Spektrum der Wissenschaft

KOMPAKT

TOPOLOGIE

Wie abstrakte Mathematik unsere Welt prägt

Quantenfeldtheorie
Verknotete Zustände erklären Naturgesetze

Fußball
Was Sport und Chemie gemeinsam haben

Neue Wunderstoffe
Hoffnungsträger für revolutionäre Technologien

UNSPLASH / GEORGE PAGAN III

EDITORIAL

Folgen Sie uns:

Manon Bischoff
E-Mail: m.bischoff@spektrum.de

Liebe Leserin, lieber Leser,

an der Universität hörte ich erstmals davon, dass abstrakte mathematische Konzepte unsere Naturgesetze beschreiben, wie etwa das Standardmodell der Teilchenphysik. Von da an war ich der Mathematik verfallen. Wie konnte es sein, dass so lebensferne Bereiche offenbar handfeste Anwendungen finden? Je weiter ich im Studium vorankam, desto überraschender und vielfältiger wurden die Verbindungen zwischen beiden Disziplinen. Gerade die Topologie, die dazu dient, geometrische Figuren zu klassifizieren, lief mir immer über den Weg: sei es, um das Verhalten kleinster Teilchen auf subatomarer Ebene zu verstehen oder die besondere Leitfähigkeit neuartiger Materialien zu erklären. Lassen auch Sie sich von der faszinierenden Welt der Topologie in den Bann ziehen!

