BIRKHÄUSER

Modern Birkhäuser Classics

# The Grothendieck Festschrift Volume I

## A Collection of Articles Written in Honor of the 60th Birthday of Alexander Grothendieck

P. Cartier
L. Illusie
N.M. Katz
G. Laumon
Yu. I. Manin
K.A. Ribet

Editors

# The Grothendieck Festschrift
# Volume I

## A Collection of Articles Written in Honor of the 60th Birthday of Alexander Grothendieck


P. Cartier

L. Illusie

N.M. Katz

G. Laumon

Yu.I. Manin

K.A. Ribet

Editors



Reprint of the 1990 Edition

Springer Science+Business Media, LLC

Pierre Cartier
Institut des Hautes Études Scientifiques
F-91440 Bures-sur-Yvette
France

Luc Illusie
Université de Paris-Sud
Département de Mathématiques
F-91405 Orsay
France

Nicholas M. Katz
Princeton University
Department of Mathematics
Princeton, NJ 08544
U.S.A.

Gérard Laumon
Université de Paris-Sud
Département de Mathématiques
F-91405 Orsay
France

Yuri I. Manin
Max-Planck Institut für Mathematik
D-53111 Bonn
Germany

Kenneth A. Ribet
University of California
Department of Mathematics
Berkeley, CA 94720
U.S.A.

Originally published as Volume 86 in the series *Progress in Mathematics*

Cover design by Alex Gerasev.

Mathematics Subject Classification (2000): 00B15, 00B30, 01A60, 01A70, 01A75 (primary); 11G09, 11G40, 11R54, 14A15, 14A20, 14A22, 14C05, 14C17, 14C35, 14C40, 14D07, 14D15, 14D20, 14D22, 14F05, 14F20, 14F25, 14F30, 14F40, 14G10, 14G15, 14G40, 14H20, 14H40, 14H52, 14H55, 14H60, 14J20, 14J70, 14L05, 14L30, 14M17, 16E10, 16W50, 17A30, 17B66, 18G50, 18G55, 19D55, 19E20, 22E65, 32L10, 46L85, 46L87, 52B30, 55R20, 55U05, 55U15, 57N35, 57R20, 57R30, 57S20, 58A10, 58B25, 58F11, 58F18, 58G05 (secondary)

**Library of Congress Control Number:** 2006936966

ISBN 978-0-8176-4566-3 ISBN 978-0-8176-4574-8 (eBook)
DOI 10.1007/978-0-8176-4574-8

Printed on acid-free paper.

***Birkhäuser***



9 8 7 6 5 4 3 2 1

*www.birkhauser-science.com* (IBT)

P. Cartier L. Illusie N.M. Katz
G. Laumon Y. Manin K.A. Ribet
Editors

# The Grothendieck Festschrift

## A Collection of Articles Written in Honor of the 60th Birthday of Alexander Grothendieck

Volume I

1990

Springer Science+Business Media, LLC

Pierre Cartier
Institut des Hautes
Etudes Mathématique
91440 Bures-sur-Yvette
France

Luc Illusie
Departement de Mathématiques
Université de Paris-Sud
Centre d'Orsay
91405 Orsay Cedex
France

Nicholas M. Katz
Department of Mathematics
Princeton University
Princeton, NJ 08544
USA

Gerard Laumon
Departement de Mathématiques
Université de Paris-Sud
Centre d'Orsay
91405 Orsay Cedex
France

Yuri Manin
Steklov Institute
Moscow
USSR

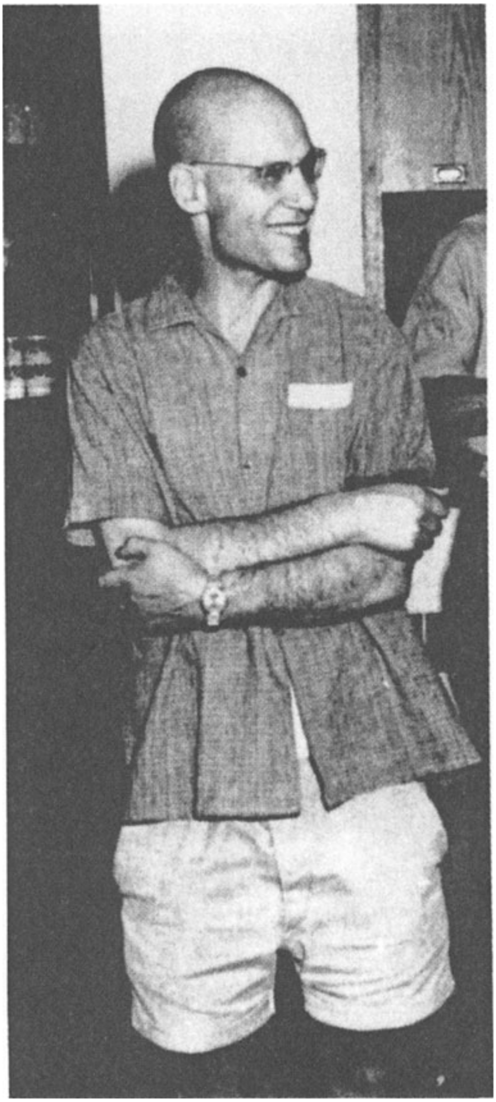
Kenneth A. Ribet
Department of Mathematics
University of California
Berkeley, CA 94720
USA

Printed on acid-free paper



ISBN 978-0-8176-4566-3 ISBN 978-0-8176-4574-8 (eBook)
DOI 10.1007/978-0-8176-4574-8

9 8 7 6 5 4 3 2



Alexander Grothendieck

# Modern Birkhäuser Classics

Many of the original research and survey monographs in pure and applied mathematics published by Birkhäuser in recent decades have been groundbreaking and have come to be regarded as foundational to the subject. Through the MBC Series, a select number of these modern classics, entirely uncorrected, are being re-released in paperback (and as eBooks) to ensure that these treasures remain accessible to new generations of students, scholars, and researchers.

# FOREWORD

It is difficult to grasp fully the magnitude of Alexander Grothendieck's contribution to and influence on twentieth century mathematics. He has changed the very way we think about many branches of mathematics. Many of his ideas, revolutionary when introduced, now seem so natural as to have been inevitable. Indeed, there is a whole new generation of mathematicians for whom these ideas are part of the mathematical landscape, a generation who cannot imagine that Grothendieck's ideas were ever absent.

Grothendieck was born in Berlin on March 28, 1928. After university studies at Montpellier, he spent the year 1948-49 as "auditeur libre" at the École Normale Supérieure. From 1949 to 1953 he worked in functional analysis at Nancy under J. Dieudonné and L. Schwartz; his doctoral thesis was "Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires" [18]. Between 1950 and 1958, he was supported by the Centre National de la Recherche Scientifique (CNRS). During this period, he spent 1953-55 at the University of São Paulo and 1955-56 at the University of Kansas.

By 1955, his interests had turned from his original field of functional analysis to topology and geometry; his Tôhoku article [28] dates from his visit to Kansas. In 1958, he outlined [32], with incredible prescience, a large part of the work that was to occupy him over the next decade. The next year he left the CNRS for a position of professor at the newly formed Institut des Hautes Etudes Scientifiques (IHES).

