

Danilo Capecchi
Giuseppe Ruta

La scienza delle costruzioni in Italia nell'Ottocento

Un'analisi storica dei fondamenti
della scienza delle costruzioni

 Springer

UNITEXT

La scienza delle costruzioni in Italia nell'Ottocento

Un'analisi storica dei fondamenti della scienza delle costruzioni

Danilo Capecchi • Giuseppe Ruta

La scienza delle costruzioni in Italia nell'Ottocento

Un'analisi storica dei fondamenti
della scienza delle costruzioni

 Springer

Danilo Capecchi
Dipartimento di
Ingegneria Strutturale e Geotecnica
Università La Sapienza, Roma

Giuseppe Ruta
Dipartimento di
Ingegneria Strutturale e Geotecnica
Università La Sapienza, Roma

UNITEXT – Collana di Ingegneria

ISBN 978-88-470-1713-9

ISBN 978-88-470-1714-6 (eBook)

DOI 10.1007-978-88-470-1714-6

Springer Milan Dordrecht Heidelberg London New York

© Springer-Verlag Italia 2011

Quest'opera è protetta dalla legge sul diritto d'autore e la sua riproduzione è ammessa solo ed esclusivamente nei limiti stabiliti dalla stessa. Le fotocopie per uso personale possono essere effettuate nei limiti del 15% di ciascun volume dietro pagamento alla SIAE del compenso previsto dall'art. 68. Le riproduzioni per uso non personale e/o oltre il limite del 15% potranno avvenire solo a seguito di specifica autorizzazione rilasciata da AIDRO, Corso di Porta Romana n. 108, Milano 20122, e-mail segreteria@aidro.org e sito web www.aidro.org. Tutti i diritti, in particolare quelli relativi alla traduzione, alla ristampa, all'utilizzo di illustrazioni e tabelle, alla citazione orale, alla trasmissione radiofonica o televisiva, alla registrazione su microfilm o in database, o alla riproduzione in qualsiasi altra forma (stampata o elettronica) rimangono riservati anche nel caso di utilizzo parziale. La violazione delle norme comporta le sanzioni previste dalla legge.

L'utilizzo in questa pubblicazione di denominazioni generiche, nomi commerciali, marchi registrati, ecc. anche se non specificatamente identificati, non implica che tali denominazioni o marchi non siano protetti dalle relative leggi e regolamenti.

9 8 7 6 5 4 3 2 1

Layout copertina: Beatrice E. (Milano)

Impaginazione: PTP-Berlin, Protago TeX-Production GmbH, Germany (www.ptp-berlin.eu)

Stampa: Grafiche Porpora, Segrate (MI)

Stampato in Italia

Springer-Verlag Italia S.r.l., Via Decembrio 28, I-20137 Milano

Springer-Verlag fa parte di Springer Science+Business Media (www.springer.com)

Prefazione

Scienza delle costruzioni è il titolo dato nel 1877 da Giovanni Curioni, professore nella Scuola di applicazione per ingegneri di Torino, al suo corso di Meccanica applicata alle costruzioni. La scelta rifletteva un mutamento intervenuto nell'insegnamento delle discipline strutturali in Italia a seguito della costituzione delle Scuole di applicazione di ingegneria con la riforma Casati del 1859. Sulla scia del modello dell'École polytechnique, alla figura dell'ingegnere puramente tecnico si voleva sostituire quella dell'ingegnere "scientifico", inserendo nell'insegnamento le matematiche "sublimi" e le moderne teorie dell'elasticità. La disciplina che nasceva voleva rappresentare una sintesi tra gli studi teorici di meccanica del continuo, portati avanti principalmente dagli elasticisti francesi, e la meccanica delle strutture, che aveva cominciato a svilupparsi nelle scuole italiana e tedesca. Sotto questo aspetto si trattava di un approccio senza equivalenti in Europa, dove i contenuti della meccanica del continuo e quelli della meccanica delle strutture erano, e saranno, invece insegnati in due discipline diverse.

Negli anni '60 del Novecento *Scienza delle costruzioni* assume un senso diverso per due motivi. Intanto la disciplina fondata da Curioni si divide in due filoni, denominati *Scienza delle costruzioni* e *Tecnica delle costruzioni*, relegando a quest'ultima gli aspetti più applicativi. Poi gli sviluppi tecnologici richiedono lo studio di materiali con comportamenti più complessi di quello elastico lineare, c'è l'esigenza di tutelarsi da fenomeni di fatica e di frattura, diventa importante l'analisi dinamica, sia per le applicazioni industriali (vibrazioni) sia per quelle civili (vento, terremoti). Infine l'introduzione dei moderni codici strutturali da una parte ha reso obsolete le sofisticate tecniche di calcolo manuale messe a punto tra fine Ottocento e primo Novecento, da un'altra parte ha reso necessaria una maggiore conoscenza degli aspetti teorici, specie della meccanica del continuo. Questa necessità di approfondimento teorico ha determinato inevitabilmente una deriva di alcuni studiosi verso la fisica matematica. Tutto ciò rende problematica una definizione moderna di *Scienza delle costruzioni*.