Eine spannende Lektüre wünscht

M. Bischoff

Erscheinungsdatum dieser Ausgabe: 18.02.2019

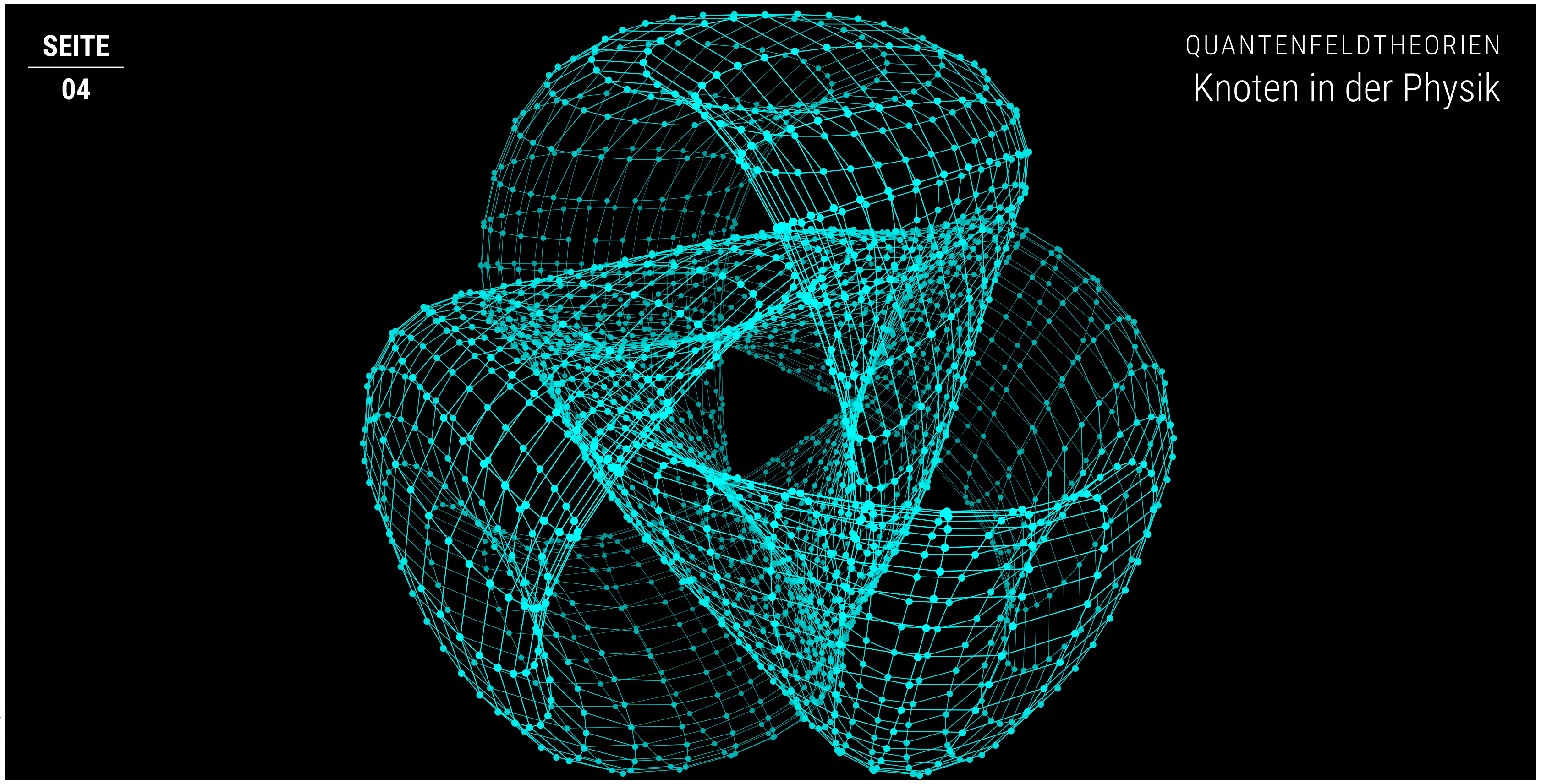
IMPRESSUM

Chefredakteure: Prof. Dr. Carsten Könneker (v.i.S.d.P.)
Redaktionsleiter: Dr. Daniel Lingenhöhl
Art Director Digital: Marc Grove
Layout: Oliver Gabriel, Marina Männle
Schlussredaktion: Christina Meyberg (Ltg.), Sigrid Spies, Katharina Werle
Bildredaktion: Alice Krüßmann (Ltg.), Anke Lingg, Gabriela Rabe
Produktmanagement Digital: Antje Findeklee, Dr. Michaela Maya-Mrschtik
Verlag: Spektrum der Wissenschaft Verlagsgesellschaft mbH, Tiergartenstr. 15–17, 69121 Heidelberg, Tel. 06221 9126-600, Fax 06221 9126-751; Amtsgericht Mannheim, HRB 338114, UStd-Id-Nr. DE229038528
Geschäftsleitung: Markus Bossle
Marketing und Vertrieb: Annette Baumbusch (Ltg.), Michaela Knappe (Digital)
Leser- und Bestellservice: Helga Emmerich, Sabine Häusser, Ilona Keith, Tel. 06221 9126-743, E-Mail: service@spektrum.de

Die Spektrum der Wissenschaft Verlagsgesellschaft mbH ist Kooperationspartner der Nationales Institut für Wissenschaftskommunikation gGmbH (NaWik).

Bezugspreis: Einzelausgabe € 4,99 inkl. Umsatzsteuer
Anzeigen: Wenn Sie an Anzeigen in unseren Digitalpublikationen interessiert sind, schreiben Sie bitte eine E-Mail an service@spektrum.de.

INHALT



STUDIOM1 / GETTY IMAGES / ISTOCK

LASSEDESIGNEN / STOCK.ADOBE.COM

AGSANDREW / STOCK.ADOBE.COM

QUANTENFELDTHEORIEN

KNOTEN in der Physik

von José Manuel Fernández de Labastida

ROST-9D / GETTY IMAGES / ISTOCK

In den 1980er Jahren gelang ein ungewöhnlicher Brückenschlag zwischen den fundamentalsten Wissenschaften: Aus dem Zusammenspiel von physikalischer Intuition und mathematischer Konsequenz entstanden die topologischen Quantenfeldtheorien.

Sind Mathematik und Physik von Grund auf verschieden? Die Physik beobachtet, analysiert und sucht Regeln hinter den Naturereignissen. Die Mathematik dagegen errichtet in ihrer eigenen Sprache Gedankengebäude und erforscht deren innere Struktur. Was in der Welt geschieht, scheint sie weniger zu interessieren. Doch der Unterschied war nicht immer so groß – im Gegenteil.

Seit Galileo Galilei (1564–1642) sprechen die Physiker die Sprache der Mathematik, und vom 17. bis weit ins 19. Jahrhundert hinein entwickelten sich beide Wissenschaften Hand in Hand. Berühmte Naturwissenschaftler jener Zeit waren häufig Mathematiker und Physiker zugleich. Zum Beispiel entwickelte Isaac Newton (1643–1727) die moderne Analysis, um die Bewegung der Körper in Gesetze fassen zu können. Erst in der Mitte des 19. Jahrhunderts folgten die Mathematiker – zumindest die tonangebenden – bedingungslos ihrer Liebe zur reinen Abstraktion, und die Wege der beiden Wissenschaften trennten sich.

Im ersten Drittel des 20. Jahrhunderts revolutionierten zwei Ideen die Physik: die Relativitätstheorie und die Quantenmechanik. Um den mathematischen Rahmen mussten sich die Physiker in beiden Fällen nicht sorgen, denn die Mathematiker hielten ihn schon bereit. Die Relativitätstheorie stützte sich auf die moderne Geometrie und die Tensorrechnung, während die Quantenmechanik in der Sprache der Hilbert-Räume formuliert werden konnte. So bereitete die abstrakte Mathematik den Boden für physikalische Erkenntnisse, die oft erst Jahre später im Experiment bestätigt wurden.

