E. Bompiani (Ed.)

CIME Summer Schools

Quadratura delle superficie e questioni connesse

2

Varenna, Italy 1954

Springer

FONDAZIONE CIME ROBERTO CONTI

E. Bompiani (Ed.)

Quadratura delle superficie e questioni connesse

Lectures given at the
Centro Internazionale Matematico Estivo (C.I.M.E.),
held in Varenna (Como), Italy,
August 16-25, 1954

Springer

FONDAZIONE CIME ROBERTO CONTI

C.I.M.E. Foundation
c/o Dipartimento di Matematica "U. Dini"
Viale Morgagni n. 67/a
50134 Firenze
Italy
cime@math.unifi.it

ISBN 978-3-642-10882-2 e-ISBN: 978-3-642-10883-9
DOI:10.1007/978-3-642-10883-9
Springer Heidelberg Dordrecht London New York

Reprint of the 1st ed. C.I.M.E., Florence, 1954
With kind permission of C.I.M.E.

Printed on acid-free paper

Springer.com

CENTRO INTERNATIONALE MATEMATICO ESTIVO
(C.I.M.E)

2° Ciclo - Varenna, Villa Monastero, 16-25 Agosto, 1954

QUADRATURA DELLE SUPERFICIE E QUESTIONI CONNESSE

L A M B E R T O   C E S A R I

APPUNTI SULLA TEORIA DELLE SUPERFICIE CONTINUE

(Lezioni tenute da Lamberto Cesari
e raccolte da Alfonso Matteuzzi e
Giacomo Viglino).

Roma-Istituto Matematico dell'Università - 1955

INDICE

APPUNTI SULLA TEORIA DELLE SUPERFICIE CONTINUE E QUESTIONI CONNESSE

(dalle lezioni di Lamberto Cesari)

INDICE

I. Proprietà analitiche.

I. 1. Concetto di superficie $S = (T,A)$. Che cosa è una superficie? Nei vari campi della matematica si hanno diversi concetti di superficie e ciò in corrispondenza di diverse esigenze, scopi, tecniche impiegate e terminologie. In Geometria Differenziale le superficie sono definite parametricamente,

$$(1) \qquad S: \ x=x(u,v), \quad y=y(u,v), \quad z=z(u,v), \quad (u,v) \in A,$$

mediante funzioni reali $x(u,v)$, $y(u,v)$, $z(u,v)$ delle variabili reali u,v, soddisfacenti a condizioni, in generale abbastanza forti, di continuità e differenziabilità in un campo A. In qualche recente ricerca si tende a ridurre tali condizioni (A.D. Alexandrov). In Geometria Algebrica le superficie sono definite mediante equazioni algebriche e sono studiate nel corpo complesso. In Topologia per superficie si intende talvolta una varietà a due dimensioni chiusa o aperta (2-manifold), oppure l'immagine continua di una tale varietà. In recenti ricerche per superficie si è inteso la frontiera di un insieme aperto limitato e connesso nello spazio ordinario E_3 (o in E_n) (H. Federer in Analisi; B. Kaufmann, S. Mazurkiewicz in Topologia estendendo in E_n la teoria degli elementi finali di C. Carathéodory). Sebbene una teoria unitaria non sia ancora raggiunta, la presente teoria studia le proprietà analitiche e geometriche delle superficie definite parametricamente mediante le (1) sotto la sola ipotesi della continuità delle funzioni x,y,z. Pertanto mentre gli enti in discussione hanno la generalità usuale in Topologia, si studiano di essi proprietà geometriche ed analitiche che si sono già dimostrate adeguate in questioni di analisi (teoremi di Gauss e di Stokes) e di Calcolo delle variazioni (estensione alle superficie dei metodi diretti).

