

N. BOURBAKI

ÉLÉMENTS DE MATHÉMATIQUE

Théories spectrales **Chapitres 1 et 2**

Seconde édition,
refondue et augmentée



Springer

N. BOURBAKI

ÉLÉMENTS DE
MATHÉMATIQUE

N. BOURBAKI

ÉLÉMENTS DE
MATHÉMATIQUE

THÉORIES SPECTRALES

Chapitres 1 et 2

Seconde édition,
refondue et augmentée

 Springer

N. Bourbaki
Institut Henri Poincaré
Paris Cedex 05, France

ISBN 978-3-030-14063-2 ISBN 978-3-030-14064-9 (eBook)
<https://doi.org/10.1007/978-3-030-14064-9>

Edition originale publiée par Hermann, Paris, 1967

© N. Bourbaki 1967, 2007, 2019

This work is subject to copyright. All rights are reserved by the Publisher, whether the whole or part of the material is concerned, specifically the rights of translation, reprinting, reuse of illustrations, recitation, broadcasting, reproduction on microfilms or in any other physical way, and transmission or information storage and retrieval, electronic adaptation, computer software, or by similar or dissimilar methodology now known or hereafter developed.

The use of general descriptive names, registered names, trademarks, service marks, etc. in this publication does not imply, even in the absence of a specific statement, that such names are exempt from the relevant protective laws and regulations and therefore free for general use.

The publisher, the authors and the editors are safe to assume that the advice and information in this book are believed to be true and accurate at the date of publication. Neither the publisher nor the authors or the editors give a warranty, expressed or implied, with respect to the material contained herein or for any errors or omissions that may have been made. The publisher remains neutral with regard to jurisdictional claims in published maps and institutional affiliations.

This Springer imprint is published by the registered company Springer Nature Switzerland AG
The registered company address is: Gewerbestrasse 11, 6330 Cham, Switzerland

THÉORIES SPECTRALES

SOMMAIRE.....	v
MODE D'EMPLOI.....	vii
INTRODUCTION.....	xi
CHAPITRE I. — ALGÈBRES NORMÉES.....	1
§ 1. <i>Spectres et caractères</i>	1
§ 2. <i>Algèbres normées</i>	15
§ 3. <i>Algèbres de Banach commutatives</i>	29
§ 4. <i>Calcul fonctionnel holomorphe</i>	49
§ 5. <i>Algèbres de Banach commutatives régulières</i>	88
§ 6. <i>Algèbres stellaires</i>	95
§ 7. <i>Spectre des endomorphismes des espaces de Banach</i> . .	127
§ 8. <i>Algèbres de fonctions continues sur un espace compact</i>	142
Exercices du § 1.	153
Exercices du § 2.	155
Exercices du § 3.	166
Exercices du § 4.	172
Exercices du § 5.	178

Exercices du § 6.	180
Exercices du § 7.	187
Exercices du § 8.	191
CHAPITRE II. — GROUPES LOCALEMENT COMPACTS	
COMMUTATIFS.....	199
§ 1. <i>Transformation de Fourier</i>	201
§ 2. <i>Classification</i>	244
§ 3. <i>Sous-espaces invariants</i>	250
Exercices du § 1.	262
Exercices du § 2.	304
Exercices du § 3.	308
FORMULAIRE DE THÉORIE DE FOURIER.....	319
INDEX DES NOTATIONS.....	323
INDEX TERMINOLOGIQUE	327
TABLE DES MATIÈRES.....	333

MODE D'EMPLOI

1. Le traité prend les mathématiques à leur début et donne des démonstrations complètes. Sa lecture ne suppose donc, en principe, aucune connaissance mathématique particulière, mais seulement une certaine habitude du raisonnement mathématique et un certain pouvoir d'abstraction. Néanmoins, le traité est destiné plus particulièrement à des lecteurs possédant au moins une bonne connaissance des matières enseignées dans la première ou les deux premières années de l'université.

2. Le mode d'exposition suivi est axiomatique et procède le plus souvent du général au particulier. Les nécessités de la démonstration exigent que les chapitres se suivent, en principe, dans un ordre logique rigoureusement fixé. L'utilité de certaines considérations n'apparaîtra donc au lecteur qu'à la lecture de chapitres ultérieurs, à moins qu'il ne possède déjà des connaissances assez étendues.

3. Le traité est divisé en Livres et chaque Livre en chapitres. Les Livres actuellement publiés, en totalité ou en partie, sont les suivants :

Théorie des ensembles	désigné par E
Algèbre	— A
Topologie générale	— TG
Fonctions d'une variable réelle	— FVR
Espaces vectoriels topologiques	— EVT
Intégration	— INT
Algèbre commutative	— AC
Variétés différentiables et analytiques	— VAR
Groupes et algèbres de Lie	— LIE
Théories spectrales	— TS
Topologie algébrique	— TA

Dans les *six premiers* Livres (pour l'ordre indiqué ci-dessus), chaque énoncé ne fait appel qu'aux définitions et résultats exposés précédemment dans le chapitre en cours ou dans les chapitres *antérieurs dans l'ordre suivant* : E ; A, chapitres I à III ; TG, chapitres I à III ; A, chapitres IV et suivants ; TG, chapitres IV et suivants ; FVR ; EVT ; INT. À partir du septième Livre, le lecteur trouvera éventuellement, au début de chaque Livre ou chapitre, l'indication précise des autres Livres ou chapitres utilisés (les six premiers Livres étant toujours supposés connus).

4. Cependant, quelques passages font exception aux règles précédentes. Ils sont placés entre deux astérisques : *...*. Dans certains cas, il s'agit seulement de faciliter la compréhension du texte par des exemples qui se réfèrent à des faits que le lecteur peut déjà connaître par ailleurs. Parfois aussi, on utilise, non seulement les résultats supposés connus dans tout le chapitre en cours, mais des résultats démontrés ailleurs dans le traité. Ces passages seront employés librement dans les parties qui supposent connus les chapitres où ces passages sont insérés et les chapitres auxquels ces passages font appel. Le lecteur pourra, nous l'espérons, vérifier l'absence de tout cercle vicieux.

5. À certains Livres (soit publiés, soit en préparation) sont annexés des *fascicules de résultats*. Ces fascicules contiennent l'essentiel des définitions et des résultats du Livre, mais aucune démonstration.

6. L'armature logique de chaque chapitre est constituée par les *définitions*, les *axiomes* et les *théorèmes* de ce chapitre ; c'est là ce qu'il est principalement nécessaire de retenir en vue de ce qui doit suivre. Les résultats moins importants, ou qui peuvent être facilement retrouvés à partir des théorèmes, figurent sous le nom de « propositions », « lemmes », « corollaires », « remarques » ; etc. ; ceux qui peuvent être omis en première lecture sont imprimés en petits caractères. Sous le nom de « scholie », on trouvera quelquefois un commentaire d'un théorème particulièrement important.