Doch schon in den 1940er Jahren, als in der Physik die ersten Quantenfeldtheorien aufkamen, bahnte sich eine umgekehrte Entwicklung an. Aus ihr gingen in den 1980er Jahren die topologischen Quantenfeldtheorien hervor. Diesmal ließen sich die Mathematiker von der Vorstellungskraft der Physiker anregen und kamen ein Stück voran.

Weitere Felder eines fruchtbaren Zusammenspiels zwischen Mathematik und Physik sind Eichtheorien und die Knotentheorie. Wie sich herausstellen wird, sind diese Konzepte auch untereinander eng verbunden. Unter den Teilgebieten der Mathematik profitierte am meisten eines, das

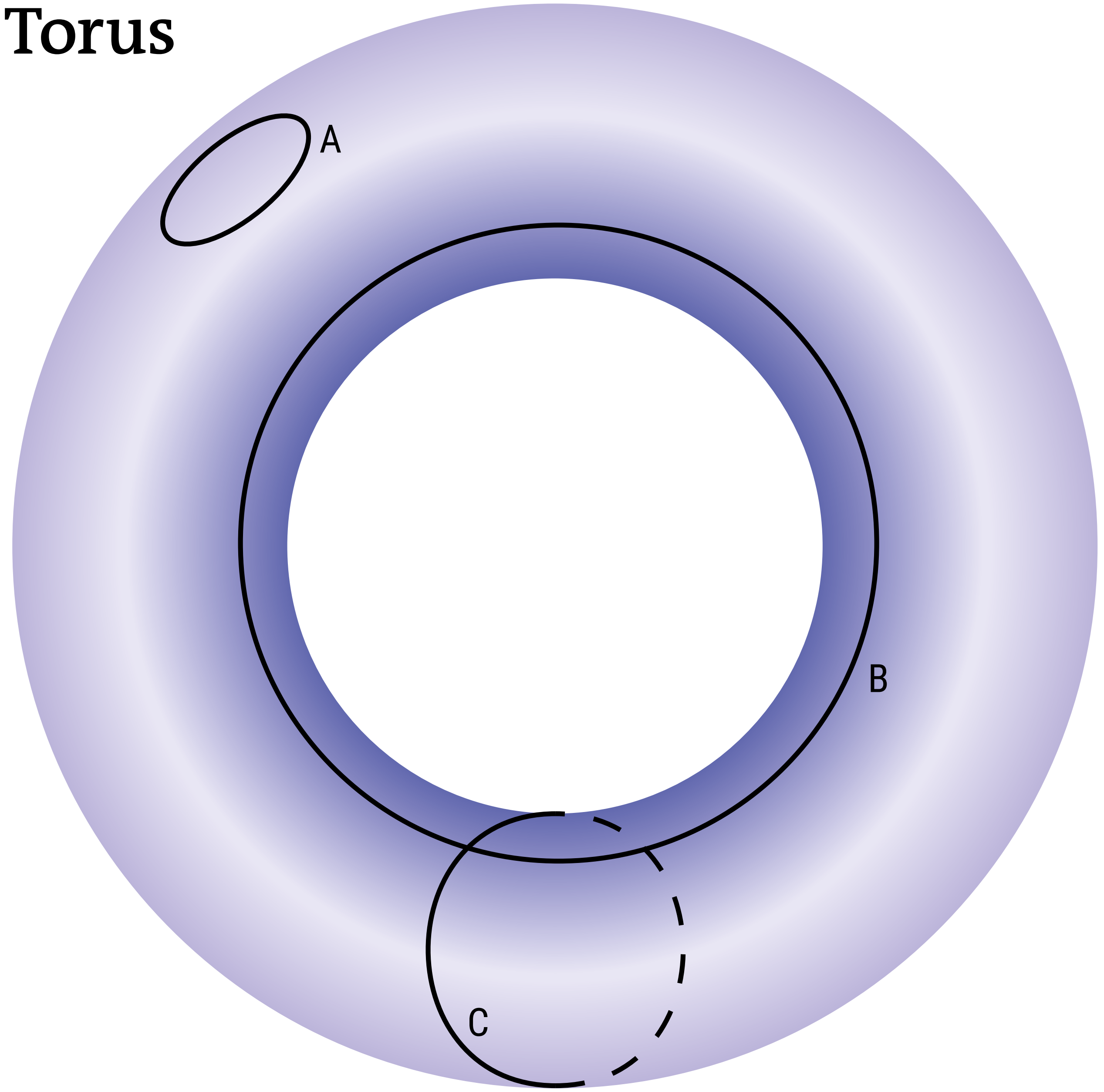
Jose Manuel Fernandez de Labastida ist Professor für Theoretische Physik an der Universität von Santiago de Compostela (Spanien). Nach seiner Promotion an der Staatsuniversität von New York in Stony Brook im Jahre 1985 forschte er am Institute for Advanced Study in Princeton und am Europäischen Kernforschungszentrum CERN in Genf. Sein Interesse gilt Aspekten der Superstring- und der topologischen Quantenfeldtheorien im Überschneidungsgebiet zwischen Mathematik und Physik.

auf den ersten Blick nichts mit Physik zu tun hat: die Topologie.