Diremo che una superficie continua in forma parametrica (brevemente, una superficie) è una trasformazione continua

$$(2) \qquad S=(T,A): x=x(u,v),\ y=y(u,v),\ z=z(u,v),\ (u,v)\in A,$$

di un insieme A ammissibile (vedi sotto) del piano euclideo reale E_2 nello spazio euclideo reale E_3 (o in E_n). Pertanto S=(T,A) è definita da una terna di funzioni reali x(u,v), y(u,v), z(u,v) ad un valore. Se diciamo p=p(w) il vettore continuo (x,y,z) funzione del punto w = (u,v) $\in$ A, abbiamo la notazione più semplice

$$S = (T,A) : p = p(w), \quad w\in A.$$

La classe degli insiemi $A \in E_2$, che diciamo ammissibili, è assai larga e comprende : (a) ogni <u>poligono</u> semplice e chiuso π di E_2, ogni <u>regione poligonale</u> **chiusa** $\pi = \pi_0 - (\pi_1 + \dots + \pi_n)^0$ $[\pi_i \in \pi_0^0,\ \pi_i\pi_j = 0,\ i\neq j,\ i,j=1,2,\dots n]$, e altresì ogni <u>figura</u>, cioè la somma finita di regioni poligonali e disgiunte; (b) ogni regione di Jordan chiusa e semplice γ, ogni regione di Jordan chiusa di connessione finita $\gamma = \gamma_0 - (\gamma_1 + \dots + \gamma_n)^0$, $[\gamma_i \in \gamma_0^0,\ \gamma_i\gamma_j = 0,\ i\neq j,\ i,j=1,2,\dots,n]$, e altresì ogni somma finita di regioni di Jordan chiuse e disgiunte; (c) ogni insieme aperto A e altresì ogni insieme A aperto in un insieme come in (a) e in (b). Per le notazioni impiegate si osservi che indichiamo con $\bar{I}$, I^*, I^0 rispettivamente la chiusura, la frontiera e l'insieme dei punti interni di un insieme I(I.19). Pertanto abbiamo identificato il concetto di superficie continua con quelle di trasformazione continua di un insieme ammissibile, o di vettore continuo, e quindi due superficie $S=(T,A)$: $p=p(w)$, $w \in A$, $S'=(T',A')$: $p=p'(w)$, $w' \in A'$, si diranno <u>uguali</u> solo se identiche ($A=A'$, $p(w)=p'(w)$ per ogni $w \in A=A'$). (Per vari concetti di equivalenza tra trasformazioni continue vedi I.3). In armonia con la definizione di superficie diremo <u>distanza euclidea,</u> $d(S,S',C)$, in un insieme $C \in AA'$ di due superficie (o trasformazioni) $S=(T,A)$: $p=p(w)$, $w \in A$, $S'(T',A')$: $p=p'(w)$, $w' \in A'$, il numero $d=d(S,S',C)=d(T,T',C)=$ extr. sup$|p(w)-p'(w)|$ per $w \in C$, ove $p=(x,y,z)$, $p'=(x',y',z')$ e $|p-p'|=\left[(x-x')^2+(y-y')^2+ + (z-z')^2\right]^{\frac{1}{2}}$.

Diremo che una successione $[A_n]$ di insiemi ammissibili <u>invade</u> un insieme ammissibile A se $A_n \in A_{n+1}$, $A_n \in A$, $A^o_n \to A^o$ (ossia, con notazione più significativa, $A^o_n \uparrow A^o$). Si noti che $A^o_n \uparrow A^o$ non implica che la frontiera A^* di A, anche se appartiene ad A, debba essere ricoperta da qualche insieme A_n. Finalmente se $S_n=(T_n,A_n)$, $n=1,2,\dots$, è una data successione di superficie, diremo che essa <u>converge</u> verso una superficie $S=(T,A)$ (A,A_n tutti insiemi ammissibili) e scriveremo $(T_n,A_n) \to (T,A)$, o semplicemente $T_n \to T$, se $[A_n]$ invade A e se $d(T_n,T,A) \to 0$ quando $n \to \infty$. In particolare se $A_n=A$ per ogni n, allora la convergenza $T_n \to T$ si riduce alla ordinaria convergenza uniforme.

Denoteremo in seguito con $\{I,I'\}$ la distanza tra due insiemi I,I' di E_3 (o di E_n) definita come il confine inferiore delle mutue distanze tra i punti di I e I', cioè $\{I,I'\}=$ extr.inf. $|p-p'|$ per tutti i punti $p \in I$, $p' \in I'$.