Pour éviter des répétitions fastidieuses, on convient parfois d'introduire certaines notations ou certaines abréviations qui ne sont valables qu'à l'intérieur d'un seul chapitre ou d'un seul paragraphe (par exemple, dans un chapitre où tous les anneaux sont commutatifs, on peut convenir que le mot « anneau » signifie toujours « anneau commutatif »). De telles conventions sont explicitement mentionnées à la tête du chapitre ou du paragraphe dans lequel elles s'appliquent.

7. Certains passages sont destinés à prémunir le lecteur contre des erreurs graves, où il risquerait de tomber ; ces passages sont signalés en marge par le signe **Z** (« tournant dangereux »).

8. Les exercices sont destinés, d'une part, à permettre au lecteur de vérifier qu'il a bien assimilé le texte ; d'autre part à lui faire connaître des résultats qui n'avaient pas leur place dans le texte ; les plus difficiles sont marqués du signe ¶.

9. La terminologie suivie dans ce traité a fait l'objet d'une attention particulière. *On s'est efforcé de ne jamais s'écarter de la terminologie reçue sans de très sérieuses raisons.*

10. On a cherché à utiliser, sans sacrifier la simplicité de l'exposé, un langage rigoureusement correct. Autant qu'il a été possible, les *abus de langage ou de notation*, sans lesquels tout texte mathématique risque de devenir pédantesque et même illisible, ont été signalés au passage.

11. Le texte étant consacré à l'exposé dogmatique d'une théorie, on n'y trouvera qu'exceptionnellement des références bibliographiques ; celles-ci sont parfois groupées dans des *Notes historiques*. La bibliographie qui suit chacune de ces Notes ne comporte le plus souvent que les livres et mémoires originaux qui ont eu le plus d'importance dans l'évolution de la théorie considérée ; elle ne vise nullement à être complète.

Quant aux exercices, il n'a pas été jugé utile en général d'indiquer leur provenance, qui est très diverse (mémoires originaux, ouvrages didactiques, recueils d'exercices).

12. Dans la nouvelle édition, les renvois à des théorèmes, axiomes, définitions, remarques, etc. sont donnés en principe en indiquant successivement le Livre (par l'abréviation qui lui correspond dans la liste donnée au n° 3), le chapitre et la page où ils se trouvent. À l'intérieur d'un même Livre, la mention de ce Livre est supprimée ; par exemple, dans le Livre d'Algèbre,

E, III, p. 32, cor. 3

renvoie au corollaire 3 se trouvant au Livre de Théorie des Ensembles, chapitre III, page 32 de ce chapitre ;

II, p. 24, prop. 17

renvoie à la proposition 17 du Livre d'Algèbre, chapitre II, page 24 de ce chapitre.

Les fascicules de résultats sont désignés par la lettre R ; par exemple : EVT, R signifie « fascicule de résultats du Livre sur les Espaces Vectoriels Topologiques ».

Comme certains Livres doivent être publiés plus tard dans la nouvelle édition, les renvois à ces Livres se font en indiquant successivement le Livre, le chapitre, le paragraphe et le numéro où devrait se trouver le résultat en question ; par exemple :

AC, III, § 4, n^o 5, cor. de la prop. 6.

INTRODUCTION

Les *Théories spectrales* visent à étudier les propriétés de certaines algèbres normées, les exemples fondamentaux étant l'algèbre des fonctions continues à valeurs complexes sur un espace topologique, l'algèbre des endomorphismes d'un espace de Banach et l'algèbre de convolution des fonctions intégrables par rapport à une mesure de Haar sur un groupe localement compact. La portée de cette étude n'est pas nécessairement apparente par cette simple indication, mais il n'est besoin pour en saisir l'importance que de constater que deux mathématiciens contemporains, à moins qu'ils n'appartiennent à la même chapelle, n'auront bien souvent comme connaissances communes, outre l'algèbre linéaire et la partie élémentaire du calcul différentiel et intégral, que certains aspects de l'analyse de Fourier.

Dans les deux premiers chapitres de ce Livre, nous développons les idées les plus fondamentales des théories spectrales, et considérons plus en détail le troisième exemple mentionné ci-dessus, autrement dit, la *transformation de Fourier*, dans le cadre d'un groupe localement compact commutatif.

Les chapitres suivants poursuivront d'abord la théorie générale des applications linéaires compactes, puis celle des opérateurs sur les espaces hilbertiens, ce cas incluant les applications linéaires définies seulement sur un sous-espace (en général dense) d'un tel espace. Comme on le sait, cette théorie est la base du formalisme mathématique de la Mécanique Quantique. Finalement, nous présenterons la théorie élémentaire des représentations unitaires des groupes topologiques, notamment compacts, dont nous avons déjà eu à nous servir dans le chapitre IX du Livre *Groupes et algèbres de Lie*.

Les titres des deux premiers chapitres sont les mêmes que ceux de la première édition de ce Livre, parue en 1967. Ils sont revus, corrigés et augmentés.

Pour la facilité de la lecture, nous indiquons ci-dessous les changements les plus importants qui se trouvent dans cette édition, et tout particulièrement les ajouts.

Pour le chapitre I :

- Dans le n° 3 du §3, nous introduisons la notion d'application partielle propre, qui permet d'énoncer de manière fonctorielle la correspondance de Gelfand entre espaces localement compacts et algèbres stellaires commutatives.

- Dans le §4, nous avons ajouté les n°s 13 et 14, qui traitent du calcul fonctionnel holomorphe dans les algèbres normables réelles ou complexes, et dans les algèbres sans élément unité.

- Dans le §6, la présentation du calcul fonctionnel continu a été remaniée (n° 6). Les n°s 9 à 11 sont nouveaux ; ils considèrent la notion d'élément positif dans une algèbre stellaire générale, les unités approchées de telles algèbres, et le quotient d'une algèbre stellaire par un idéal bilatère fermé.

- Le §7, concernant les propriétés spectrales les plus élémentaires des endomorphismes des espaces de Banach est essentiellement nouveau ; les numéros n°s 7 et 8 reprennent partiellement certains numéros de l'ancien paragraphe 6. C'est ce nouveau paragraphe qui servira de base à l'étude plus approfondies des endomorphismes des espaces hilbertiens dans le chapitre IV.

Pour le chapitre II :

- Le §1 concernant la transformation de Fourier a été revu en détail, par exemple le n° 6 qui traite de la fonctorialité de la dualité de Pontryagin. Dans le nouveau n° 9, nous rendons plus explicites les énoncés les plus importants pour les groupes $\mathbf{R}^n$ et $(\mathbf{R}/\mathbf{Z})^n$. La théorie de Fourier dans $\mathbf{R}^n$ trouvant son cadre le plus naturel dans la théorie des distributions tempérées, nous en énonçons les propriétés essentielles sans donner les démonstrations, qui apparaîtront dans le chapitre IV.

– Nous avons finalement ajouté un formulaire de théorie de Fourier qui résume les définitions et propriétés des principaux espaces fonctionnels intervenant dans cette théorie, ainsi que les formules essentielles.