It is no exaggeration to speak of Grothendieck's years 1959-1970 at the IHES as a "Golden Age," during which a whole new school of mathematics flourished under Grothendieck's charismatic leadership. Grothendieck's Séminaire de Géométrie Algébrique (SGA) established the IHES as a world center of algebraic geometry, and him as its driving force. He received the Fields Medal in 1966. In looking back at this period, one marvels at the generosity with which Grothendieck shared his ideas with colleagues and students, the energy he and his collaborators devoted to meticulous redaction, the excitement with which they set out to explore a new land.

In 1970, Grothendieck left the IHES and abandoned mathematics as the exclusive focus of his energies. His active presence at the forefront of the mathematical scene has been deeply missed.

He spent 1970-72 as visiting professor at the Collège de France, and 1972-73 as visiting professor at Orsay. In 1973 he became professor at

Montpellier. From 1984 to 1988, he was on leave from Montpellier as "directeur de recherches" at the CNRS. He was awarded but declined the Crafoord Prize in 1988. He retired on October 1, 1988.

In his compelling memoir "Récoltes et Semailles: Réflexions et témoignages sur un passé de mathématicien" [56], Grothendieck discusses at length his life, his work, his relations with and his views on the mathematical community. One of Grothendieck's most striking images there is of mathematics as an edifice under construction, and of himself as a foreman-architect. He is deeply critical of what happened on the worksite after he left the job.

The mere enumeration of Grothendieck's best known contributions is overwhelming: topological tensor products and nuclear spaces, sheaf cohomology as derived functors, schemes, K-theory and Grothendieck-Riemann-Roch, the emphasis on working relative to a base, defining and constructing geometric objects via the functors they are to represent, fibred categories and descent, stacks, Grothendieck topologies (sites) and topoi, derived categories, formalisms of local and global duality (the "six operations"), étale cohomology and the cohomological interpretation of L-functions, crystalline cohomology, "standard conjectures", motives and the "yoga of weights", tensor categories and motivic Galois groups. It is difficult to imagine that they all sprang from a single mind. And yet this is only a partial picture of Grothendieck's work. There are numerous unpublished letters and manuscripts, some of which have already had an influence entirely out of proportion to their extremely limited circulation, others whose influence may only be felt in years to come. We can only hope that they will soon be published.

In contemplating Grothendieck's magnificent achievement, one is struck by the simplicity of the fundamental concepts which underlie it, and by the profound unity of thought which brought it into being. He has seen further, and shared his vision with us. By no means have all of his dreams been fully realized. Some are being actively pursued today; others may be for future generations to explore.

The articles presented here, collected on the occasion of Grothendieck's sixtieth birthday, are offered as a tribute to one of the world's greatest living mathematicians.

# CONTENTS

## VOLUME II

## VOLUME III

# BIBLIOGRAPHIE D'ALEXANDER GROTHENDIECK


[1] *Sur la complétion du dual d'un espace vectoriel localement convexe.* C. R. Acad. Sc. Paris **230**, 605–606 (1950).

[2] *Quelques résultats relatifs à la dualité dans les espaces* $(\mathcal{F})$. C. R. Acad. Sci. Paris **230**, 1561–1563 (1950).

[3] *Critères généraux de compacité dans les espaces vectoriels localement convexes. Pathologie des espaces* $(\mathcal{LF})$. C. R. Acad. Sci. Paris **231**, 940–941 (1950).

[4] *Quelques résultats sur les espaces vectoriels topologiques.* C. R. Acad. Sci. Paris **233**, 839–841 (1951).

[5] *Sur une notion de produit tensoriel topologique d'espaces vectoriels topologiques, et une classe remarquable d'espaces vectoriels liée à cette notion.* C. R. Acad. Sci. Paris **233**, 1556-1558 (1951).

[6] *Critères de compacité dans les espaces fonctionnels généraux.* Amer. J. Math. **74**, 168–186 (1952).

[7] *Sur les applications linéaires faiblement compactes d'espaces du type* $C(K)$. Canadian J. Math. **5**, 129–173 (1953).

[8] *Sur les espaces de solutions d'une classe générale d'équations aux dérivées partielles.* J. Analyse Math. **2**, 243–280 (1953).

[9] *Sur certains espaces de fonctions holomorphes, I.* J. reine angew. Math. **192**, 35–64 (1953).

[10] *Sur certains espaces de fonctions holomorphes, II.* J. reine angew. Math. **192**, 77–95 (1953).

[11] *Quelques points de la théorie des produits tensoriels topologiques.* Segundo symposium sobre algunos problemas matemáticos que se están estudiando en Latino América, Julio 1954, 173–177. Centro de Cooperación Cientifica de la UNESCO para América Latina, Montevideo, Uruguay, 1954.

[12] *Espaces vectoriels topologiques.* Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Universidade de São Paulo, 1954.

[13] *Résumé des résultats essentiels dans la théorie des produits tensoriels topologiques et des espaces nucléaires.* Ann. Inst. Fourier **4**, 73–112 (1952).

[14] *Sur certains sous-espaces vectoriels de* $L^p$. Canadian J. Math. **6**, 158–160 (1954).

[15] *Résultats nouveaux dans la théorie des opérations linéaires, I.* C. R. Acad. Sci. Paris **239**, 577–579 (1954).

[16] *Résultats nouveaux dans la théorie des opérations linéaires, II.* C. R.

Acad. Sc. Paris 239, 607–609 (1954).

[17] *Sur les espaces ($\mathcal{F}$) et ($\mathcal{DF}$).* Summa Brazil. Math. **3**, 57–123 (1954).

[18] *Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires.* Mem. Amer. Math. Soc. n° 16, 1955.

[19] *Une caractérisation vectorielle-métrique des espaces $L^1$.* Canad. J. Math. **7**, 552–561 (1955).

[20] *A general theory of fibre spaces with structure sheaf.* University of Kansas, 1955.

[21] Erratum au mémoire: *Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires.* Ann. Inst. Fourier **6**, 117–120 (1955-56).

[22] *Résumé de la théorie métrique des produits tensoriels topologiques.* Bol. Soc. Mat. São Paulo **8**, 1–79 (1956).

[23] *Théorèmes de finitude pour la cohomologie des faisceaux.* Bull. Soc. Math. France **84**, 1–7 (1956).

[24] *La théorie de Fredholm.* Bull. Soc. Math. France **84**, 319–384 (1956).

[25] *Sur la classification des fibrés holomorphes sur la sphère de Riemann.* Amer. J. Math. **79**, 121–138 (1957).

[26] *Sur certaines classes de suites dans les espaces de Banach, et le théorème de Dvoretzky-Rogers.* Bol. Soc. Mat. São Paulo **8**, 81–110, (1956).

[27] *Un résultat sur le dual d'une $C^*$-algèbre.* J. Math. Pures Appl., **36**, 97–108 (1957).

[28] *Sur quelques points d'algèbre homologique.* Tôhoku Math. J. **9**, 119–221 (1957).

[29] *Algèbre homologique.* Séminaire A. Grothendieck, 1ère année, 1957, Secrétariat mathématique IHP, 11 rue Pierre et Marie Curie, 75005 Paris, 1958.

[30] *La théorie des classes de Chern.* Bull. Soc. Math. France **86**, 137–154 (1958).

[31] *Sur une note de Mattuck-Tate.* J. reine angew. Math. **200**, 208–215 (1958).