I.2. <u>Sostegno $[S]=T(A)$ di una superficie $S=(T,A)$.</u>

Le equazioni (2) fanno corrispondere ad ogni punto $w=(u,v)$ dell'insieme ammissibile A un ben determinato punto $p=(x,y,z)$ di E_3 che diremo l'immagine $p=T(w)=p(w)$ del punto $w \in A$, ma potrà accadere che il medesimo punto $p=(x,y,z) \in E_3$ sia l'immagine di più punti $w \in A$. Le equazioni (2) fanno corrispondere pertanto all'insieme A un insieme $[S] = T(a)$ di E_3 che diremo l'insieme dei punti occupato dalla superficie S, o il <u>sostegno</u> della superficie S.

Può benissimo accadere che superficie diverse S,S' abbiano il medesimo sostegno. Consideriamo ad esempio le seguenti tre superficie S_0, S_1, S_2 tutte definite come immagini continue del quadrato unitario $A=(0 \leq u,v \leq 1)$. Sia S_0 la superficie $S_0=(T_0,A): x=u, y=u,$ $z=0$, $(u,v) \in A$. In questo caso $[S_0]$ è il quadrato unitario $Q=[0 \leq x,y, \leq 1]$ del piano (x,y) in E_3 ed S_0 ricopre Q una volta. Sia S_1 la superficie $S_1=(T,A)$: $x=4u-4u^2$, $y=v$, $z=0$, $(u,v) \in A$, avente lo stesso sostegno $[S_1] = Q$. Questa superficie ricopre Q due volte come un velo sottile ripiegato su se stesso. Finalmente sia C: $x=$ $=f(t)$, $y=g(t)$, $0 \leq t \leq 1$, una curva di Peano ricoprente Q. Allora anche la superficie continua

$$S_2=(T_2,A): \qquad x=f(u), \quad y=g(u), \quad z=0, \quad (u,v) \in A,$$

ha per sostegno Q. Si ha cioè $[S_0] = [S_1] = [S_2] = Q$. Questo esempio mostra che superficie di natura diversissima possono avere lo stesso sostegno e pertanto concludiamo che l'identità del sostegno non permette alcun utile accostamento tra le superficie.

I.3. <u>Equivalenze secondo Lebesque, Fréchet, McShane, Kerékiártó</u>.

Mentre la coincidenza dei sostegni non permette di associare utilmente superficie diverse, esistono relazioni più profonde che conducono ad associare superficie che la nostra intuizione giudica talvolta come rappresentanti lo stesso ente. Tali relazioni tra superficie sono dette <u>equivalenze</u> e godono delle tipiche proprietà simmetrica, riflessiva e transitiva. Esse permettono di associare in classi le superficie equivalenti: in relazione alle equivalenze di Lebesque, Fréchet, Fréchet-MaShane, Kerékjártó, ecc.., si dirà che una classe completa di trasformazioni equivalenti è rispettivamente una superficie di Lebesque, di Fréchet, di Fréchet-McShane, di Kérékjártó, ecc.. .

Ricordiamo che dati due insiemi A,B dei piani reali (u,v), (α, β), diremo che H: $u=u(\alpha,\beta)$, $v=v(\alpha,\beta)$, $(\alpha,\beta)\in B$, è un omeomorfismo tra A e B se H(B)=A e se H è una trasformazione biunivoca e continua in entrambi i sensi. Due insiemi A eB si diranno omeomorfi se esiste un omeomorfismo tra essi.

Siano ora $S=(T,A)$: $p=p(w)$, $w\in A$, $S'=(T',B)$, $q=q(w')$, $w'\in B$, due trasformazioni continue degli insiemi ammissibili A,B in E_3. Diremo che S e S' sono equivalenti secondo Lebesque se A e B sono omeomorfi e se esiste un omeomorfismo H: $w'=H(w)$, $w\in A$, $w'\in B$, tra A e B tale che i punti corrispondenti in A e B hanno la stessa immagine cioè $T=T'H$, ossia $p(w)=q[H(w)]$ per ogni $w\in A$. La relazione ora definita tra T e T' soddisfa evidentemente le proprietà formali ricordate avanti e pertanto possiamo considerare le corrispondenti classi di trasformazioni equivalenti secondo Lebesque. Ognuna di tali classi complete si dirà una superficie di Lebesque. Ad esempio le trasformazioni