Beaucoup d'exercices sont nouveaux. On notera en particulier l'augmentation considérable du nombre d'exercices dans le §1 du chapitre II, qui reflète l'importance mathématique de la théorie de Fourier.

Dans les livres précédents, la référence suivante à TS, à paraître, doit être modifiée ainsi :

LIE, IX, p. 72, §7, n° 4. Au lieu de « d'après TS », lire « d'après TS, cor. du th. 1 de II, p. 215. »



Algèbres normées

Sauf mention du contraire, les algèbres considérées dans ce chapitre sont supposées associatives.

§ 1. SPECTRES ET CARACTÈRES

Dans ce paragraphe, la lettre K désigne un corps commutatif. Si E et F sont des K -espaces vectoriels, on note $E \otimes F = E \otimes_K F$.

1. Algèbres unifères

On appelle *algèbre unifère* sur K un couple (A, e) où A est une algèbre sur K à élément unité et e l'élément unité de A . Comme e est déterminé de manière unique par A , il nous arrivera de dire, par abus de langage, que A est une algèbre unifère. Si (A, e) et (A', e') sont des algèbres unifères, on appelle *morphisme unifère* de (A, e) dans (A', e') un morphisme φ de A dans A' tel que $\varphi(e) = e'$. Une sous-algèbre unifère de (A, e) est un couple (A', e) , où A' est une sous-algèbre de A contenant e .

On notera souvent 1 l'élément unité.

Lemme 1. — Soit A une algèbre. Pour tout idempotent j de A , le sous-espace jAj de A est l'ensemble des $x \in A$ tels que $xj = jx = x$. C'est une sous-algèbre de A qui admet l'élément unité j .

La preuve est élémentaire.

2. Spectre d'un élément dans une algèbre unifiée

DÉFINITION 1. — Soient A une algèbre unifiée sur K et e son élément unité. Pour tout $x \in A$, on appelle spectre de x relativement à A l'ensemble des $\lambda \in K$ tels que $\lambda e - x$ ne soit pas inversible.

Le spectre de x sera noté $\text{Sp}_A(x)$, ou $\text{Sp}(x)$ si aucune confusion n'en résulte. Le complémentaire de $\text{Sp}_A(x)$ dans K est appelé l'ensemble résolvant de x .

Remarques. — 1) Si $A = \{0\}$, on a $\text{Sp}(0) = \emptyset$.

2) Si $A \neq \{0\}$, on a $\text{Sp}(\lambda e) = \{\lambda\}$ pour tout $\lambda \in K$.

3) Pour que $x \in A$ soit inversible, il faut et il suffit que $0 \notin \text{Sp}(x)$.

4) Soit $R \in K(X)$ une fraction rationnelle et soit $x \in A$ un élément qui est substituable dans R , c'est-à-dire (A , IV, p. 20) qu'il existe P et $Q \in K[X]$ tels que $R = P/Q$ et $Q(x)$ est inversible; on peut alors former l'élément $R(x) = P(x) \cdot Q(x)^{-1} = Q(x)^{-1} \cdot P(x)$ de A ; il ne dépend pas des choix de P et Q . On a $0 \notin Q(\text{Sp}(x))$, de sorte que tout élément de $\text{Sp}(x)$ est substituable dans R .

On a $R(\text{Sp}(x)) \subset \text{Sp}(R(x))$. Soit en effet $\lambda \in \text{Sp}(x)$; il existe un polynôme P_1 tel que $R(\lambda) - R(X) = (\lambda - X)P_1(X)/Q(X)$; alors, $R(\lambda)e - R(x) = (\lambda e - x)(P_1(x)/Q(x))$, de sorte que $R(\lambda) - R(x)$ n'est pas inversible, donc $R(\lambda) \in \text{Sp}(R(x))$.

Inversement, supposons que le corps K est algébriquement clos. Supposons d'abord que R n'est pas constante et démontrons que l'on a $\text{Sp}(R(x)) = R(\text{Sp}(x))$. Soit $\mu \in \text{Sp}(R(x))$. Comme R n'est pas constante, $P - \mu Q$ n'est pas le polynôme nul; soit $\mu Q - P = \alpha \prod (\lambda_i - X)$ une décomposition en facteurs de degré 1, de sorte que $\mu e - R(x) = \alpha \prod (\lambda_i e - x) Q(x)^{-1}$. Puisque $\mu e - R(x)$ n'est pas inversible, il existe i tel que $\lambda_i e - x$ n'est pas inversible, donc $\lambda_i \in \text{Sp}(x)$, puis $R(\lambda_i) = \mu \in R(\text{Sp}(x))$.

Lorsque R est constante, l'égalité $\text{Sp}(R(x)) = R(\text{Sp}(x))$ vaut aussi, à condition que $\text{Sp}(x)$ soit non vide.

5) Supposons que l'algèbre A soit non nulle. Soit $x \in A$ un élément nilpotent. Notons n un entier tel que $x^n = 0$. Le spectre de x^n est réduit à 0, donc il en est de même du spectre de x d'après la remarque 4.

6) Soient A et B des algèbres unifères sur K et $\varphi: A \rightarrow B$ un morphisme unifère. Pour tout $x \in A$, on a $\text{Sp}_B(\varphi(x)) \subset \text{Sp}_A(x)$.

7) Soient A une algèbre unifère, R son radical (A , VIII, p. 150, déf. 2) et soit φ le morphisme canonique de A sur $B = A/R$. Si $x \in A$, on a $\text{Sp}_B(\varphi(x)) = \text{Sp}_A(x)$. En effet, il suffit de prouver que si $\varphi(x)$ est inversible dans B , alors x est inversible dans A . Or, si $y \in A$ est tel que $\varphi(x)\varphi(y) = \varphi(y)\varphi(x) = \varphi(e)$, on a $xy \in e + R$, $yx \in e + R$, donc xy et yx sont inversibles (A , VIII, p. 151, th. 1) et par suite x est inversible. En particulier, si $x \in R$, on a $\text{Sp}_A(x) = \{0\}$ si $A \neq \{0\}$.

8) Soit $(B_i)_{i \in I}$ une famille d'algèbres unifères, avec $B_i = (A_i, e_i)$ pour $i \in I$. Posons $A = \prod_i A_i$, $e = (e_i)_{i \in I}$. Alors (A, e) est une algèbre unifère appelée *produit des* B_i . Si $x = (x_i)_{i \in I} \in A$, on a $\text{Sp}_A(x) = \bigcup_i \text{Sp}_{A_i}(x_i)$.

Exemples. — 1) Soit X un ensemble et soit $A = K^X$ l'algèbre des fonctions à valeurs dans K définies sur X . Le spectre d'un élément f de A est l'ensemble des valeurs de f .