[32] *The cohomology theory of abstract algebraic varieties.* Proc. Internat. Congress Math. (Edinburgh, 1958), 103–118. Cambridge Univ. Press, New York, 1960.

[33] *The trace of certain operators.* Studia Math. **20**, 141–143 (1961).

[34] *Fondements de la géométrie algébrique* ( *Extraits du Séminaire Bourbaki* 1957–62), Secrétariat mathématique IHP, 11 rue Pierre et Marie Curie, 75005 Paris, (1962).

[35] *Résidus et dualité, Prénotes pour un séminaire Hartshorne* 1963, (R. Hartshorne, Residues and Duality, Lecture Notes in Mathematics **20**, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1966.

[36] *Le groupe de Brauer*, III : *Exemples et compléments*, IHES, Mars 1966. Dix exposés sur la cohomologie des schémas, 88–188. North Holland, Amsterdam et Masson, Paris, 1968 (*).

[37] *On the de Rham cohomology of algebraic varieties.* Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **29**, 95–103 (1966).

[38] *Un théorème sur les homomorphismes de schémas abéliens.* Invent. Math. **2**, 59–78 (1966).

[39] (avec Dieudonné J.) *Critères différentiels de régularité pour les localisés des algèbres analytiques.* J. Algebra **5**, 305–324 (1967).

[40] *Local cohomology.* A seminar given by A. Grothendieck, Harvard University, Fall 1961, Notes by R. Hartshorne, Lecture Notes in Mathematics **41**, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1967.

[41] *Catégories cofibrées additives et complexe cotangent relatif.* Lecture Notes in Mathematics **79**, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1968.

[42] *Classes de Chern et représentations linéaires des groupes discrets.* Dix exposés sur la cohomologie des schémas, 215–305. North Holland, Amsterdam; Masson, Paris, 1968.

[43] *Crystals and the de Rham cohomology of schemes*, Notes by J. Coates and O. Jussila. Dix exposés sur la cohomologie des schémas, 306–358. North Holland, Amsterdam; Masson, Paris, 1968.

[44] *Standard conjectures on algebraic cycles.* Algebraic Geometry (Internat. Colloq., Tata Inst. Fund. Res., Bombay, 1968), 193–199. Oxford Univ. Press, London, 1969.

[45] *Hodge's general conjecture is false for trivial reasons.* Topology **8**, 299–303 (1969).

[46] *Représentations linéaires et compactification profinie des groupes discrets.* (English summary) Manuscripta Math. **2**, 375–396 (1970).

[47] *The Responsibility of the Scientist Today.* Queen's Papers in Pure and Applied Mathematics, **27**, Queen's University, Kingston, Ontario 1971.

[48] (with Murre, Jacob P.) *The tame fundamental group of a formal neighbourhood of a divisor with normal crossings on a scheme.* Lecture Notes in Mathematics **208**, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1971.

---

(*). Ce texte est la continuation des exposés au Séminaire Bourbaki [79] et [80].

[49] *Travaux de Heisouké Hironaka sur la résolution des singularités.* Actes du Congrès International des Mathématiciens (Nice, 1970), Tome 1, 7–9. Gauthier-Villars, Paris, 1971.

[50] *Groupes de Barsotti-Tate et cristaux.* Actes du Congrès International des Mathématiciens (Nice, 1970), Tome 1, 431–436. Gauthier-Villars, Paris, 1971.

[51] (with Seydi Hamet) *Platitude d'une adhérence schématique et lemme de Hironaka généralisé.* (English summary) Manuscripta Math. **5**, 323–339 (1971).

[52] *Topological vector spaces.* Translated from the French ([12]) by Orlando Chaljub. Notes on Mathematics and its Applications. Gordon and Breach Science Publishers, New York-London-Paris, 1973.

[53] *Groupes de Barsotti-Tate et cristaux de Dieudonné.* Séminaire de Mathématiques Supérieures. **45** (Été 1970). Les Presses de l'Université de Montréal, Montréal, Que., 1974.

[54] *A la poursuite des champs* (1983), non publié.

[55] *Esquisse d'un programme* (1984), non publié.

[56] *Récoltes et Semailles : réflexions et témoignage sur un passé de mathématicien.* Université des Sciences et Techniques du Languedoc (Montpellier) et CNRS (1985).

[EGA] : *Eléments de Géométrie Algébrique*, rédigés avec la collaboration de J. Dieudonné. Publications mathématiques de l'IHES :

[57] I. *Le langage des schémas.* **4** (1960) (seconde édition, Springer-Verlag 1971).

[58] II. *Étude globale élémentaire de quelques classes de morphismes.* **8** (1961).

[59] III. *Étude cohomologique des faisceaux cohérents. I.* **11** (1961).

[60] III. *Étude cohomologique des faisceaux cohérents. II.* **17** (1963).

[61] IV. *Étude locale des schémas et des morphismes de schémas. I.* **20** (1964).

[62] IV. *Étude locale des schémas et des morphismes de schémas. II.* **24** (1965).

[63] IV. *Étude locale des schémas et des morphismes de schémas. III.* **28** (1966).

[64] IV. *Étude locale des schémas et des morphismes de schémas. IV.* **32** (1967).

Exposés au Séminaire Bourbaki (*)

[65] *Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires*, 1952/53, n° 69.

[66] *La théorie de Fredholm*, 1953/54, n° 91.

[67] *Réarrangements de fonctions et inégalités de convexité dans les algèbres de von Neumann munies d'une trace*, 1954/55, n° 113.

[68] *Sur un mémoire de A. Weil : "Généralisation des fonctions abéliennes"*, 1956/57, n° 141.

[69] *Théorèmes de dualité pour les faisceaux algébriques cohérents*, 1956/57, n° 149.

[70] *Géométrie formelle et géométrie algébrique*, 1958/59, n° 182.

[71] *Technique de descente et théorèmes d'existence en géométrie algébrique, I : Généralités. Descente par morphismes fidèlement plats*, 1959/60, n° 190.

[72] *Technique de descente et théorèmes d'existence en géométrie algébrique, II : Le théorème d'existence en géométrie formelle des modules*, 1959/60, n° 195.

[73] *Techniques de construction et théorèmes d'existence en géométrie algébrique, III : Préschémas quotients*, 1960/61, n° 212.

[74] *Techniques de construction et théorèmes d'existence en géométrie algébrique, IV : Les schémas de Hilbert*, 1960/61, n° 221.

[75] *Technique de descente et théorèmes d'existence en géométrie algébrique, V : Les schémas de Picard : Théorèmes d'existence*, 1961/62, n° 232.

[76] *Technique de descente et théorèmes d'existence en géométrie algébrique, VI : Les schémas de Picard : Propriétés générales*, 1961/62, n° 236.

[77] *Fondements de la géométrie algébrique, commentaires*, 1961/62, complément.

[78] *Formule de Lefschetz et rationalité des fonctions L*, 1964/65, n° 279. (**)

[79] *Le groupe de Brauer, I : Algèbres d'Azumaya et interprétations diverses*, 1964/65, n° 290. (**)

[80] *Le groupe de Brauer, II : Théorie cohomologique*, 1965/66, n° 297. (**)

(*) publiés par W. A. Benjamin, Inc., New York, 1966.

(**) reproduit dans "Dix Exposés sur la cohomologie des schémas", North Holland, Amsterdam et Masson, Paris, 1968.