$$S=(T,A):\ x=u,\ y=v,\ z=o, \qquad (u,v)\in A,$$

$$\bar{S}=(\bar{T},A):\ x=u^2, y=v,\ z=0, \qquad (u,v)\in A,$$

$$S'=(T',A):\ x=1-u,\ y=v,\ z=o, \qquad (u,v)\in A,$$

ove $A=[0\leq u,v\leq 1]$ sono equivalenti secondo Lebesque. Qualora consideriamo solo quegli omeomorfismi H che trasformano il senso positivo (antiorario) delle rotazioni di A nel senso positivo delle rotazioni di B, allora avremo quella che si chiama l'equivalenza nel senso di Lebesque-McShane. Ad esempio $S,\bar{S}$ sono equivalenti nel senso di Lebesque-McShane, mentre S,S' non lo sono (fig. 1). Tutto ciò acquista interesse se si osserva con McShane che l'integrale di superficie

$$\mathcal{J}_S=\iint\left[\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}+\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|\right]du\,dv$$

ha il valore 2 sulla superficie $S,\bar{S}$ mentre ha il valore zero sulla superficie S'.

La seguente definizione di equivalenza secondo Fréchet è alquanto più generale di quella di Lebesgue. Diremo che due superficie $S=(T,A)$, $S'=(T',B)$ sono equivalenti secondo Fréchet se A e B sono omeomorfi e se per ogni $\varepsilon > 0$, esiste un omeomorfismo H_ε tra A eB tale che, se w e w' sono punti corrispondenti in A e in B, $w' = H_\varepsilon(w)$, allora le immagini T(w) e T'(w') sono ad una distanza minore di ε, cioè $|p(w)-q[H_\varepsilon(w)]| < \varepsilon$.

Il seguente esempio illustra la definizione ora introdotta (fig.2). Sia A un cerchio. Dividiamo A in due parti mediante il diametro parallelo all'asse v, separiamo i due semicerchi mediante una traslazione parallela all'asse u e diciamo B la nuova regione di Jordan così ottenuta somma dei due semicerchi e del rettangolo r che si è formato tra essi. Supposta data una superficie continua qualsiasi $S=(T,A)$: $p=p(w)$, $w \in A$, definiamo in B il vettore continuo $q(w)$, $w \in B$, stabilendo che esso coincida con p(w) nei due semicerchi ed abbia, su ciascun segmento in r parallelo all'asse u lo stesso valore che esso ha già negli estremi. Sia $S'=(T',B)$: $p=q(w)$, $w \in B$, la nuova superficie così definita. Possiamo dire che il vettore q(w) è stazionario su ciascuno dei detti segmenti di r, mentre possiamo supporre che p(w) non sia mai costante in A. E' evidente che non vi è alcun omeomorfismo tra A e B avente la proprietà che punti corrispondenti abbiano la stessa immagine, poichè ad ognuno dei segmenti s' di r detti sopra corrisponde un arco proprio s di A e mentre T' è costante su s', T è non costante su s. Dunque S e S' non sono equivalenti secondo Lebesgue. Esse sono tuttavia equivalenti secondo Fréchet. Infatti è sufficiente considerare, per ogni $\varepsilon > 0$, una striscia, abbastanza sottile, a lati paralleli all'asse v e far corrispondere mediante ovvie trasformazioni elementari i due semicerchi di B ai due opposti segmenti circolari di A e il rettangolo r alla striscia centrale di A.

Qualora nella definizione di equivalenza secondo Fréchet si considerino soltanto omeomorfismi H_ε conservanti il senso positivo delle rotazioni fra A e B, diremo che T e T' sono equivalenti nel senso di Fréchet-McShane.

Un'altra definizione di equivalenza, alquanto più raffinata, è quella di Kerékjártó che permette di associare superficie in cui le varie "parti" hanno orientamenti diversi. Ritorneremo su ciò più avanti.

L'equivalenza nel senso di Fréchet e Fréchet-McShane si sono dimostrate finora le più rispondenti alle esigenze della teoria. Diremo che, ogni classe C di superficie equivalenti nel senso di Fréchet-McShane, costituisce una superficie di Fréchet-McShane S^*. Di più diremo che ogni elemento (trasformazione $S=(T,A)$) di tale classe C è una rappresentazione della superficie di Fréchet-McShane S^*.