Topologie

In diesem Zweig der Mathematik geht es – unter anderem – um globale Eigenschaften von Oberflächen, Körpern und anderen Objekten. Vergleichen wir zum Beispiel die Oberflächen eines Wasserballs und eines Schwimmrings. Ist der Ball weich, kann er in die Gestalt einer Birne verformt, zu einem Kissen zusammengedrückt oder wie ein Wurm in die Länge gezogen werden, ohne dass seine Haut verletzt würde. Nur in die Form des Schwimmrings lässt er sich nicht bringen. Denn dazu müsste man die Enden des Wurmes aufschneiden und neu miteinander verbinden oder in die Mitte des Kissens ein Loch stechen. Mathematisch gesprochen: Eine Kugeloberfläche (wie die des Wasserballs) kann nicht stetig zu einer Torusoberfläche (wie der des Schwimmrings) deformiert werden. Im Allgemeinen betrachtet die Topologie Objekte als gleich und nennt sie äquivalent, wenn sie durch stetige Deformierungen, das heißt ohne Schneiden oder Kleben, ineinander überführbar sind. Zum Beispiel sind die Oberflächen des Balls, des Kissens, des

Der Torus



Die Topologie untersucht globale Eigenschaften von Mengen, die unter stetigen Deformierungen dieser Mengen erhalten bleiben. Zum Beispiel unterscheidet sich der Torus von der Kugel durch die Eigenschaft, dass auf seiner Oberfläche Kurven existieren, die sich nicht auf einen Punkt zusammenziehen lassen. Im Bild sind drei Typen von Kurven dargestellt, die auf dem Torus vorkommen: Anders als die Kurve A können B und C nicht auf einen Punkt zusammenschnurren. Das bleibt auch so, wenn man den Torus zusammendrückt, in die Länge zieht oder auf andere Weise deformiert, ohne seine Haut zu verletzen.

J. M. FERNÁNDEZ DE LABASTIDA

Wurmes und der Birne topologisch gleich. Dagegen ist die Oberfläche des Schwimmrings von diesen verschieden.

Woran erkennt man, ob sich zwei Objekte topologisch unterscheiden? Man sucht eine Eigenschaft, die sich unter stetigen Deformierungen der Objekte nicht ändert: eine topologische Invariante. Objekte, die sich in ihr nicht gleichen, können auch nicht äquivalent sein.

Für die Kugeloberfläche haben die Mathematiker eine topologische Invariante gefunden: Jede geschlossene Kurve, die wie eine Schlinge aus Gummifaden auf der Oberfläche liegt, lässt sich auf einen einzigen Punkt zusammenziehen. Dasselbe gilt für Kurven auf dem Kissen, dem Wurm, der Birne und jeder anderen stetigen Deformation der Kugeloberfläche. Die Eigenschaft hat globalen Charakter, denn sie macht eine generelle Aussage über die geschlossenen Kurven auf der Kugel, unabhängig davon, wie und wo sie im Einzelnen verlaufen.

Auf dem Torus jedoch kann eine um das Loch in der Mitte geschlungene Kurve ebenso wenig zu einem Punkt schrumpfen wie eine, die sich um seinen Körper windet. Oberflächen oder allgemeinere Objekte indirekt über geschlossene Kurven zu charakterisieren, ist ein Grundprinzip der Topologie, das uns später wieder begegnen wird.