2) Soit A une algèbre unifère de rang fini sur K . Pour que $x \in A$ soit inversible, il faut et il suffit que l'application linéaire $y \mapsto xy$ de A dans A soit de déterminant non nul. Il en résulte que le spectre de x est l'ensemble des racines du polynôme caractéristique de x (A , III, p. 110). Si A est l'algèbre des endomorphismes d'un espace vectoriel V de dimension finie sur K , le spectre de x est donc l'ensemble des valeurs propres de x . Il n'en est pas toujours ainsi quand V est de dimension infinie (cf. I, p. 153, exercice 2).

3. Résolvante

DÉFINITION 2. — Soient A une algèbre unifère sur K et $x \in A$. Pour tout $\lambda \in K - \text{Sp}(x)$, on pose

$$R(x, \lambda) = (\lambda e - x)^{-1}.$$

L'application de $K - \text{Sp}(x)$ dans A donnée par $\lambda \mapsto R(x, \lambda)$ s'appelle la *résolvante* de x .

Pour x fixé, les valeurs de $R(x, \lambda)$ sont deux à deux permutables. Si $\lambda, \mu \in K$, on a :

$$(\lambda - \mu)e = (\lambda e - x) - (\mu e - x)$$

donc, si $\lambda, \mu \in K - \text{Sp}(x)$, on a la relation

$$(1) \quad (\lambda - \mu)R(x, \lambda)R(x, \mu) = R(x, \mu) - R(x, \lambda).$$

Si $x, y \in A$ et $\lambda \in K$, on a :

$$y - x = (\lambda e - x) - (\lambda e - y)$$

donc, si $\lambda \in K - (\text{Sp}(x) \cup \text{Sp}(y))$, on a la relation

$$(2) \quad R(y, \lambda)(y - x)R(x, \lambda) = R(y, \lambda) - R(x, \lambda).$$

4. Spectre d'un élément dans une algèbre

Soit A une algèbre sur K . Rappelons (A, III, p. 4) qu'on définit sur l'espace vectoriel $\tilde{A} = K \times A$ une structure d'algèbre telle que :

$$(\lambda, a)(\mu, b) = (\lambda\mu, \lambda b + \mu a + ab).$$

Soit $e = (1, 0)$. Alors $(\tilde{A}, e)$ est une algèbre unifère dite *déduite de A par adjonction d'un élément unité*. L'algèbre A s'identifie à l'idéal bilatère $\{0\} \times A$ de $\tilde{A}$; l'algèbre A est commutative si et seulement si $\tilde{A}$ l'est.

Si A' est une seconde algèbre sur K , $(\tilde{A}', e')$ l'algèbre unifère déduite de A' par adjonction d'un élément unité, et φ un morphisme de A dans A' , il existe un morphisme unifère et un seul de $(\tilde{A}, e)$ dans $(\tilde{A}', e')$ qui prolonge φ .

Soient A une algèbre sur K et $x \in A$. On appelle *spectre de x relativement à A* le spectre de x relativement à l'algèbre unifère $\tilde{A}$ déduite de A par adjonction d'un élément unité. Cet ensemble sera noté $\text{Sp}'_A(x)$, ou $\text{Sp}'(x)$ si aucune confusion n'en résulte. On a $0 \in \text{Sp}'_A(x)$ quel que soit $x \in A$.

Si φ est un morphisme de A dans une algèbre B , on a $\text{Sp}'_B(\varphi(x)) \subset \text{Sp}'_A(x)$.

Remarques. — 1) Soit $(A, 1)$ une algèbre unifère. Si $x \in A$, on a

$$\text{Sp}'_A(x) = \text{Sp}_A(x) \cup \{0\}.$$

On vérifie en effet que $(e - 1) \cdot A = A \cdot (e - 1) = 0$, donc que $\tilde{A}$ est l'algèbre unifère produit de A et de $K(e - 1)$. Notre assertion résulte donc de la remarque 8 de I, p. 3.

2) Il résulte de la remarque 1 que, si B est une algèbre sur K et si $x \in B$, on a :

$$\mathrm{Sp}'_B(x) = \mathrm{Sp}_{\tilde{B}}(x) = \mathrm{Sp}_{\tilde{B}}(x) \cup \{0\} = \mathrm{Sp}'_{\tilde{B}}(x).$$

3) Si x appartient au radical de A (A, VIII, p. 430, déf. 3), on a $\mathrm{Sp}'_A(x) = \{0\}$. Ceci résulte de la remarque 7 de I, p. 3.

PROPOSITION 1. — *Soient A une algèbre et $x, y \in A$. On a $\mathrm{Sp}'(xy) = \mathrm{Sp}'(yx)$.*

En passant à $\tilde{A}$, on se ramène au cas où A possède un élément unité e . Il suffit alors de prouver que, si $\lambda \neq 0$ est tel que $xy - \lambda e$ admette un inverse u , alors $yx - \lambda e$ est inversible. Posons $z = yux - e$. Puisque $xyu = \lambda u + e$, on a

$$\begin{aligned} (yx - \lambda e)z &= y(xy u)x - yx - \lambda yux + \lambda e \\ &= y(\lambda u + e)x - yx - \lambda yux + \lambda e = \lambda e \end{aligned}$$

et de même $z(yx - \lambda e) = \lambda e$. Comme $\lambda \neq 0$, on voit que $yx - \lambda e$ est inversible.

Si A est une algèbre unifère et si $x, y \in A$, la proposition précédente entraîne que $\mathrm{Sp}(xy) \cup \{0\} = \mathrm{Sp}(yx) \cup \{0\}$, mais on peut avoir $\mathrm{Sp}(xy) \neq \mathrm{Sp}(yx)$ (cf. I, p. 153, exerc. 3).

5. Sous-algèbres pleines

Soit A une algèbre unifère sur K .

DÉFINITION 3. — *On appelle sous-algèbre pleine de A une sous-algèbre unifère B telle que tout élément de B qui est inversible dans A soit inversible dans B .*

Autrement dit, B est une sous-algèbre pleine de A si et seulement si $\mathrm{Sp}_B(x) = \mathrm{Sp}_A(x)$ pour tout $x \in B$.

L'intersection d'une famille de sous-algèbres pleines de A est une sous-algèbre pleine de A .

Soit M une partie de A . L'intersection des sous-algèbres pleines de A contenant M est la plus petite sous-algèbre pleine de A contenant M ;

on l'appelle *la sous-algèbre pleine de A engendrée par M*. Le commutant M' de M dans A est une sous-algèbre pleine de A (car, si x est inversible dans A et commute avec M , alors x^{-1} commute avec M). Donc le bicommutant M'' de M est une sous-algèbre pleine de A qui contient la sous-algèbre pleine de A engendrée par M .

Si les éléments de M sont deux à deux permutables, on a $M \subset M'$ et $M'' \subset M'''$; l'algèbre M'' est donc commutative et il en est alors de même de l'algèbre pleine engendrée par M .

Une sous-algèbre commutative maximale de A est une sous-algèbre pleine, car elle est égale à son commutant.