Date due superficie $S=(T,A)$: $p=p(w)$, $w \in A$, $S'=(T',B)$: $p=q(w')$, $w' \in B$, definite come trasformazioni continue di insiemi omeomorfi A,B diremo distanza tra S ed S' nel senso di Fréchet (o di Fréchet-McShane), il numero $\|S,S'\| = \text{extr. inf}\ d \geq 0$ definito come il confine inferiore dei numeri d aventi la seguente proprietà: esiste un omeomorfismo H tra A e B tale che punti corrispondenti in H di A e B hanno immagini ad una distanza $< d$. Nessun concetto di equivalenza o di distanza ha luogo se A e B non sono omeomorfi.

Si noti che la distanza secondo Fréchet $\|S,S'\|$ è ben altra cosa che la distanza S , S' tra i sostegni di S e S'. La distanza $\{[S], [S']\}$ è una valutazione delle mutue distanze tra tutte le possibili coppie di punti $p \in [S]$, $p' \in [S']$; la distanza $\|S,S'\|$ è una valutazione (assai diversa) delle mutue distanze tra le coppie di punti $p \in [S]$, $p' \in [S']$ quando si pensi che p e p' descrivano ordinatamente le superficie S e S' rispettivamente. Possiamo dimostrare che $\|S,S'\| \geq \{[S], [S']\}$. Infatti se $a=\|S,S'\|$, $b=\{[S], [S']\}$ allora, per ogni $\varepsilon > 0$, il numero $d=a+\varepsilon$ ha la proprietà che esiste un omeomorfismo H tra A e B con $\left|p(w) - p'[H(w)]\right| \leq d$ per ogni $w \in A$. Essendo $b \leq \left|p(w)-p'[H(w)]\right|$ per ogni w, risulta $b \leq d$, ossia $b \leq a+\varepsilon$ per ogni $\varepsilon>0$ e quindi $b \leq a$.

Si noti che se A è una regione di Jordan chiusa e semplice ed i punti della frontiera A^* sono identificati (e perciò T è costante su A^*), allora A è topologicamente equivalente ad una sfera ed $S=(T,A)$ si dirà una superficie chiusa del tipo della sfera. Pertanto i concetti di equivalenza e di distanza si porranno solo tra trasformazioni di tale tipo. Analoghe convenzioni valgono per superficie di altri tipi topologici ottenuti, come d'uso, mediante identificazioni sulle varie parti del contorno di A.

I.4. Considerazioni sull'area di una superficie.

Molte definizioni di area di una superficie sono state proposte nell'ultimo secolo in corrispondenza a diversi punti di vista. Notiamo che se si vuole che l'area di una superficie possa essere considerata come un funzionale avente (nel classico calcolo delle variazioni, come nella teoria topologica di Marston Morse) un ufficio analogo a quello che K. Menger dice un funzionale di confronto $\varphi(S)$, si deve esigere che la definizione di area soddisfi il principio di semicontinuità inferiore. Con ciò si intende che se S, S_n, $n=1,2,\dots$, sono superficie e $S_n \to S$, allora $\varphi(S) \leq \underline{\lim}\, \varphi(S_n)$ quando $n \to \infty$. La lunghezza di una curva soddisfa ad analogo principio.

Mentre tutte le definizioni di area che sono state proposte danno lo stesso valore relativamente a superficie poliedriche e a superficie elementari, talune delle definizioni proposte danno per l'area valori diversi per superficie non elementari. Tuttavia va rilevato che dopo un processo d'indagine e di interpretazione che ha occupato decenni, si sono ottenute varie definizioni formalmente diverse che soddisfano tutte il principio della semicontinuità inferiore e coincidono numericamente per tutte le superficie continue. Alcune di tali definizioni dapprima proposte e non soddisfacenti tale principio, sottoposte a quel raffinamento che era necessario perchè esse riuscissero semicontinue inferiormente, si sono poi dimostrate coincidenti fra loro. In particolare la definizione originale di area di Lebesgue e quelle di Peano e di Geöcze (dopo conveniente raffinamento) (vedi I.5) soddisfano tutte il principio di semicontinuità inferiore e coincidono numericamente. Si può dire perciò che tale area, che diremo per semplicità area di Lebesgue e a cui ci riferiremo sempre nel seguito, è il punto d'incontro di punti di vista diversi.