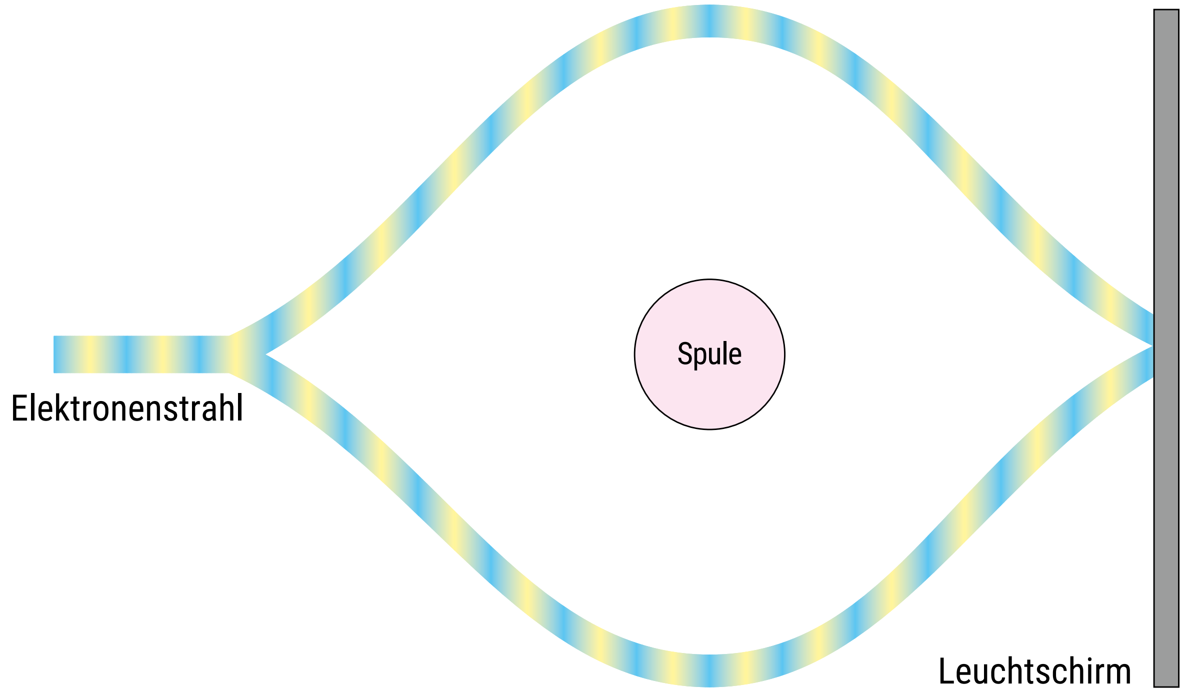
Topologie und Physik

Warum interessieren sich Physiker für diese mathematische Disziplin? Die Physik ist in einem vierdimensionalen Raum zu Hause, denn sie benötigt drei Dimensionen für den Ort und eine weitere für die Zeit. Ihre Gesetze beschreiben normalerweise lokale Ereignisse, wie zum Beispiel den Stoß zweier Körper an einem bestimmten Ort zu einer bestimmten Zeit. Also sollte man erwarten, dass in der Physik nur die lokalen, nicht aber die globalen Eigenschaften des Raumes eine Rolle spielen. Physik und Topologie hätten dann wenig gemeinsam, denn die Letztere untersucht ja gerade die globalen Eigenschaften des Raumes.

Doch 1959 sagten die Physiker Yakir Aharonov und David Bohm (1917–1992) einen Effekt voraus, der zeigt, dass globale Eigenschaften des Raumes ein physikalisches System messbar beeinflussen können. Er trägt seither ihren Namen; ein Jahr später hat Robert G. Chambers von der University of Bristol ihn im Experiment beobachtet.

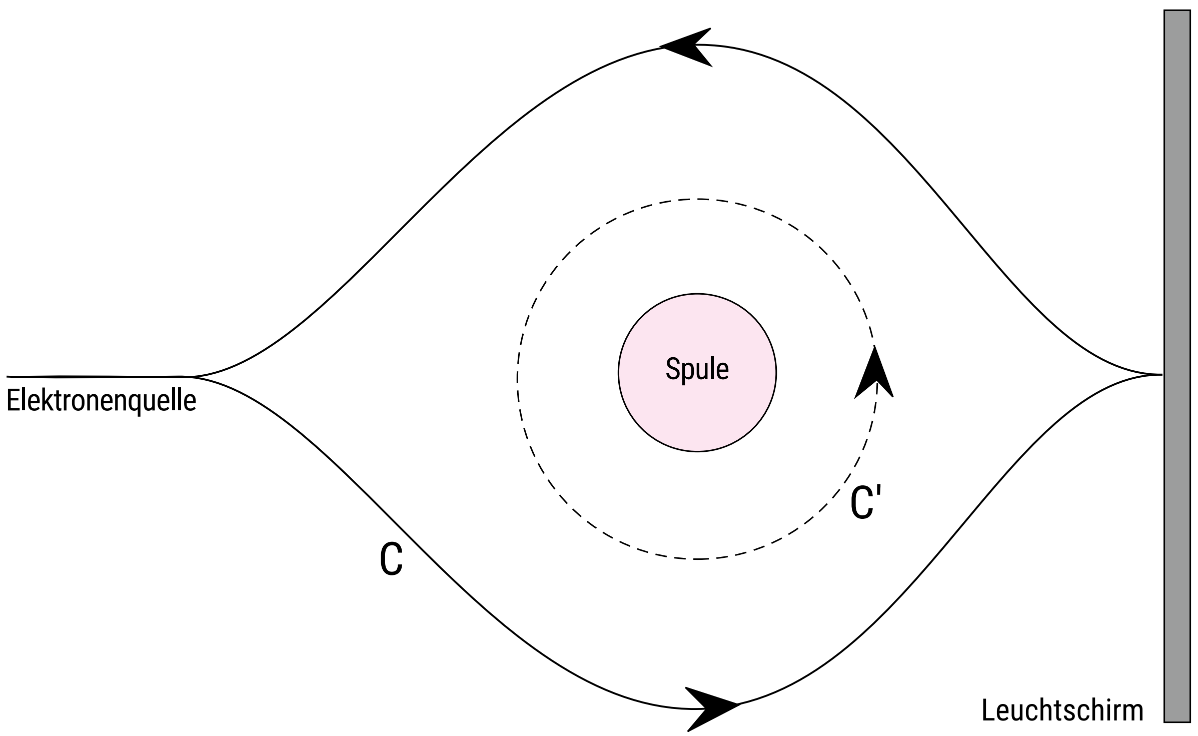
Die eine Hälfte eines geteilten Elektronenstrahls wird links, die andere rechts an einer sehr langen Spule vorbeigeschickt, die senkrecht auf der Ebene der Teilchenwege steht. Hinter der Spule werden die Teilstrahlen wieder zusammengeführt und auf einem Leuchtschirm überlagert. Es entsteht ein Interferenzmuster aus hellen und dunklen Streifen: Nur dort, wo viele Elektronen eintreffen, leuchtet der Schirm hell. Die bloße Anwesenheit der Spule hat keinen Einfluss auf das Muster. Schickt man aber einen Strom durch die Spule, so verschieben sich die Streifen auf dem Schirm in Abhängigkeit von der Stromstärke. Das ist der Aharonov-Bohm-Effekt.