Exposés au Séminaire Chevalley (Institut Henri Poincaré, Secrétariat mathématique, 11 rue Pierre et Marie Curie, 75005 Paris).

Classification des groupes de Lie algébriques (1956/58).

[81] *Généralités sur les groupes algébriques affines. Groupes algébriques affines commutatifs.* Exp. 4.

[82] *Compléments de géométrie algébrique. Espaces de transformations.* Exp. 5.

[83] *Les théorèmes de structure fondamentaux pour les groupes algébriques affines.* Exp. 6.

[84] *Sous-groupes de Cartan, éléments réguliers. Groupes algébriques affines de dimension* 1. Exp. 7.

Anneaux de Chow et applications (1958).

[85] *Sur quelques propriétés fondamentales en théorie des intersections.* Exp. 4.

[86] *Torsion homologique et sections rationnelles.* Exp. 5.

Exposés au Séminaire Cartan 1960/61 : Familles d'espaces complexes et fondements de la géométrie analytique (W. A. Benjamin, Inc., New York, 1967).

*Techniques de construction en géométrie analytique* :

[87] I : *Description axiomatique de l'espace de Teichmüller et de ses variantes.* Exp. 7-8.

[88] II : *Généralités sur les espaces annelés et les espaces analytiques.* Exp. 9.

[89] III : *Produits fibrés d'espaces analytiques.* Exp. 10.

[90] IV : *Formalisme général des foncteurs représentables.* Exp. 11.

[91] V : *Fibrés vectoriels, fibrés projectifs, fibrés en drapeaux.* Exp. 12.

[92] VI : *Étude locale des morphismes ; germes d'espaces analytiques, platitude, morphismes simples.* Exp. 13.

[93] VII : *Étude locale des morphismes ; éléments de calcul infinitésimal.* Exp. 14.

[94] VIII : *Rapport sur les théorèmes de finitude de Grauert et Remmert.* Exp. 15.

[95] IX : *Quelques problèmes de modules.* Exp. 16.

[96] X : *Construction de l'espace de Teichmüller.* Exp. 17.

SGA : Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie (*)

[97] SGA 1 *Revêtements étales et groupe fondamental*, 1960-61.
Dirigé par A. Grothendieck, Lecture Notes in Mathematics **224**, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1971.

[98] SGA 2 *Cohomologie des faisceaux cohérents et théorèmes de Lefschetz locaux et globaux*, 1961-62.
Dirigé par A. Grothendieck, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1968.

[99] SGA 3 *Schémas en groupes*, 1962-64.
Dirigé par M. Demazure et A. Grothendieck.
Tome I. *Propriétés générales des schémas en groupes*, Lecture Notes in Mathematics **151**, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1970.
Tome II. *Groupes de type multiplicatif, et structure des schémas en groupes généraux*, Lecture Notes in Mathematics **152**, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1970.
Tome III. *Structure des schémas en groupes réductifs*, Lecture Notes in Mathematics **153**, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1970.

[100] SGA 4 *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas*, 1963-64.
Dirigé par M. Artin, A. Grothendieck, J.-L. Verdier
Tome I. *Théorie des topos*, Lecture Notes in Mathematics **269**, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1972.
Tome II. Lecture Notes in Mathematics **270**, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1972.
Tome III. Lecture Notes in Mathematics **305**, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1973.

[101] SGA 5 *Cohomologie l-adique et fonctions L*, 1965-66.
Dirigé par A. Grothendieck, Lecture Notes in Mathematics **589**, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1977.

[102] SGA 6 *Théorie des intersections et théorème de Riemann-Roch*, 1966-67.
Dirigé par P. Berthelot, A. Grothendieck, L. Illusie, Lecture Notes in Mathematics **225**, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1971.

---

(*) Nous omettons de la liste (SGA 4 1/2, par P. Deligne, *Cohomologie étale*, Lecture Notes in Mathematics **569**, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1977), qui ne correspond à aucun séminaire du Bois-Marie.

[103] SGA 7 *Groupes de monodromie en géométrie algébrique*, 1967-69.
Tome I, Dirigé par A. Grothendieck, Lecture Notes in Mathematics **288**, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1972.
Tome II, par P. Deligne et N. Katz (*) Lecture Notes in Mathematics **340**, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1973.

(*) Bien que signée de Deligne et Katz, cette partie du séminaire a néanmoins été dirigée par Grothendieck.

# De L'Analyse Fonctionnelle aux Fondements de la Géométrie Algébrique

JEAN DIEUDONNÉ

Le talent exceptionnel d'Alexander Grothendieck s'est révélé très tôt. Il avait fait ses études universitaires à Montpellier, où à cette époque l'enseignement des mathématiques à l'Université était un des plus sclérosés qu'on pût trouver en France ; ce n'est donc pas là qu'il eût pu être mis au courant des grands problèmes en suspens. Il passa l'année scolaire 1948-49 à Paris, où il suivit le premier des fameux "Séminaires H. Cartan", consacré cette année-là aux débuts de la Topologie algébrique (qui alors n'était enseignée nulle part ailleurs en France). Mais—ce qui est étonnant quand on pense à la suite de sa carrière—Grothendieck ne s'y intéressa que médiocrement ; il était plus attiré par ce qu'il avait entendu dire sur l'Analyse fonctionnelle, et sur les conseils de Cartan, il arriva à Nancy en Octobre 1949. A ce moment-là, Delsarte, Godement, Schwartz et moi-même y avions organisé un Séminaire sur les espaces vectoriels topologiques, théorie où nous travaillions tous dans diverses directions.

La théorie des espaces de Banach et de la dualité dans ces espaces, alors déjà ancienne, était bien comprise vers 1950 ; mais par contre celle des espaces localement convexes généraux ne faisait que débuter ; ceux qu'on connaissait le mieux étaient de types très particuliers, notamment les espaces de suites (Köthe), et surtout les espaces de fonctions et de distributions étudiés par Sobolev et Schwartz. Il convenait donc de chercher s'il existait des propriétés générales qui rendraient compte du comportement de ces espaces particuliers. Schwartz et moi-même avions commencé une telle étude pour les espaces de Fréchet et leurs limites inductives ; mais nous y avions rencontré toute une série de questions auxquelles nous ne savions pas répondre. Nous avons donc proposé à Grothendieck de les étudier, et le résultat dépassa rapidement nos espérances. En moins d'un an, il avait résolu tous nos problèmes, au moyen de très ingénieuses constructions ; puis, continuant sur sa lancée, il se mit à aborder de nombreuses autres questions. Quand il s'est agi en 1953 de lui décerner un doctorat, il fallut choisir entre six mémoires, dont chacun aurait fait une bonne thèse. Bien entendu, ce fut son grand mémoire sur les espaces nucléaires et les produits tensoriels topologiques qui fut retenu ; il lui assura rapidement une place de choix parmi les spécialistes internationaux d'Analyse fonctionnelle.