Secondo una congettura di T. Radó, non ancora provata, tutte le definizioni di area che soddisfano il principio di semicontinuità inferiore e coincidono con l'area elementare sopra le superficie poliedriche, dovrebbero coincidere, almeno sotto lievi e naturali ipotesi. Su questioni di tale tipo si veda M. Fréchet, S. Kempisty, G. Scorza, G. Zwirner, G. Stampacchia; M. Pagni. Va qui rilevato che estensioni alle varietà a tre dimensioni (in E_n) hanno mostrato che esistono almeno due diversi funzionali (volume) che sono semicontinui inferiormente e coincidono col volume per varietà poliedriche. La congettura di T. Radó anche se provata non potrà perciò estendersi alle varietà di dimensioni $n > 2$.

I.5. <u>L'area di Lebesgue.</u> Sia F una figura del piano (u,v). Diremo che una superficie $S=(P,F)$: $p=p(w)$, $w \in F$, è una superficie poliedrica (o una trasformazione quasi lineare) se il vettore $p(w)$ è continuo in F e se esiste una suddivisione finita $[t]$ di F in triangoli t tale che $p(w)$ è lineare in ciascun triangolo $t \in [t]$ (cioè $x(w)$, $y(w)$, $z(w)$ sono della forma $au+bv+c$ in ciascun triangolo $t \in [t]$ e $w=(u,v)$). Pertanto l'immagine di ciascun triangolo $t \in [t]$ è un triangolo D di E_3 (o di E_n) (eventualmente ridotto ad un segmento o ad un punto) e l'area elementare $a(S)=a(P,F)$ di S si definisce al solito modo come la somma delle aree delle sue facce D.

Sia $S=(T,A)$: $p=p(w)$, $w \in A$, una superficie qualsiasi (ossia una trasformazione continua di un insieme ammissibile A di E_2 in E_3). Diciamo K la collezione di tutte le successioni $[(P_n,F_n),\ n=1,2,\dots]$ di superficie poliedriche tali che $P_n \to T$, cioè tali che $F_n \in A$, $F_n \in F_{n+1}$, $F_n^o \uparrow A^o$, $d(P_n,T,A_n) \to 0$ quando $n \to \infty$. L'area di Lebesgue

$$L\ (S) = L\ (A,T)$$

della superficie S si definisce allora come il numero

$$L=L\ (S) = L(A,T) = \operatorname*{extr.\,inf.}_{K}\ \underline{\lim}_{n \to \infty}\ a(P_n,F_n).$$

In altre parole per ogni successione $[(P_n,F_n)]$ di K diciamo 1 il numero $1=\underline{\lim}\ a(P_n,F_n)$ quando $n \to \infty$ e poniamo poi $L=\text{extr.inf.}1$ per tutte le successioni della collezione K. Si ha $0 \leq L \leq +\infty$ e, in tutti i casi, si vede che esiste una qualche successione $[(P_n,F_n)] \in K$ tale che $F_n \in A$, $F_n \in F_{n+1}$, $F_n^o \uparrow A^o$, $d(P_n,T,A) \to 0$, $a(P_n,F_n) \to L(A,T)$ quando $n \to \infty$. Si può dimostrare anche che, se A è una figura $A=F$ (ad esempio se A è il quadrato unitario) non è restrittivo supporre $F_n=A$ per ogni n. In tal caso risulta per l'area di Lebesgue L la definizione più semplice seguente. Sia K' la collezione di tutte le successioni $[(P_n,A),n=1,2,\dots]$ di superficie poliedriche con $d(P_n,T,A) \to 0$ quando n tende a ∞. Allora

$$L=L(S)=L(A,T)= \operatorname*{extr.\,inf.}_{K'}\ \underline{\lim}_{n \to \infty}\ a(P_n,A).$$

Si può dimostrare facilmente, con i metodi di (I.6), che se (T,A) è essa stessa una superficie poliedrica, allora $L(A,T)=a(T,A)$, cioè l'area di Lebesgue coincide con l'area elementare per superficie poliedriche. Si può inoltre dimostrare, in base alla sola definizione, che l'area di Lebesgue soddisfa il principio della semicontinuità inferiore, cioè se $(T_n,A) \to (T,A)$, allora $L(A,T) \leq \underline{\lim}\ L(A_n,T_n)$ quando $n \to \infty$.