Die klassische Physik kann diesen Effekt nicht erklären, denn der Strom erzeugt nur im Inneren der Spule ein Magnetfeld. Im Außenraum, wo die Elektronen fliegen, herrscht weder ein elektrisches noch ein magnetisches Feld, auch wenn Strom fließt. (Genau genommen müsste dafür die Spule unendlich lang sein. Im Experiment wird das Feld nach außen durch eine supraleitende Hülle komplett abgeschirmt.) Glaubt man den nach ihrem Entdecker James C. Maxwell (1831–1879) benannten Grundgleichungen des klassischen Elektromagnetismus, so ist die Kraft auf ein geladenes



Das Experiment zur Beobachtung des Aharonov-Bohm-Effekts

Die beiden Hälften eines geteilten Elektronenstrahls werden links und rechts an einer Spule vorbeigeführt, die senkrecht zu der von den Elektronenbahnen aufgespannten Ebene (der Bildebene) steht. Auf dem Leuchtschirm hinter der Spule erzeugen die Elektronen ein Interferenzmuster, das sich verändert, sobald in der Spule ein Strom fließt. Die Geräte, welche die Elektronen auf diese gekrümmten Bahnen zwingen, sind für den Effekt unwesentlich und deshalb nicht eingezeichnet.



Aharonov-Bohm-Effekt

Geht man entlang der unteren Elektronenbahn von der Quelle zum Schirm und entlang der oberen wieder zurück, entsteht eine geschlossene Kurve *C* um die Spule. Das Wegintegral des magnetischen Potenzials entlang dieser Kurve um die Spule ist gleich der Differenz der Wegintegrale entlang der beiden Elektronenbahnen von der Quelle zum Schirm, denn das Vorzeichen des Integrals entlang der oberen Bahn kehrt sich durch den Richtungswechsel um. Das Wegintegral ändert sich nicht unter der Deformation von *C* (beispielsweise zu einem Kreis *C*'), welche die Spule nicht trifft Sobald ein Strom fließt, ist das Wegintegral entlang einer Kurve wie *C* ungleich null; also müssen die beiden Wegintegrale entlang der unteren und der oberen Bahn von der Quelle zum Schirm verschieden sein. Im Allgemeinen sind damit auch die Phasenfaktoren verschieden, mit denen die Wellenfunktionen der beiden Elektronenstrahlen multipliziert werden.

J. M. FERNÁNDEZ DE LABASTIDA

Teilchen der Stärke des Feldes an dieser Stelle proportional, insbesondere gleich null, wenn das Feld null ist. Im feldfreien Raum dürften die Elektronen vom Strom in der Spule eigentlich nichts spüren.

Der Schlüssel zur Erklärung des unerwarteten Effekts ist das magnetische Potenzial. Im Gegensatz zur klassischen Physik, wo es als reine Rechengröße dient, kann es in der Quantenmechanik messbare Auswirkungen haben. Die Elektronen reagieren auf den Strom in der Spule, weil dieser das magnetische Potenzial im Außenraum verändert.

Das magnetische Potenzial

Das Magnetfeld ist ein Vektorfeld in Raum und Zeit: An jedem Raumpunkt sitzt ein Vektor, ein Pfeil, der wie eine Kompassnadel in die Richtung der Feldlinien zeigt. Seine Länge gibt die Feldstärke an und kann ebenso wie seine Richtung mit der Zeit variieren. Auch das elektrische Feld ist ein solches Vektorfeld. Die Maxwell-Gleichungen beschreiben, wie sich die beiden Felder mit der Zeit verändern.