Lemme 2. — Soit $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ une famille d'éléments deux à deux permutables de A. La sous-algèbre pleine engendrée par (x_λ) est l'ensemble des éléments de la forme $R((x_\lambda))$, où $R \in K((X_\lambda))$ parcourt l'ensemble des fractions rationnelles dans lesquelles la famille (x_λ) est substituable.

Soit B la sous-algèbre pleine de A engendrée par la famille (x_λ) , et notons B_1 l'ensemble des éléments de la forme $R((x_\lambda))$, où $R((X_\lambda))$ est une fraction rationnelle dans laquelle (x_λ) est substituable. Explicitement, B_1 est l'ensemble des éléments de A de la forme $P((x_\lambda))Q((x_\lambda))^{-1}$, où $P, Q \in K[(X_\lambda)]$ et $Q((x_\lambda))$ est inversible dans A . L'ensemble B_1 est une sous-algèbre unifère de A contenant la famille (x_λ) . C'est une sous-algèbre pleine : si $P((x_\lambda))Q((x_\lambda))^{-1}$ est inversible dans A , alors $P((x_\lambda))$ est inversible dans A et l'inverse $Q((x_\lambda))P((x_\lambda))^{-1}$ de $P((x_\lambda))Q((x_\lambda))^{-1}$ appartient à B_1 . On a donc $B \subset B_1$. D'autre part, si $P, Q \in K[(X_\lambda)]$, et si $Q((x_\lambda))$ est inversible dans A , alors $P((x_\lambda)) \in B$ et $Q((x_\lambda)) \in B$, donc $Q((x_\lambda))^{-1} \in B$ et $P((x_\lambda))Q((x_\lambda))^{-1} \in B$, donc $B_1 \subset B$.

6. Caractères d'une algèbre unifère commutative

DÉFINITION 4. — *Soit A une algèbre unifère commutative sur K. On appelle caractère unifère un morphisme unifère de A dans K.*

Lorsqu'aucune confusion ne peut en résulter, on dira simplement *caractère* au lieu de *caractère unifère*. L'ensemble des caractères unifères de A est noté $X(A)$. Si A est l'algèbre nulle, alors $X(A)$ est vide.

Soient A et B des algèbres unifères commutatives sur K et h un morphisme unifère de A dans B . L'application $\chi \mapsto \chi \circ h$ de $X(B)$ dans $X(A)$ se note $X(h)$. Si k est un morphisme de B dans une algèbre unifère commutative, on a $X(k \circ h) = X(h) \circ X(k)$. L'application $X(\text{Id}_A)$ est l'application identique de $X(A)$.

Si h est surjectif, $X(h)$ est une bijection de $X(B)$ sur l'ensemble des caractères de A qui s'annulent sur le noyau de h .

Soient $(A_1, e_1), \dots, (A_n, e_n)$ des algèbres unifères commutatives sur K et soit A l'algèbre unifère $A_1 \times \dots \times A_n$, d'élément unité $(e_1, \dots, e_n)$. Pour tout i , identifions A_i à un idéal de A et soit π_i l'application canonique de A sur A_i . Alors $X(\pi_i)$ est une bijection de $X(A_i)$ sur l'ensemble X_i des caractères de A nuls sur $\prod_{j \neq i} A_j$. Les ensembles X_i sont deux à deux disjoints. D'autre part, soit $\chi \in X(A)$. Puisque $1 = \sum \chi(e_i)$, il existe i tel que $\chi(e_i) \neq 0$. Pour tout $j \neq i$ et tout $y \in A_j$, on a $\chi(e_i)\chi(y) = \chi(e_i y) = \chi(0) = 0$, donc $\chi(A_j) = 0$. Ainsi, χ s'annule sur $\prod_{j \neq i} A_j$, de sorte que $X(A)$ est réunion des X_i .

Soit B l'algèbre unifère $A_1 \otimes \dots \otimes A_n$. Notons h_i le morphisme canonique $A_i \rightarrow B$. Alors

$$\chi \mapsto (\chi \circ h_1, \dots, \chi \circ h_n)$$

est une application de $X(B)$ dans $X(A_1) \times \dots \times X(A_n)$, et

$$(\chi_1, \dots, \chi_n) \mapsto \chi_1 \otimes \dots \otimes \chi_n$$

est une application de $X(A_1) \times \dots \times X(A_n)$ dans $X(B)$. On vérifie que ces applications sont des bijections réciproques l'une de l'autre, par lesquelles on identifiera $X(B)$ à $X(A_1) \times \dots \times X(A_n)$.

Soit A une algèbre unifère commutative sur K . Soit Y l'ensemble des idéaux de codimension 1 de A . Pour tout $\chi \in X(A)$, on a $\text{Ker}(\chi) \in Y$. L'application $\chi \mapsto \text{Ker}(\chi)$ est une bijection de $X(A)$ sur Y . En effet, si $I \in Y$, il existe un unique isomorphisme de la K -algèbre unifère A/I sur K et le morphisme composé

$$A \longrightarrow A/I \longrightarrow K$$

est l'unique caractère de A de noyau I .

DÉFINITION 5. — *Soit A une algèbre unifère commutative sur K . Pour tout $x \in A$, on note $\mathcal{G}_A(x)$, ou simplement $\mathcal{G}(x)$, l'application $\chi \mapsto \chi(x)$ de $X(A)$ dans K . On l'appelle la transformée de Gelfand de x .*

L'application $\mathcal{G}$ est un morphisme unifère de A dans l'algèbre unifère $K^{X(A)}$ des applications de $X(A)$ dans K . On l'appelle la transformation de Gelfand de A .

Si $x \in A$, l'image de la transformée de Gelfand $\mathcal{G}_A(x)$ de x est contenue dans $\text{Sp}_A(x)$. En effet, soit $\chi \in X(A)$; puisque $\chi(x - \chi(x)e) = 0$, l'élément $x - \chi(x)e$ n'est pas inversible.

Soient B une algèbre unifère commutative sur K et h un morphisme unifère de A dans B ; alors $X(h): X(B) \rightarrow X(A)$ définit un morphisme unifère $h_*: K^{X(A)} \rightarrow K^{X(B)}$, et le diagramme :

$$(3) \quad \begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\mathcal{G}_A} & K^{X(A)} \\ \downarrow h & & \downarrow h_* \\ B & \xrightarrow{\mathcal{G}_B} & K^{X(B)} \end{array}$$

est commutatif. En effet, pour tout $x \in A$ et tout $\chi \in X(B)$, on a :

$$(4) \quad \begin{aligned} \mathcal{G}_B(h(x))(\chi) &= \chi(h(x)) = (\chi \circ h)(x) \\ &= (X(h)(\chi))(x) \\ &= \mathcal{G}_A(x)(X(h)(\chi)) \\ &= h_*(\mathcal{G}_A(x))(\chi). \end{aligned}$$

Supposons maintenant que K soit un corps topologique. On munit alors $X(A)$ de la topologie de la convergence simple sur A (cf. EVT, III, p. 14, exemple 1), et l'espace topologique $X(A)$ s'appelle l'espace des caractères de A . La topologie de $X(A)$ est donc la moins fine pour laquelle les fonctions $\mathcal{G}_A(x)$ pour $x \in A$ soient continues, et l'application $\chi \mapsto (\chi(a))_{a \in A}$ identifie l'espace $X(A)$ avec une partie de K^A .