La teoria dell'area di Lebesgue per superficie continue non parametriche [cioè del tipo $z=f(x,y)$] è stata data da L. Tonelli nel 1926 e tale teoria è stata estesa alle superficie non parametriche, discontinue da L. Cesari (1937) e C. Goffman (1953). La teoria dell'area di Lebesgue per superficie continue parametriche (intravista da R. Caccioppoli nel 1928 a seguito di lavori di S. Banach e G. Vitali del 1924) è stata data da T. Radó e L. Cesari negli anni 1939-1945. Diamo qui due semplici proposizioni sull'area di Lebesgue.

(I.5.a) $L(A,T)$ è un funzionale semicontinuo inferiormente, cioè $T_n \to T$ implica $L(A,T) \leq \underline{\lim}\, L(A_n,T_n)$ quando $n \to \infty$.

Cenno dimostrativo. Sia (T_n,A_n), $n=1,2,\ldots$, una successione di trasformazioni continue e (T,A) un'altra trasformazione continua tali che $A_n \in A, A_n \in A_{n+1}$, $A_n^o \uparrow A^o$, $d_n=d(T_n,T,A_n) \to 0$ quando $n \to \infty$. Per ogni n esiste una successione di superfici poliedriche (P_{nm},F_{nm}), $m=1,2,\ldots$, con $F_{nm} \in A_n, F_{nm} \in F_{n,m+1}$, $F_{nm}^o \uparrow A_n^o$, $a(P_{nm},F_{nm}) \to L(A_n,T_n)$ quando $m \to \infty$.

Mediante successive estrazioni possiamo definire per ogni n un altro intero $m=m(n) > n$ tale che, se indichiamo con (P_n,F_n) la trasformazione (P_{nm},F_{nm}) con $m=m(n)$, risulta $F_n \in F_{n+1}$, $F_n \in A$, $F_n^o \uparrow A^o$, (*) $a(P_n,F_n) < L(A_n,T_n)+n^{-1}$, $d(P_n;T_n,F_n) < d_n + n^{-1}$ e quindi $P_n \to T$. Pertanto (P_n,T_n), $n=1,2,\ldots$, è una successione della classe K relativa a (T,A) e quindi, in virtù della definizi di $L(A,T)$, risulta $L(A,T) \leq \underline{\lim}\, a(P_n,F_n) \leq \underline{\lim}\, [L(A_n,T_n)+ n^{-1}] = \underline{\lim}\, L(A_n,T_n)$. La relazione (*) va sostituita con $a(P_n,F_n) > n$ se $L(A_n,T_n)=\infty$. L'asserto è completamente provato.

(I.5.b) Per ogni funzionale $\varphi(A,T)$ semicontinuo inferiormente coincidente con l'area elementare su superficie poliedriche risulta $\psi(A,T) \leq L(A,T)$. Pertanto l'area di Lebesgue è il massimo funzionale avente le proprietà dette.

Cenno dimostrativo. Sia (P_n,F_n), $n=1,2,\ldots$, una successione di superficie poliedriche con $P_n \to T$, $a(P_n,F_n) \to L(A,T)$. Allora si ha

$$\varphi(A,T) \leq \underline{\lim}\ \varphi(P_n,F_n) = \underline{\lim}\ a(P_n,F_n) \leq L(A,T).$$

Si noti che se diciamo A' un qualsiasi insieme ammissibile $A' \in A$, allora (T,A') denota la trasformazione definita da T su A e $L(A',T)$ denota l'area di Lebesgue di (T,A'). Pertanto data una trasformazione (T,A), possiamo considerare l'area di Lebesgue $L(A',T)$ come una funzione di insieme definita per tutti gli insiemi ammissibili $A' \in A$. Si ha

(I.5.c) $L(A',T) \geq 0$; $L(A'',T) \leq L(A',T)$ per ogni coppia di insiemi ammissibili $A'' \in A' \in A$; infine $L(J,T) \geq \Sigma L(J_i,T)$ per ogni regione di Jordan $J \in A$ e ogni suddivisione finita $(J_1,J_2,\dots,J_m)$ di J in regioni di Jordan.