In der klassischen Physik pflegt man beide Felder durch so genannte Potenziale auszudrücken. Das sind zunächst künstlich eingeführte Hilfsgrößen; mit ihnen lassen sich die Maxwell-Gleichungen viel übersichtlicher darstellen als mit den Feldern selbst. Das magnetische Potenzial ist wieder ein Vektorfeld (mit Länge und Richtung in jedem Raumpunkt), das elektrische Potenzial ein skalares (richtungsloses) Feld. Aus der Kenntnis beider Potenziale kann man jederzeit auf die Felder zurückschließen.

Es gibt einen weiteren guten Grund für ihre Einführung: die Eichfreiheit. Die Potenziale sind nicht eindeutig bestimmt, das heißt, zu ein und demselben Feld gibt es verschiedene Potenziale. Die Entscheidung für ein bestimmtes Paar von Potenzialen nennt man Eichung, den Wechsel zu anderen Potenzialen, die dieselben Felder beschreiben, Eichtransformation. Die Felder ändern sich also unter dieser Operation nicht – sie sind eichinvariant. Durch geschickte Eichung vereinfachen sich viele Rechnungen.

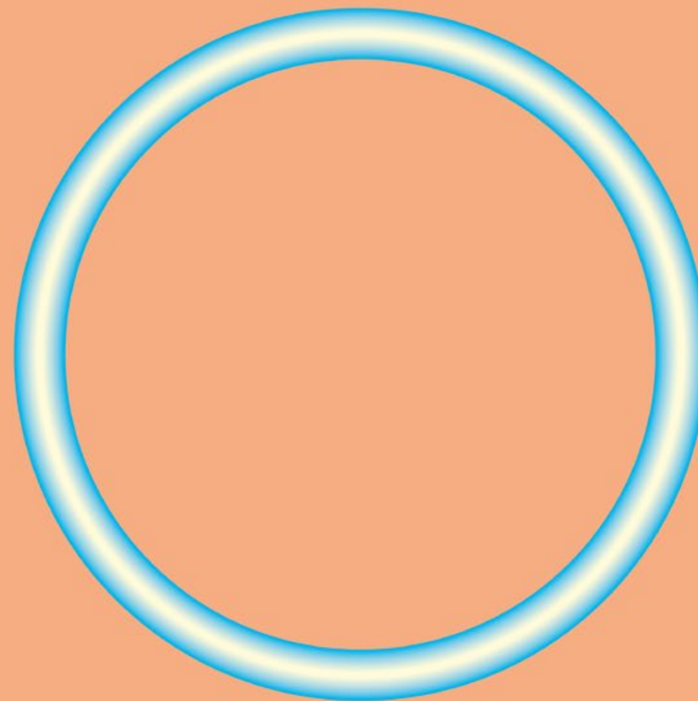
Wichtig für den Aharonov-Bohm-Effekt ist nicht das magnetische Potenzial an sich, sondern sein Wegintegral entlang geschlossener Kurven. Was ist das? Betrachten wir zum Beispiel einen Kreis um die Spule. Wie an jedem Raumpunkt sitzt auch an jedem Punkt der Kreislinie ein Vektor des magnetischen Potenzials. Er lässt sich zerlegen in eine Komponente tangential zum Kreis und eine Komponente senkrecht dazu. Man bestimmt das Wegintegral des magnetischen Potenzials entlang des Kreises, indem man auf der Kreislinie um die Spule herumgeht und dabei die Längen aller Tangentialkomponenten gewissermaßen aufaddiert. Korrekt ausgedrückt: Man integriert über die Tangentialkomponente des Potenzials entlang der Kurve.

Welche Werte kann das Integral annehmen? Aus den Maxwell-Gleichungen ergibt sich, dass das Wegintegral des magnetischen Potenzials entlang einer beliebigen geschlossenen Kurve proportional ist zum eingeschlossenen magnetischen Fluss, das heißt anschaulich zur Zahl der umrundeten Magnetfeldlinien. Fließt in der Spule kein Strom, sind die Felder überall gleich null und das Wegintegral entlang jeder geschlossenen Kurve auch, denn es gibt keinen magnetischen Fluss, den eine Kurve einschließen könnte.

