.

En esta parte del libro se pretende exponer los detalles de nuestra actividad investigativa. Primero, se presenta el marco teórico que incluye, por un lado, dos referentes teóricos en los que se fundamentan los análisis: la aproximación instrumental y la mediación semiótica del profesor; y, por otro, precisiones sobre el sentido dado a la expresión “organizador curricular”. En segundo lugar, se expone la metodología de la investigación; en particular, se ubica el estudio dentro de la metodología conocida como “experimento de enseñanza”, se precisa información sobre los participantes en la investigación, el dispositivo experimental donde detallamos de dónde proviene la información analizada y cómo fue su tratamiento previo al análisis. Además, al exponer el dispositivo analítico, se dan detalles del proceso vivido para llegar a tener las categorías de análisis, tanto para estudiar la actividad instrumentada de los estudiantes como la mediación semiótica del profesor. En tercer lugar, se exponen las categorías de análisis construidas para analizar la actividad instrumentada de los estudiantes y la actividad mediadora del profesor. En cuarto lugar, se presenta el uso de tales categorías para analizar una situación particular. Por último, se discuten los alcances y la proyección del estudio.