Lorsque $K = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$, cette topologie est la topologie induite sur $X(A) \subset A^*$ par la topologie faible $\sigma(A^*, A)$ sur A^* (EVT, II, p. 45, déf. 2); à ce titre, nous dirons aussi que c'est la *topologie faible* sur $X(A)$.

Si h est un morphisme unifère de A dans B , l'application $X(h): X(B) \rightarrow X(A)$ est continue. Si h est surjectif, l'image de $X(h)$, à savoir l'ensemble des caractères de A nuls sur le noyau de h , est fermée dans $X(A)$; d'autre part, la topologie sur $X(h)(X(B))$ déduite de celle de $X(B)$ par la bijection $X(h)$ est la topologie de la convergence simple dans A , c'est-à-dire la topologie induite par celle

de $X(A)$; autrement dit, $X(h)$ est un homéomorphisme de $X(B)$ sur une partie fermée de $X(A)$.

Si $A_1, \dots, A_n$ sont des algèbres unifères commutatives sur K , l'espace $X(A_1 \times \dots \times A_n)$ s'identifie ainsi à l'espace topologique somme de $X(A_1), \dots, X(A_n)$. De même, $X(A_1 \otimes \dots \otimes A_n)$ s'identifie à l'espace topologique produit $X(A_1) \times \dots \times X(A_n)$.

7. Cas des algèbres sans élément unité

DÉFINITION 6. — Soit A une algèbre commutative sur K . On appelle caractère de A un morphisme d'algèbres de A dans K .

L'ensemble des caractères de A sera noté $X'(A)$.

L'application nulle est un morphisme d'algèbres. Si A possède un élément unité e , un morphisme d'algèbres non nul de A dans K est unifère, c'est-à-dire est un caractère unifère de K au sens de la définition 4 : en effet, pour que $\chi \in X'(A)$ soit non nul, il faut et il suffit que $\chi(e) = 1$.

On posera $X(A) = X'(A) - \{0\}$; d'après ce qui précède, la notation est compatible avec celle introduite lorsque A est unifère.

Si $h: A \rightarrow B$ est un morphisme d'algèbres commutatives, l'application $\chi \mapsto \chi \circ h$ est une application $X'(h): X'(B) \rightarrow X'(A)$. Elle transforme 0 en 0. Si $k: B \rightarrow C$ est un morphisme d'algèbres commutatives, alors on a $X'(k \circ h) = X'(h) \circ X'(k)$. Si h est surjectif, $X'(h)$ est une bijection de $X'(B)$ sur l'ensemble des caractères de A nuls sur le noyau de h . Soient $A_1, \dots, A_n$ des algèbres commutatives, $A = A_1 \times \dots \times A_n$ et $\pi: A \rightarrow A_i$ le morphisme canonique; alors $X'(\pi_i)$ est une bijection de $X'(A_i)$ sur une partie X'_i de $X'(A)$, à savoir l'ensemble des caractères de A nuls sur $\prod_{j \neq i} A_j$; on voit comme au n° 6 que $X'(A)$ est réunion

des X'_i ; d'autre part, $X'_i \cap X'_j = \{0\}$ pour $i \neq j$; en particulier les $X'_i - \{0\}$ forment une partition de $X'(A) - \{0\} = X(A)$.

Pour tout $x \in A$, soit $\mathcal{G}'_A(x)$, ou simplement $\mathcal{G}'(x)$, l'application $\chi \mapsto \chi(x)$ de $X'(A)$ dans K . L'application $\mathcal{G}'$ est un morphisme de A dans l'algèbre A_1 des applications $X'(A) \rightarrow K$ nulles en 0. Soient B une algèbre commutative, B_1 l'algèbre des applications $X'(B) \rightarrow K$ nulles en 0, et h un morphisme de A dans B ; alors $X'(h)$ définit un morphisme $h_1: A_1 \rightarrow B_1$, et l'on a $h_1 \circ \mathcal{G}'_A = \mathcal{G}'_B \circ h$. On note $\mathcal{G}_A(x)$,

ou simplement $\mathcal{G}(x)$, la restriction de $\mathcal{G}'_A(x)$ à $X(A)$ et on l'appelle *transformée de Gelfand* de x .

Soit $\tilde{A}$ l'algèbre unifère déduite de A par adjonction d'un élément unité. Par restriction, tout caractère de $\tilde{A}$ définit un caractère de A ; inversement, tout caractère de A se prolonge de manière unique en un caractère de $\tilde{A}$. Cela définit une bijection canonique de $X'(A)$ sur $X(\tilde{A})$, par laquelle on identifie ces deux ensembles. Le caractère 0 de A s'identifie à l'unique caractère de $\tilde{A}$ de noyau A .

Si $x \in A$ et $\chi \in X'(A)$, on a $\chi(x) \in \text{Sp}'_{\tilde{A}}(x)$, donc $\chi(x) \in \text{Sp}'_A(x)$.

Lemme 3. — *L'application $\chi \mapsto \text{Ker}(\chi)$ est une bijection de $X(A)$ sur l'ensemble des idéaux réguliers de codimension 1 de A .*

Rappelons (*A*, VIII, p. 426, déf. 1) qu'un idéal I de A est dit *régulier* si l'algèbre quotient A/I admet un élément unité.

Démontrons le lemme. D'une part $X(A)$ s'identifie à l'ensemble des caractères de $\tilde{A}$ non nuls sur A . D'autre part, d'après *A*, VIII, p. 428, prop. 4, l'application $I \mapsto A \cap I$ est une bijection de l'ensemble des idéaux maximaux de $\tilde{A}$ distincts de A sur l'ensemble des idéaux maximaux réguliers de A . Le lemme découle alors des résultats du n° 6.

Supposons maintenant que K soit un corps topologique. On munit alors $X'(A)$ de la topologie de la convergence simple sur A ; la notation $X'(A)$ désignera désormais l'espace topologique ainsi obtenu. Lorsque $K = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$, nous l'appellerons également *topologie faible*. Pour tout $x \in A$, la fonction $\mathcal{G}'_A(x)$ sur $X'(A)$ est continue.

Si h est un morphisme de A dans B , l'application $X'(h): X'(B) \rightarrow X'(A)$ est continue. Si h est surjectif, $X'(h)$ est un homéomorphisme de $X'(B)$ sur son image et cette image est fermée dans $X'(A)$.