Il y abordait un sujet entièrement nouveau, l'étude des topologies "raisonnables" sur le produit tensoriel de deux espaces localement convexes ; seul le cas des espaces de Banach avait fait l'objet de travaux antérieurs. Dans l'étude aussi originale que profonde qu'il en fit, on reconnaît déjà sa "patte"; bien qu'à cette époque on ne parlât guère encore de catégories, c'est déjà leur esprit qui domine, dans la recherche constante de définitions "naturelles" et de propriétés "fonctorielles", qui deviendra systématique dans ses travaux ultérieurs. Mais à côté de grands théorèmes généraux, c'est à chaque instant qu'apparaît un ingénieux contre-exemple, pour délimiter exactement la portée de ces théorèmes. Sa plus remarquable découverte fut celle des espaces nucléaires, obtenue par comparaison entre deux topologies possibles sur des produits tensoriels ; cette catégorie d'espaces, jusque là totalement insoupçonnée, se révéla être la plus proche possible, par ses agréables propriétés, des espaces de dimension finie ; et Grothendieck montra que les beaux résultats connus pour les espaces de distributions (notamment le fameux "théorème des noyaux" de Schwartz) provenaient tout simplement de ce que ces espaces sont nucléaires. Depuis lors, les espaces nucléaires ont trouvé bien d'autres applications, notamment en Calcul des Probabilités. Une autre idée tout à fait nouvelle est l'étude des applications linéaires continues entre espaces localement convexes qui *se factorisent* à travers un espace $L^p(\mu)$ pour une mesure $\mu$ convenable. Grothendieck leur a consacré un mémoire spécial intitulé "Résumé de la théorie métrique des produits tensoriels topologiques", qui est devenu la source de toute une théorie consacrée à l'étude de la géométrie des espaces de Banach.

Ainsi, en moins de trois ans était créée une œuvre dont l'impact sur la théorie des espaces vectoriels topologiques ne peut, à mon avis, être comparé qu'à celui des travaux de Banach.

Mais déjà, après un cours donné à São Paulo en 1953, Grothendieck va s'en éloigner. Dans sa thèse, il avait signalé la possibilité d'appliquer ses résultats à l'algèbre homologique et à la théorie des faisceaux. Ce sont ces théories vers lesquelles il se tourne, ainsi que la Topologie algébrique, la Géométrie algébrique et la Géométrie analytique, toutes en pleine effervescence dans la décennie 1950-60, et réagissant sans cesse les unes sur les autres. Guidé en partie par Serre avec qui il entretient une abondante correspondance, Grothendieck entreprend de s'y initier dès la fin de 1954, et il y met la même rapidité déconcertante qu'il avait déjà manifestée pour ses progrès dans l'Analyse fonctionnelle ; alors qu'en 1954 il avoue ne pas se sentir à l'aise dans le maniement des suites spectrales, en 1956 il y témoigne une virtuosité qui stupéfie Serre lui-même.

En 1955, il est invité pour le premier semestre à l'Université du Kansas, où il s'occupe surtout d'espaces fibrés analytiques et algébriques, et d'algèbre homologique. Il obtient la classification des fibrés vectoriels holomorphes sur la droite projective, première étape d'une théorie encore très active aujourd'hui. En vue des applications à la Géométrie algébrique qu'il commence à envisager, il prolonge (sans le savoir tout d'abord) les idées de MacLane et de Buchsbaum sur les catégories abéliennes. Comme à son habitude, il va droit au cœur du sujet, en donnant un système d'axiomes pour les catégories abéliennes ; son résultat le plus important est la preuve que les faisceaux de modules forment une catégorie abélienne avec suffisamment d'objets injectifs, ce qui lui permet de définir la cohomologie à valeurs dans un tel faisceau sans restriction sur le type de faisceau ni sur l'espace de base. Ce travail est longtemps resté un classique pour les spécialistes de l'algèbre homologique (qui l'appelaient "Tôhoku", du nom du journal où il avait été publié).

Rentré en France en 1956, Grothendieck participe activement au mouvement mathématique de l'école française ; il s'oriente de plus en plus vers la Géométrie algébrique, et étudie de façon approfondie les mémoires de Serre (alors tout récents) sur les variétés algébriques définies sur un corps algébriquement clos, mais de caractéristique quelconque. Surtout, il amorce l'évolution qui va le conduire, en Géométrie algébrique, à passer de théorèmes "absolus" pour une variété aux théorèmes "relatifs" correspondants concernant les morphismes. Ces derniers, en Géométrie algébrique, n'avaient attiré l'attention que tardivement ; dans les ouvrages classiques, il était surtout question d'applications birationnelles, non partout définies en général ; les morphismes n'en apparaissaient que comme cas particuliers, les "applications régulières" définies partout. Dans FAC, Serre en avait donné une définition comme morphismes d'espaces localement annelés, mais sans beaucoup les utiliser. Par contre, la notion de morphisme était au cœur des travaux contemporains sur les variétés analytiques (K. Stein, Grauert et Remmert).

La notion de morphisme propre, version "relative" de la notion de "variété complète" de Weil, permit à Grothendieck de donner une version "relative" du théorème de Serre établissant que, pour une variété complète $X$ et un $\mathcal{O}_X$-Module cohérent $\mathcal{F}$, les groupes de cohomologie $H^j(X;\mathcal{F})$ sont de dimension finie sur le corps de base $k$. Grothendieck prouva en 1956 que si $f : X \to Y$ est un morphisme propre, les "images supérieures" $R^q f_*(\mathcal{F})$ d'un $\mathcal{O}_X$-Module cohérent $\mathcal{F}$ sont des $\mathcal{O}_Y$-Modules cohérents.

C'est dans cette même direction qu'il obtint peu après son premier grand théorème de Géométrie algébrique, la version "relative" du théorème de Riemann-Roch-Hirzebruch. En 1953, à la suite des travaux de Cartan-Serre et de Kodaira-Spencer sur l'application de la cohomologie des faisceaux aux variétés holomorphes, Hirzebruch avait obtenu un théorème général applicable à une variété algébrique complexe $M$, projective, sans singularité et de dimension $m$ ; si $E$ est un fibré vectoriel complexe holomorphe de base $M$, on a la formule

$$\sum_{i=0}^{m}(-1)^i \dim H^i(\mathcal{F}) = \kappa_{2m}(ch(E) \smile td_M) \tag{1}$$

où $\mathcal{F}$ est le faisceau des germes de sections holomorphes de $E$, $ch(E)$ le caractère de Chern de $E$, et $td_M$ la somme des polynômes de Todd $T_k(c_1, c_2, \ldots, c_k)$ en les classes de Chern du fibré tangent de $M$ ; le second membre de (1) est la valeur $\langle u, [M]\rangle$ pour la classe fondamentale $[M]$, de la somme $u$ des termes du cup-produit $ch(E) \smile td_M$ qui appartiennent à $H^{2m}(M;\mathbf{Q})$. Lorsque $M$ est une courbe et $E$ le fibré en droites associé à un diviseur de $M$, la formule (1) entraîne le théorème de Riemann-Roch classique.

Pour comprendre le passage de (1) à une version "relative", il est commode de se placer d'abord dans le cas où $X, Y$ sont deux variétés projectives complexes sans singularité, de dimensions $m = \dim X$, $n = \dim Y$, et où $f : X \to Y$ est un morphisme. Le but initial est d'établir une relation entre $ch_X(E) \smile td_X$ et $ch_Y(E') \smile td_Y$, où $E'$ est relié à $E$ au moyen de $f$, d'une manière inconnue au départ ; la relation doit se réduire à (1) lorsque $Y$ se réduit à un point.