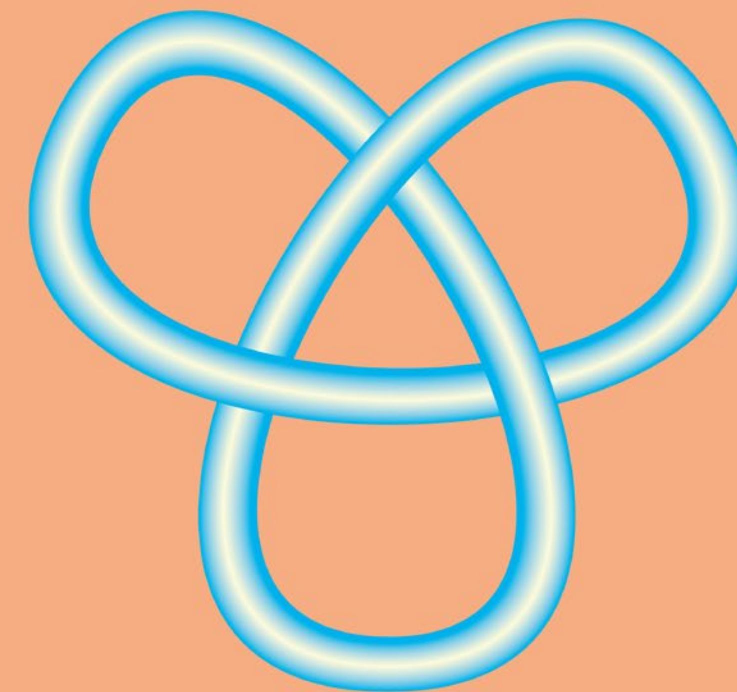
Dasselbe lässt sich auch mathematisch zeigen. In der Situation ohne Strom unterscheidet sich das magnetische Potenzial nur durch eine Eichtransformation vom

KNOTEN

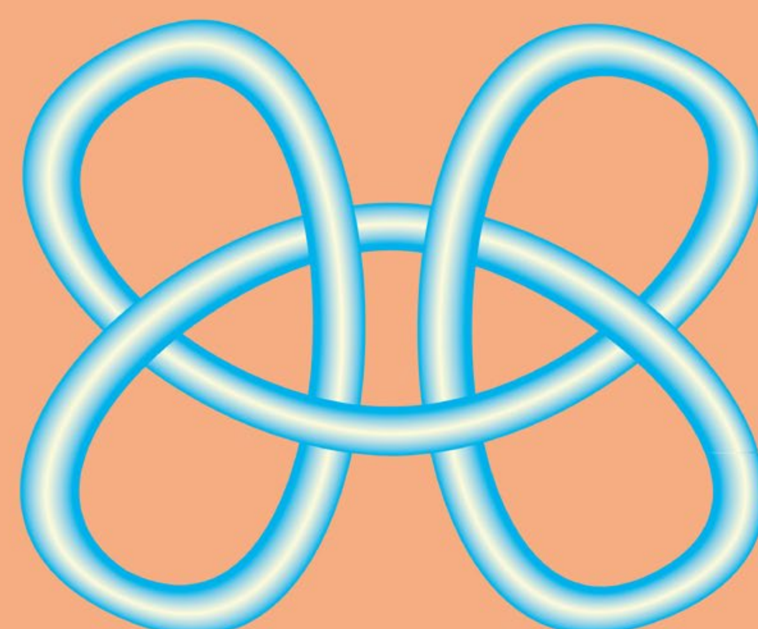
Ein Knoten ist eine geschlossene Kurve im dreidimensionalen Raum, die sich selbst nirgends schneidet. Der triviale Knoten, das Kleeblatt und der Kreuzknoten sind nicht äquivalent, denn keinen von ihnen kann man in einen der anderen überführen, ohne ihn aufzuschneiden. Aus mehreren Knoten entsteht eine Verkettung. Unter den zweikomponentigen ist die hopfsche Verkettung die einfachste.



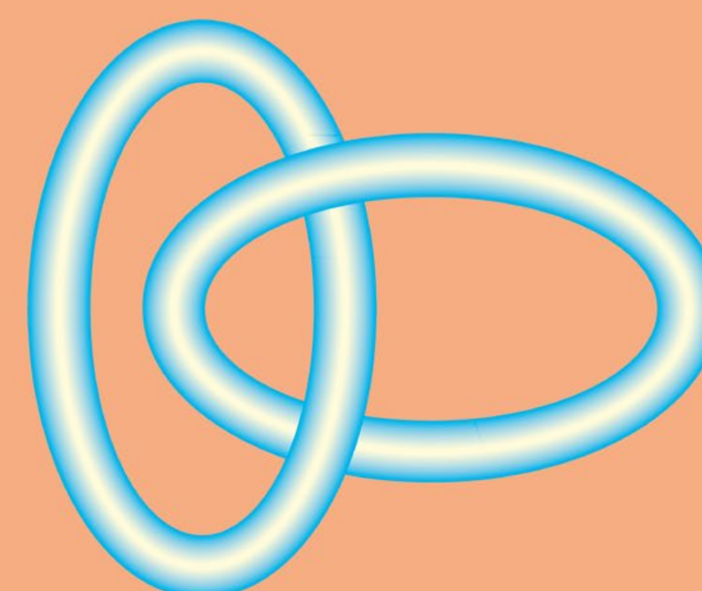
trivialer Knoten



Kleeblattschlinge



Kreuzknoten



Hopfsche Verkettung

J. M. FERNÁNDEZ DE LABASTIDA