Soit $A = A_1 \times \cdots \times A_n$; avec les mêmes notations que plus haut, $X'(\pi_i)$ est un homéomorphisme de $X'(A_i)$ sur X'_i et X'_i est fermé dans $X'(A)$. Donc $X'_i - \{0\}$ est ouvert dans $X'(A)$; les $X'(\pi_i)$ définissent une application continue de l'espace somme S des $X'(A_i)$ sur $X'(A)$, et on vérifie immédiatement qu'une réunion de voisinages des points $0 \in X'(A_1), \dots, 0 \in X'(A_n)$ a pour image un voisinage de $0 \in X'(A)$; de tout ceci résulte que $X'(A)$ s'identifie canoniquement à un espace quotient de S . En particulier, l'espace $X(A)$ s'identifie à l'espace somme des $X(A_i)$.

La bijection canonique de $X'(A)$ sur $X(\tilde{A})$ est un homéomorphisme. Soient B une algèbre unifère sur K et B' l'algèbre sous-jacente; alors l'espace $X(B)$ s'identifie au sous-espace $X(B')$ de $X'(B')$.

8. Idéaux primitifs

Soient A une algèbre sur K et E un espace vectoriel sur K . On appelle *représentation* de A dans E un morphisme de A dans l'algèbre $\mathcal{L}(E)$ des endomorphismes de E . Une représentation injective est dite *fidèle*. Soient π_1 et π_2 des représentations de A dans des espaces E_1 , E_2 . Un *morphisme* de π_1 dans π_2 est une application K -linéaire $u: E_1 \rightarrow E_2$ telle que $u(\pi_1(a)x) = \pi_2(a)u(x)$ pour tous $a \in A$ et $x \in E_1$. Les représentations sont dites *équivalentes* s'il existe un morphisme de π_1 dans π_2 qui est un isomorphisme d'espaces vectoriels. Son inverse est alors un morphisme de π_2 dans π_1 . Une représentation π de A dans E est dite *irréductible* si $E \neq \{0\}$ et si les seuls sous-espaces vectoriels de E stables pour $\pi(A)$ sont $\{0\}$ et E .

Exemple. — L'application nulle de A dans $\mathcal{L}(E)$ est une représentation, dite *triviale*, de A . Elle est irréductible si et seulement si E est de dimension 1.

Lemme 4. — Soit π une représentation irréductible, non triviale, de A dans E . Pour tout élément ξ non nul de E , on a $\pi(A)\xi = E$.

Le sous-espace $\pi(A)\xi$ de E est stable pour $\pi(A)$. Supposons qu'il soit nul. Le sous-espace non nul $K\xi$ de E serait alors stable par $\pi(A)$, et donc égal à E ; mais cela impliquerait que π est la représentation nulle. On a donc $\pi(A)\xi = E$.

Soit π une représentation irréductible, non triviale, de A dans E . D'après ce lemme, l'annulateur R de ξ dans A est un idéal à gauche régulier (*A*, VIII, p. 425, n° 1) de A , et la représentation π est équivalente à la représentation définie par le A -pseudomodule A/R . Comme π est irréductible, l'idéal R est un idéal à gauche maximal régulier.

DÉFINITION 7. — Soit A une algèbre sur K . On appelle *idéal primitif* de A le noyau d'une représentation irréductible non triviale de A .

Si A est commutative, les idéaux primitifs de A sont les idéaux maximaux réguliers de A . En effet, les représentations irréductibles

non triviales de A sont, à une équivalence près, les représentations π_R définies par les A -pseudomodules A/R , où R est un idéal maximal régulier de A . Le noyau de π_R contient R . Il lui est même égal puisque, d'après A, VIII, p. 426, prop. 2, la commutativité de A entraîne que A/R est un corps. Donc $\text{Ker}(\pi_R)$ est maximal régulier.

Lemme 5. — Soit π une représentation irréductible de A dans un espace vectoriel E sur K .

a) *Soit I un idéal bilatère de A . Si $\pi(I) \neq \{0\}$, alors $\pi|I$ est irréductible;*

b) *Soient I_1 et I_2 des idéaux bilatères de A tels que $\pi(I_1) \neq 0$ et $\pi(I_2) \neq 0$. Alors $\pi(I_1 I_2) \neq 0$.*

L'ensemble des éléments de E annulés par $\pi(I)$ est stable pour $\pi(A)$ et distinct de E , donc égal à 0. Donc, si ξ est un élément non nul de E , on a $\pi(I)\xi \neq 0$; comme $\pi(I)\xi$ est stable pour $\pi(A)$, on a $\pi(I)\xi = E$, ce qui prouve a). D'autre part, ce qui précède prouve que $\pi(I_2)E = E$, $\pi(I_1)\pi(I_2)E = E$, donc $\pi(I_1 I_2) \neq 0$, d'où b).

Lemme 6. — Soient I_1 et I_2 des idéaux bilatères de A , I un idéal primitif de A . Si I contient $I_1 I_2$ (en particulier, si I contient $I_1 \cap I_2$), alors I contient I_1 ou I_2 .

Soit π une représentation irréductible de noyau I . Si $I \not\supset I_1$ et $I \not\supset I_2$, le lemme 5, b) prouve que $\pi(I_1 I_2) \neq 0$, d'où $I \not\supset I_1 I_2$.

Lemme 7. — Supposons que A admette un élément unité. Soit I un idéal bilatère maximal de A . Alors I est un idéal primitif.

Il existe un idéal à gauche maximal R de A contenant I (A, I, p. 99, th. 1). Soit π la représentation canonique de A dans A/R , qui est irréductible et non nulle. Comme $IA \subset R$, le noyau I' de π contient I , donc $I' = I$ et I est primitif.

Soit $J(A)$ l'ensemble des idéaux primitifs de A . Pour toute partie M de A , nous noterons $V(M)$ l'ensemble des idéaux primitifs de A contenant M ; si I est l'idéal bilatère de A engendré par M , on a $V(M) = V(I)$. Si M est réduit à un seul élément x , on écrira $V(x)$ au lieu de $V(\{x\})$.

L'application $M \mapsto V(M)$ est décroissante pour les relations d'inclusion. On a :

$$(5) \quad V(\emptyset) = J(A), \quad V(A) = \emptyset$$

$$(6) \quad V\left(\bigcup_{i \in I} M_i\right) = V\left(\sum_{i \in I} M_i\right) = \bigcap_{i \in I} V(M_i)$$

pour toute famille $(M_i)_{i \in I}$ de parties de A . D'autre part, d'après le lemme 6,

$$(7) \quad V(I_1 \cap I_2) = V(I_1 I_2) = V(I_1) \cup V(I_2)$$

pour tous idéaux bilatères I_1, I_2 de A . Les formules (5) à (7) démontrent que les parties $V(M)$ de $J(A)$ sont les parties fermées d'une topologie appelée la *topologie de Jacobson* sur $J(A)$.