La première idée est que, pour n'importe quel $z \in H^\bullet(X;\mathbf{Q})$, $\kappa_{2m}(z)$ doit être remplacé par $f_*(z)$, où $f_* : H^\bullet(X;\mathbf{Q}) \to H^\bullet(Y;\mathbf{Q})$ est un homomorphisme. Bien entendu, ce n'est pas "naturel" puisque $H^\bullet$ est un foncteur contravariant. Mais si l'on utilise la dualité de Poincaré pour $X$ et $Y$, suivant la méthode de Hopf-Gysin, on obtient bien des homomorphismes $f_* : H^p(X;\mathbf{Q}) \to H^{p+d}(Y;\mathbf{Q})$ avec $d = 2(n-m)$. Lorsque $n = 0$, $f_*$ n'est non nul que si $p = 2m$, et on a bien alors la relation $f_*(z) = \kappa_{2m}(z)$. Le sens à donner à $E'$ de façon à retrouver le premier membre de (1) lorsque $n = 0$ est beaucoup plus caché. La version "relative" de $H^j(\mathcal{F})$ est l'image directe supérieure $R^j f_*(\mathcal{F})$ de Leray ; ce sont des $\mathcal{O}_Y$-Modules cohérents, nuls sauf pour un nombre fini de $j$. Mais par quoi remplacer la somme alternée des dimensions de $H^j(\mathcal{F})$ ? C'est ici qu'intervient la nouvelle idée, ce qu'on a appelé le *groupe de Grothendieck* $K(Y)$. On considère: (1) l'ensemble $C(Y)$ des classes de $\mathcal{O}_Y$-Modules cohérents pour la relation d'isomorphisme; (2) le $\mathbf{Z}$-module $\mathbf{Z}^{(C(Y))}$ des combinaisons linéaires formelles des éléments de $C(Y)$ ; on note $[\mathcal{F}]$ la classe d'un $\mathcal{O}_Y$-Module $\mathcal{F}$ dans $C(Y)$ et $(e_{[\mathcal{F}]})$ la base canonique indexée par $C(Y)$ ; (3) le sous-$\mathbf{Z}$-module $S(Y)$ engendré par les éléments $e_{[\mathcal{F}]} - e_{[\mathcal{F}']} - e_{[\mathcal{F}'']}$ pour toutes les suites exactes

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}' \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}'' \longrightarrow 0 \tag{2}$$

de $\mathcal{O}_Y$-Modules cohérents. Alors $K(Y)$ est défini par

$$K(Y) = \mathbf{Z}^{(C(Y))}/S(Y). \tag{3}$$

On reconnaît la construction usuelle d'un objet "universel" ; toute *application* $\varphi : C(Y) \to G$ dans un groupe commutatif $G$, telle que

$$\varphi([\mathcal{F}]) = \varphi([\mathcal{F}']) + \varphi([\mathcal{F}'']) \tag{4}$$

pour toute suite exacte (2), se factorise uniquement en

$$C(Y) \xrightarrow{e} \mathbf{Z}^{(C(Y))} \xrightarrow{\gamma_Y} K(Y) \xrightarrow{\psi} G \tag{5}$$

où $e : [\mathcal{F}] \to e_{[\mathcal{F}]}, \gamma_Y$ est l'homomorphisme canonique et $\psi$ un *homomorphisme de groupes* .

La somme alternée

$$\sum_q (-1)^q \gamma_Y(e([R^q f_*(\mathcal{F})])) \tag{6}$$

a alors un sens et ne dépend que de la classe $[\mathcal{F}]$ dans $C(X)$. Si on l'écrit $\varphi([\mathcal{F}])$, la relation (4) est conséquence de la suite exacte de cohomologie

$$\cdots \longrightarrow R^q f_*(\mathcal{F}') \to R^q f_*(\mathcal{F}) \longrightarrow R^q f_*(\mathcal{F}'') \longrightarrow R^{q+1} f_*(\mathcal{F}') \longrightarrow \cdots$$

qui n'a qu'un nombre fini de termes $\neq 0$. L'expression (6) s'écrit donc

$$f_!(\gamma_X(e([\mathcal{F}])))$$

où $f_! : K(X) \to K(Y)$ est un homomorphisme de groupes.

Il reste à définir un "caractère de Chern"

$$ch_X : K(X) \longrightarrow H^\bullet(X; \mathbf{Q})$$

qui soit un homomorphisme. Grothendieck utilise le fait que tout $\mathcal{O}_X$-Module cohérent $\mathcal{F}$ a une résolution *finie*

$$0 \longleftarrow \mathcal{F} \longleftarrow \mathcal{L}_0 \longleftarrow \mathcal{L}_1 \longleftarrow \cdots \longleftarrow \mathcal{L}_r \longleftarrow 0,$$

où les $\mathcal{O}_X$-Modules $\mathcal{L}_j$ sont localement libres ; les classes totales de Chern $c(\mathcal{L}_j)$ sont donc définies. On définit alors la classe de Chern totale

$$c(\mathcal{F}) = c(\mathcal{L}_0)c(\mathcal{L}_1)^{-1}c(\mathcal{L}_2)\cdots c(\mathcal{L}_r)^{(-1)^r}$$

dans l'anneau $H^\bullet(X;\mathbf{Q})$, et on en déduit $ch(\mathcal{F})$ par la formule usuelle.

Le théorème de Riemann-Roch-Grothendieck peut alors s'énoncer

$$ch_Y(f_!(x)) \smile td_Y = f_*(ch_X(x) \smile td_X) \tag{7}$$

pour tout élément $x \in K(X)$.

La démonstration de Grothendieck est complètement différente de celle de Hirzebruch, et de nature purement algébrique ; le morphisme $f$ est factorisé en $f = g \circ h$, où $h : X \to P^N \times Y$ est une immersion et $g : P^N \times Y$ est la seconde projection ; il faut naturellement prouver que $(g \circ h)! = g_! \circ h_!$. Le cas de la projection $g$ est facile, mais pour l'immersion $h$ il faut des arguments assez compliqués. Pour adapter la démonstration aux variétés complètes sans singularité sur un corps algébriquement clos de caractéristique quelconque, il faut remplacer $H^\bullet(X;\mathbf{Q})$ par $A(X) \otimes \mathbf{Q}$, où $A(X)$ est l'anneau des classes de cycles (anneau de Chow) et y définir des classes de Chern.

Je suis entré dans quelque détail pour montrer la richesse de l'imagination de Grothendieck. Il ne publia pas lui-même sa démonstration de (7), laissant ce soin à Borel et Serre, — qui avaient animé un séminaire à Princeton pour exposer cette preuve d'après des papiers fournis par Grothendieck —, premier exemple de ce qui allait devenir chez lui une coutume : poussé par les idées qui se pressaient en foule dans son esprit, il laissait souvent à ses collègues ou élèves le travail de leur mise au point dans tous les détails.

A peine prouvée sa version du théorème de Riemann-Roch, il allait s'embarquer dans une entreprise de tout autre envergure. Dans la conférence qu'il prononça au Congrès International d'Edimbourg en 1958, il mentionne pour la première fois le grand dessein qui va être au centre de ses préoccupations pendant dix ans : définir pour les variétés algébriques sur un corps de caractéristique $p > 0$ des groupes de cohomologie à coefficients dans un corps *de caractéristique* 0, ayant les propriétés énumérées par Weil en vue de prouver ses fameuses conjectures. Sans dévoiler encore les détails de la méthode qu'il envisageait pour y parvenir, Grothendieck conçoit qu'il lui faut pour cela procéder à une *refonte de toute la Géométrie algébrique* —semblable à celle que Weil lui-même avait dû faire dans ses "Foundations" en vue d'établir ses conjectures pour le cas particulier des courbes. Il en esquisse les traits principaux, qu'il allait développer dans les milliers de pages d'articles et de Séminaires que l'on connaît.