Cenno dimostrativo. Le prime due parti sono ovvie. Per la terza si osservi che se (P_n,F_n), $n=1,2,\dots$, è una successione di trasformazioni poliedriche con $F_n \in J$, $F_n \in F_{n+1}$, $F_n^o \to J^o$, $d(P_n,T,F_n) \to 0$, $a(P_n,F_n) \to L(J,T)$, e noi consideriamo per ogni $i=1,2,\dots,m$, una successione di figure F_{in} tali che $F_{in} \in J_i$, $F_{in} \in F_{i,n+1}$, $F_{in}^o \to J_i^o$, possiamo anche supporre $F_{in} \in F_n$, $i=1,2,\dots,m$, per ogni n. Pertanto si ha

$$\Sigma L(J_i,T) \leq \sum_{i=1}^{m} \underline{\lim}_{n\to\infty}\ a(P_n,F_{in}) \leq \underline{\lim}_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{m} a(P_n,F_{in}) \leq \underline{\lim}_{n\to\infty} a(P_n,F_n) = \\ = L(J,T).$$

Osservazione. E' facile verificare con esempi che può aversi $L(J,T) > \Sigma\ L(J_i,T)$ persino nel caso che J, J_i siano tutti poligoni semplici di A.

I.6. Indice topologico di una curva piana. Stralciamo dal noto trattato di topologia di P. Alexandroff e H. Hopf (pag.462) la seguente definizione del tutto elementare di indice topologico (per una curva piana).

Sia E_2 il piano euclideo orientato dei punti $p=(x,y)$ e sia $\bar{p}$ un punto qualsiasi di E_2. Sia (ϱ, ω) un qualsiasi sistema di coordinate polari di polo $\bar{p}$ in E_2. Per semplicità supporremo che l'origine delle coordinate (x,y) in E_2 sia il punto $\bar{p}$. Allora $\varrho = \varrho(p)$, $p \in E_2$ è una funzione ad un valore e continua in E_2, mentre $\omega = \omega(p)$ è definita soltanto mod 2π e per punti $p \neq \bar{p}$. Tuttavia per ogni punto $p_0 \neq \bar{p}$ e comunque fissato un valore ω_0 degli infiniti valori mod 2π di $\omega(p)$ in p_0, esiste una ben determinata funzione $\omega_0(p)$, continua e ad un valore nel cerchio aperto di centro p_0 e raggio $|p_0 - \bar{p}|$, tale che $\omega(p_0) = \omega_0$ e $\omega(p) \equiv \omega_0(p)$ per ogni $p \in E_2$ con $|p-p_0| < |p_0 - \bar{p}|$, ove la congruenza è presa mod 2π.

Sia C: $p=p(t)$, $0 \leq t \leq 1$, ossia C: $x=x(t)$, $y=y(t)$, $0 \leq t \leq 1$, una curva continua, orientata, in E_2 non passante per $\bar{p}$ e sia $[C]$ l'insieme (limitato, chiuso e connesso) dei punti p occupati da C in E_2. Sia $2d > 0$ la distanza $\{\bar{p}, [C]\}$ di $\bar{p}$ da $[C]$. (Ricordiamo che la distanza $\{p, A\}$ di un punto o da un insieme A è definita da $\{p, A\}$ = extr.inf? $|p-w|$ per ogni $w \in A$, e tale confine inferiore è un effettivo minimo se A è chiuso).

Dividiamo ora $[0,1]$ in un numero finito di parti qualsiasi mediante punti $0=t_0 < t_1 < \ldots < t_m=1$ e le parti siano così piccole che in ognuna di esse il vettore $p(t)$ abbia una oscillazione $\leq d$. Ricordiamo che l'ossillazione di un vettore $p(t)$, $t \in [0,1]$ in un insieme $I \in [0,1]$ è il numero Osc $[p(t);\ I]$ =extr.sup $|p(t)-p(t')|$ per tutti i $t,t' \in I$, e pertanto Osc $[p(t);\ I]$ è uguale al diametro dell'immagine dell'insieme I rispetto alla trasformazione $p=p(t)$. Diciamo $p_i=p(t_i)$, $i=0,1,\ldots,m$, i corrispondenti punti di C e denotiamo con s_i il cerchio chiuso di centro p_i e raggio d. Sia ω_0 una qualsiasi delle determinazioni di $\omega(p_0)$ e sia $\omega_0(p)$ la corrispondente funzione ad un valore e continua in s_0 con $\omega_0(p_0) = \omega_0$, $\omega(p) \equiv \omega_0(p)$ in s_0. Poichè tutti i punti $p(t)$ con $t_0 \leq t \leq t_1$ sono in s_0 la funzione $\Omega(t) = \omega_0[p(t)]$, $t_0 \leq t \leq t_1$ è univocamen-