Soit T une partie de $J(A)$ et soit $\Upsilon(T)$ l'intersection des éléments de T , de sorte que $\Upsilon(T)$ est un idéal bilatère de A . Alors l'adhérence de T dans $J(A)$ est la plus petite partie fermée de $J(A)$ contenant T , c'est-à-dire $V(\Upsilon(T))$. En particulier, T est fermée si et seulement si $T = V(\Upsilon(T))$.

PROPOSITION 2. — *Soient I_1 et I_2 des points distincts de $J(A)$. Alors l'un de ces deux points est non adhérent à l'autre.*

En effet, on a par exemple $I_1 \not\subset I_2$. L'ensemble $V(I_1)$ des $I \in J(A)$ tels que $I_1 \subset I$ est fermé dans $J(A)$, et il contient I_1 mais pas I_2 .

PROPOSITION 3. — *Soit $I \in J(A)$. Pour que $\{I\}$ soit fermé dans $J(A)$, il faut et il suffit que I soit un idéal primitif maximal.*

En effet, l'adhérence de $\{I\}$ se compose des idéaux primitifs de A contenant I .

La relation

« π_1, π_2 sont des représentations de A , qui sont isomorphes »

est une relation d'équivalence par rapport à π_1 et π_2 . Pour toute représentation π de A , on notera $\text{cl}(\pi)$ la classe d'équivalence de π , qui est donc une représentation de A isomorphe à π , telle que deux représentations π_1 et π_2 sont isomorphes si et seulement si $\text{cl}(\pi_1) = \text{cl}(\pi_2)$. On dit que $\text{cl}(\pi)$ est la *classe de* π .

Soit $\mathfrak{c}$ le cardinal de A . Soit π une représentation irréductible non nulle de A dans un K -espace vectoriel E . Soit ξ un élément non nul

taubérien de Wiener, 253

Topologie

de Jacobson, 13

faible, 8, 10

Transformation

de Fourier, 207

de Gelfand, 7

de Hankel, 270

de Laplace, 312

Transformée de Fourier, 207

U

Unifère

algèbre —, 1

morphisme —, 1

Unitaire

caractère —, 201

élément —, 96

Unité approchée, 120

croissante, 120

V

Valeur propre, 128

van der Corput (inégalité de —), 277

von Neumann (théorème ergodique
de —), 190

W

Weyl (critère de —), 277

Wiener

théorème de —, 38

théorème taubérien de —, 253

TABLE DES MATIÈRES

SOMMAIRE.....	i
MODE D'EMPLOI.....	iii
INTRODUCTION.....	vii
CHAPITRE I. — ALGÈBRES NORMÉES.....	1
§ 1. <i>Spectres et caractères</i>	1
1. Algèbres unifères.....	1
2. Spectre d'un élément dans une algèbre unifère.....	2
3. Résolvante.....	3
4. Spectre d'un élément dans une algèbre.....	4
5. Sous-algèbres pleines.....	5
6. Caractères d'une algèbre unifère commutative.....	6
7. Cas des algèbres sans élément unité.....	9
8. Idéaux primitifs.....	11
§ 2. <i>Algèbres normées</i>	15
1. Généralités.....	15
2. Exemples.....	17
3. Rayon spectral.....	20
4. Inverses.....	22
5. Spectre d'un élément dans une algèbre normée.....	24
6. Spectre relatif à une sous-algèbre.....	28
§ 3. <i>Algèbres de Banach commutatives</i>	29
1. Caractères d'une algèbre de Banach commutative.....	29

2. Fonctions continues nulles à l'infini sur un espace localement compact.....	31
3. Applications partielles propres.....	33
4. Transformation de Gelfand.....	36
5. Morphismes d'algèbres de Banach commutatives..	40
6. Spectre simultané.....	41
7. Ensembles polynomialement convexes.....	44
§ 4. <i>Calcul fonctionnel holomorphe</i>	49
1. Germes de fonctions holomorphes.....	49
2. Énoncé du théorème principal.....	51
3. Suites adaptées et formes différentielles associées..	52
4. Construction des applications Θ_a	58
5. Propriétés des applications Θ_a	61
6. Théorèmes d'approximation.....	67
7. Existence et unicité du calcul fonctionnel holomorphe.....	70
8. Substitution dans le calcul fonctionnel.....	72
9. Calcul fonctionnel holomorphe en une variable....	74
10. Exponentielle et logarithme.....	78
11. Partitions de l'espace des caractères.....	79
12. Partitions du spectre d'un élément.....	81
13. Calcul fonctionnel holomorphe dans une algèbre normable complète réelle ou complexe.....	85
14. Cas d'une algèbre sans élément unité.....	88
§ 5. <i>Algèbres de Banach commutatives régulières</i>	88
1. Définition.....	88
2. Synthèse harmonique.....	91
§ 6. <i>Algèbres stellaires</i>	95
1. Involutions semi-linéaires.....	95
2. Algèbres involutives.....	96
3. Algèbres normées involutives.....	100
4. Algèbres stellaires.....	102
5. Algèbres stellaires commutatives.....	107
6. Calcul fonctionnel dans les algèbres stellaires unifères.....	109
7. Applications du calcul fonctionnel.....	112
8. Calcul fonctionnel dans une algèbre non unifère ..	114
9. Éléments positifs dans les algèbres stellaires.....	115
10. Unités approchées dans les algèbres stellaires.....	120
11. Quotient par un idéal bilatère fermé.....	122

12. Algèbre stellaire enveloppante d'une algèbre de Banach involutive.....	123
13. Algèbre stellaire d'un groupe localement compact.....	125
§ 7. <i>Spectre des endomorphismes des espaces de Banach</i> . .	127
1. Spectre d'un endomorphisme.....	127
2. Projecteurs spectraux.....	129
3. Points isolés du spectre.....	131
4. Spectre de la transposée d'un endomorphisme . . .	131
5. Cas des espaces hilbertiens.....	132
6. Image numérique.....	135
7. Éléments positifs.....	138
8. Décomposition polaire.....	139
§ 8. <i>Algèbres de fonctions continues sur un espace compact</i>	142
1. Sous-algèbres de l'algèbre des fonctions continues sur un espace compact.....	142
2. Fonctions continues sur un sous-ensemble compact de $\mathbf{C}^A$	146
3. Fonctions continues sur un sous-ensemble compact de $\mathbf{C}$	148
Exercices du § 1.	153
Exercices du § 2.	155
Exercices du § 3.	166
Exercices du § 4.	172
Exercices du § 5.	178
Exercices du § 6.	180
Exercices du § 7.	187
Exercices du § 8.	191
CHAPITRE II. — GROUPES LOCALEMENT COMPACTS COMMUTATIFS.....	199
§ 1. <i>Transformation de Fourier</i>	201
1. Caractères unitaires d'un groupe localement compact commutatif.....	201
2. Définition de la transformation de Fourier.....	206
3. Le théorème de Plancherel.....	210
4. La formule d'inversion de Fourier.....	217
5. Le théorème de dualité de Pontryagin.....	220
6. Propriétés fonctorielles de la dualité.....	224
7. La formule de Poisson.....	229