Depuis que Weil avait défini des "variétés abstraites" non plongées dans un espace projectif, les diverses définitions qu'on pouvait en donner reposaient sur une définition préalable des "variétés affines" que l'on "recollait" ensuite pour arriver aux variétés générales. Dans FAC, Serre avait observé qu'une "variété affine" $M$ définie initialement comme "ensemble algébrique" dans un espace $k^n$ (pour $k$ algébriquement clos) correspond biunivoquement à une $k$-algèbre réduite sur $M$. Inversement, une telle algèbre $A$ définit d'abord l'ensemble $M$, qu'on peut considérer comme ensemble des caractères $A \to k$, ou ensemble des idéaux maximaux de $A$ ; puis la topologie de $M$, ayant pour base d'ouverts les ensembles $D(f) = \{x \in M | f(x) \neq 0\}$ pour $f \in A$ ; et enfin le faisceau d'anneaux locaux $\mathcal{O}_M$, tel que $\Gamma(D(f), \mathcal{O}_M)$ soit l'anneau localisé $A_f$ pour tout $f \in A$.

Le "corps de base" $k$ ne joue dans cette définition qu'un rôle secondaire, et Serre avait remarqué qu'il suffit de supposer que $A$ est un anneau nœthérien dans lequel tout idéal premier est intersection d'idéaux maximaux. Kronecker avait déjà rêvé d'une géométrie algébrique qui serait "sur les entiers", et Weil avait attiré l'attention sur l'intérêt que présenterait une généralisation de ce genre dans sa conférence au Congrès International de Cambridge en 1950. Un pas vers une telle généralisation avait été fait par Chevalley et Nagata en 1955-56. Dans le Séminaire qu'il dirigea avec H. Cartan en 1955-56, Chevalley introduisit ce qu'il appelait des *schémas*, de nouveau par "recollement" de "schémas affines" ; ces derniers étaient à certain égards des généralisations des variétés affines de Serre, mais à d'autres égards ils en restreignaient la généralité. Le point de départ est encore une $k$-algèbre commutative $A$ sur un corps $k$ *quelconque*, mais $A$ est supposé intègre. Il n'est pas question de faisceaux, et le "schéma affine" $M$ défini par $A$ est l'ensemble des anneaux locaux $A_\mathfrak{p}$ pour tous les idéaux *premiers* de $A$, et non seulement les idéaux maximaux. La topologie ( "de Zariski") sur $M$ a alors pour ensembles fermés les ensembles $E(\mathfrak{a})$ correspondant à tous les idéaux $\mathfrak{a}$ de $A$, $E(\mathfrak{a})$ étant l'ensemble des anneaux locaux $A_\mathfrak{p}$ pour $\mathfrak{p} \supset \mathfrak{a}$. Nagata montra aussitôt après qu'on peut étendre toutes les définitions de Chevalley en remplaçant $k$ par un anneau de Dedekind.

Grothendieck avait suivi le Séminaire Cartan-Chevalley et connaissait le travail de Nagata sur ce qu'il appelait les "schémas arithmétiques". Il eut le mérite de voir que pour avoir une idée juste de ce que devait être la Géométrie algébrique, il fallait se débarrasser de *toutes* les restrictions qui figuraient dans ces diverses définitions. Il appela donc schéma affine le *spectre premier* $X = \mathrm{Spec}(A)$ d'un anneau commutatif *arbitraire* $A$, ensemble dont les éléments sont tous les idéaux premiers de $A$. La topologie sur $X$ a pour base d'ouverts les ensembles $D(f) = \{\mathfrak{p} | f \notin \mathfrak{p}\}$, pour $f$ parcourant $A$. Enfin, on définit $(X, \mathcal{O}_X)$ comme espace localement annelé en prenant le faisceau d'anneaux $\mathcal{O}_X$ tel que, pour tout $f \in A$, $\Gamma(D(f), \mathcal{O}_X) = A_f$ ;

la fibre au point $\mathfrak{p}$ de ce faisceau est l'anneau local $A_{\mathfrak{p}}$. La définition d'un *schéma*(*) quelconque est alors la plus générale possible : c'est un espace localement annelé $(X, \mathcal{O}_X)$, admettant une base d'ouverts (dits affines) $(U_\alpha)$ pour lesquels $(U_\alpha, \mathcal{O}_X | U_\alpha)$ est un schéma affine. Les schémas forment une catégorie quand on prend pour morphismes les morphismes d'espaces localement annelés ; les schémas affines en forment une sous-catégorie pleine, équivalente à l'opposée de la catégorie de tous les anneaux commutatifs.

Ces définitions avaient été esquissées par Grothendieck dans sa conférence de 1958. Il y soulignait deux caractères prédominants qu'il entendait donner à sa théorie. L'un était de mettre au premier plan l'étude des morphismes plutôt que celle des schémas : un schéma de "base" $S$ une fois fixé (et sur lequel on ne fait souvent aucune hypothèse particulière), les objets de l'étude sont les couples $(X, f)$ formés d'un schéma $X$ et d'un morphisme $f : X \rightarrow S$ ; on les appelle *S-schémas* ; un $S$-morphisme $(X, f) \rightarrow (Y, g)$ de $S$-schémas est alors un morphisme $h : X \rightarrow Y$ tel que $g \circ h = f$, de sorte que $S$ remplit le rôle des "corps de base" classiques. Un schéma peut être considéré comme un $S$-schéma pour $S = \mathrm{Spec}(\mathbf{Z})$. Si $S$ est le spectre d'un corps $K$ (réduit à un point), les $S$-schémas peuvent être appelés schémas algébriques sur $K$.

L'autre direction privilégiée par Grothendieck était l'extension aux schémas et le développement des techniques de cohomologie des faisceaux inaugurées par Serre. Il considère les groupes de cohomologie, non seulement des faisceaux cohérents sur un schéma, mais aussi ceux des faisceaux *quasi-cohérents* utilisés par P. Cartier dans sa thèse ; sur un schéma affine $\mathrm{Spec}(A)$, ils correspondent aux $A$-modules quelconques.

De 1959 à 1970, Grothendieck fut membre permanent de l'Institut des Hautes Etudes Scientifiques (IHES) qui venait d'être fondé ; il y anima un Séminaire où vinrent rapidement assister de nombreux élèves, auxquels ils distribuait généreusement des idées de recherche que suscitait sa théorie, et ne cessait de prodiguer conseils et suggestions. Pendant cette décennie, il poursuivit sous deux formes la publication de ses résultats. D'une part, les notions de base de la théorie étaient exposées sous forme didactique dans les Éléments de Géométrie algébrique (EGA) publiés par livraisons successives dans les Publications mathématiques de l'IHES. Simultanément, il développait les parties plus avancées de la théorie, soit dans des exposés assez succincts au Séminaire Bourbaki, soit dans son Séminaire de l'IHES, où

(*) Initialement Grothendieck appelait ces objets des "préschémas", les schémas étant des préschémas particuliers soumis à une condition de "séparation" analogue à celle de Serre dans FAC. Plus tard, il adopta la terminologie de "schémas séparés" pour ce qu'il avait d'abord appelé des schémas.

l'aide de collègues et d'élèves lui permettait d'entrer dans plus de détails. Son influence fut immédiate et immense sur les algébristes du monde entier. Déjà en 1962, dans sa conférence au Congrès International de Stockholm, Serre pouvait constater que la théorie des schémas était dès cette époque le cadre qui semblait le mieux adapté à toute la Géométrie algébrique.

Ce succès se comprend sans peine. Même dans les parties "élémentaires" de la théorie, le point de vue des schémas donne toujours l'impression d'être celui qui convient exactement à la question, que toutes les présentations antérieures ne font qu'obscurcir ou déformer. Je me bornerai dans les exemples qui suivent aux propriétés des schémas qui ne sont pas simplement des adaptations à peu près évidentes de notions classiques.

(I) En premier lieu, l'idée de *spécialisation* d'un point $x$ devient une notion topologique : $x'$ est spécialisation de $x$ si $x'$ appartient à l'adhérence $\overline{\{x\}}$. En particulier, toute partie fermée irréductible de $X$ est l'adhérence d'un point unique, son point *générique* ; cela permet des raisonnements de continuité (pour la topologie de Zariski) analogues à ceux des géomètres italiens pour les variétés complexes.

(II) La nouveauté peut-être la plus importante est l'existence, dans la catégorie des $S$-schémas, d'un "produit catégorique" $X \times_S Y$ pour deux $S$-schémas définis par des morphismes $f : X \to S$, $g : Y \to S$ : il existe alors deux $S$-morphismes $p_1 : X \times_S Y \to X$, $p_2 : X \times_S Y \to Y$ tels que $f \circ p_1 = g \circ p_2$ et pour deux $S$-morphismes $u : T \to X, v : T \to Y$, il y a un unique $S$-morphisme $w : T \to X \times_S Y$ tel que $u = p_1 \circ w$ et $v = p_2 \circ w$. Pour des schémas affines $S = \mathrm{Spec}(A)$, $X = \mathrm{Spec}(B)$, $Y = \mathrm{Spec}(C)$, on a $X \times_S Y = \mathrm{Spec}(B \otimes_A C)$ ; pour $X$ quelconque, $S = \mathrm{Spec}(A), Y = \mathrm{Spec}(B)$, on écrit $X \otimes_A B$ en place de $X \times_S Y$. Cela donne naissance à la technique fondamentale du "changement de base" général : étant donné un morphisme $S' \to S$, on note $X_{(S')}$ le produit $X \times_S S'$ et $f_{(S')}$ le morphisme $p_2 : X_{(S')} \to S'$ ; on dit que le $S'$-schéma $X_{(S')}$ et le morphisme $f_{(S')}$ se déduisent de $X$ et $f$ par le changement de base $S' \to S$. Lorsque $S$ et $S'$ sont des spectres de corps, on retrouve la classique "extension du corps de base". Mais l'idée est applicable à une multitude d'autres situations et fournit un outil d'une extraordinaire flexibilité, dont nous nous bornerons à donner quelques exemples.

(III) Pour tout point $s \in S$, soit $\mathcal{O}_s$ l'anneau local, fibre de $\mathcal{O}_S$ en ce point, et $\kappa(s) = \mathcal{O}_s/\mathfrak{m}_s$ son corps résiduel. Pour tout $S$-schéma $X$, de morphisme structural $f : X \to S$, le schéma $X_s = X \times_S \mathrm{Spec}(\kappa(s))$ s'identifie en tant qu'espace topologique à la fibre $f^{-1}(s)$, sous-espace de $X$.

(IV) Un $S$-schéma de type fini $X$ peut donc être considéré comme une "famille de schémas algébriques" $X_s$ sur les corps $\kappa(s)$, indexée par $S$; on peut se demander s'il est possible de démontrer des propriétés de $X$ à partir de celles des $X_s$ ; il faut pour cela une condition qui "relie" entre eux les $X_s$. A cet effet, Grothendieck a beaucoup utilisé la notion de *platitude* du morphisme $f$ : issue de l'algèbre homologique, elle avait été mise en valeur par Serre, qui avait montré son intérêt en algèbre commutative. Elle a permis à Grothendieck de définir des types de morphismes plus particuliers, les morphismes lisses (qui correspondent à l'idée de fibration locale) et les morphismes étales (qui correspondent à l'idée d'isomorphisme local) ; ils jouent un rôle considérable dans toute la théorie.

(V) Si l'on veut étudier ce qui se passe non seulement dans la fibre $f^{-1}(s)$ mais dans un voisinage de cette fibre, il suffit de remplacer $\mathrm{Spec}(\kappa(s))$ par $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_s)$ dans le changement de base. En effet, $\mathcal{O}_s$ peut être considéré comme limite inductive des anneaux $A_\lambda$ des ouverts affines $U_\lambda$ contenant $s$ ; moyennant certaines conditions de finitude, Grothendieck a développé une technique permettant de conclure d'une propriété de $X \times_S \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_s)$ à la même propriété pour $f^{-1}(U_\lambda)$ pour un indice $\lambda$ convenable. Cette même technique de "limite inductive" permet aussi de ramener les propriétés d'un $S$-schéma quelconque à celles de schémas sur une $\mathbb{Z}$-algèbre de type fini, réalisant ainsi le vieux rêve de Kronecker, et ramenant beaucoup de propriétés de $S$-schémas au cas où $S$ est nœthérien.

(VI) Si $S = \mathrm{Spec}(A)$ où $A$ est un anneau local, la théorie des $S$-schémas a des aspects plus simples lorsque $A$ est complet, ou hensélien, ou un anneau de valuation discrète ; les changements de base $\mathrm{Spec}(A') \to \mathrm{Spec}(A)$ où $A'$ a l'une de ces propriétés, sont très utiles dans les démonstrations.

(VII) Comme les anneaux commutatifs qui interviennent dans la théorie des schémas sont quelconques, les anneaux locaux $\mathcal{O}_s$ pour $s \in \mathrm{Spec}(A)$ peuvent avoir des éléments nilpotents, qui jusque là avaient été soigneusement éliminés de la Géométrie algébrique. Dès 1958, Grothendieck insistait au contraire sur l'utilité de les considérer : ils donnent accès à ce qui remplace, en Géométrie algébrique "abstraite", les propriétés "infinitésimales" de la Géométrie algébrique classique. Par exemple, si $A$ est un anneau local d'idéal maximal $\mathfrak{m}$, et $S = \mathrm{Spec}(A)$, on associe à un $S$-schéma $X$ de type fini sa "réduction modulo $\mathfrak{m}$" $X_0 = X \otimes_A (A/\mathfrak{m})$, fibre de $f$ au-dessus de l'unique point fermé $\mathfrak{m}$ de $S$, et qui est donc un "schéma algébrique" sur le corps $A/\mathfrak{m}$. On cherche à ramener l'étude de $X$ à celle de $X_0$. Pour cela, on considère les schémas $X_n = X \otimes_A (A/\mathfrak{m}^{n+1})$, qui ont même espace topologique sous-jacent que $X_0$ et peuvent être considérés comme des