Per superare tale difficoltà, nel nostro lavoro abbiamo deciso di usare il termine *Scienza delle costruzioni* con un senso abbastanza ampio, per indicare la parte teorica dell'ingegneria delle costruzioni. Ci limitiamo a trattare la scienza delle costruzioni in Italia per due motivi, uno di carattere celebrativo richiestoci dal corpo accademico

nazionale, l'altro di carattere teorico che tiene conto della mancanza di conoscenza degli sviluppi della disciplina in Italia, che è pur sempre un'importante nazione europea. Il periodo scelto, l'Ottocento, è quello in cui sono nate e sono giunte a maturazione gran parte delle problematiche della scienza delle costruzioni, anche se l'attenzione era concentrata sui materiali a comportamento elastico lineare e a azioni esterne di tipo statico.

I testi di storia della scienza delle costruzioni esistenti, tra cui uno dei più completi ci sembra quello di Timoshenko, *History of strength of materials*, si concentrano sulle scuole francese, tedesca e inglese, trascurando in larga parte quella italiana. Anche il testo di Benvenuto, *An introduction to the history of structural mechanics*, che è molto attento ai contributi italiani, trascura in larga parte l'Ottocento. Solo recentemente Clifford Truesdell, matematico e storico della meccanica, nel suo *Classical field theories of mechanics* ha messo in evidenza gli importanti contributi degli scienziati italiani, rispolverando i nomi di Piola, Betti, Beltrami, Lauricella, Cerruti, Cesaro, Volterra, Castigliano, ecc.¹

Il libro tratta in larga parte dei fondamenti teorici della disciplina, partendo dalle origini della teoria moderna dell'elasticità e inquadrando la situazione italiana in quella europea, esaminando e commentando anche gli autori stranieri che hanno avuto un ruolo essenziale per gli sviluppi della meccanica dei corpi continui e delle strutture e delle tecniche di calcolo grafico. In quest'ottica abbiamo appena accennato a quelle problematiche "più applicative" che non hanno visto contributi importanti da parte degli studiosi italiani. Per esempio non abbiamo accennato a tutti gli studi sulle piastre che furono portati avanti, specie in Francia e Germania, e che fornirono spunti fondamentali anche per gli aspetti più generali della meccanica dei continui. Si pensi per esempio ai lavori sulle piastre di Kirchhoff, Saint Venant, Sophie Germain. Si pensi poi ai primi studi sulle sollecitazioni dinamiche nei corpi elastici di Navier, Saint Venant, Cauchy, Poncelet. Infine non abbiamo citato nessuno dei lavori sperimentali portati avanti specie in Inghilterra e Germania, tra cui quelli importanti anche dal punto di vista teorico sulla modalità di resistenza e rottura dei materiali.

Il libro è organizzato essenzialmente per autori. Questa scelta è stata resa necessaria dalla complessità del materiale elaborato. Prima di poter tentare una sintesi abbiamo ritenuto necessario fare un lavoro ermeneutico: riportare tutto il materiale originario in un unico linguaggio comprensibile al lettore moderno. Certamente anche questo lavoro implica una sintesi, non fosse altro per la scelta dei testi esaminati, ma si tratta di una sintesi di livello basso. A partire da questo libro altri potranno tentare una sintesi di livello più elevato, sia di storia interna in cui vengano evidenziati meglio i nessi tra le diverse concezioni dei vari scienziati, sia di storia esterna che spieghi le ragioni sociali dello sviluppo della scienza delle costruzioni.

Il libro va considerato come un lavoro di ricerca storica, perché gran parte dei contenuti o sono elaborazioni originali o riportano nostre elaborazioni pubblicate su riviste. Esso è diretto a tutti quei laureati in discipline scientifiche che vogliano approfondire gli sviluppi della fisica matematica nell'Ottocento italiano, e naturalmente agli ingegneri, ma anche agli architetti, che vogliano avere una visione più

¹ Riferimenti bibliografici precisi saranno dati nel corpo del testo.

globale e critica della disciplina che hanno studiato per anni. Può poi, naturalmente, essere di aiuto agli studiosi di storia della meccanica.

Vogliamo ringraziare Raffaele Pisano e Annamaria Pau per avere letto le bozze del libro e per i suggerimenti datici.

Considerazioni editoriali

Le figure che si riferiscono ai brani citati sono state tutte ridisegnate per consentirne una migliore lettura. Ci siamo mantenuti il più possibile vicino agli originali, che sono comunque riportati in appendice.

I simboli delle formule sono sempre quelli utilizzati dagli autori, salvo casi chiaramente individuabili.

Le traduzioni dei testi dal francese, inglese, tedesco e latino, riportate in appendice, sono il più possibile letterali, salvo brevi parti che, per renderle comprensibili, si sono dovute parafrasare riportandole all'italiano tecnico moderno.

Roma, ottobre 2010

Danilo Capecchi
Giuseppe Ruta

1	La scienza delle costruzioni nell'Ottocento	1
1.1	Teoria dell'elasticità e meccanica del continuo	1
1.1.1	Il modello molecolare classico	3
1.1.1.1	Le componenti della tensione	7
1.1.1.2	Il legame costitutivo	8
1.1.2	Le critiche dall'interno del modello molecolare classico	13
1.1.3	Le alternative al modello molecolare	17
1.1.3.1	L'approccio fenomenologico di Cauchy	18
1.1.3.2	L'approccio energetico di Green	23
1.1.3.3	Le varie teorie dell'elasticità	25
1.1.4	Il modello molecolare di Bravais	26
1.1.5	Il modello molecolare di Voigt	28
1.1.6	La meccanica del continuo nella seconda metà dell'Ottocento	32
1.2	La teoria delle strutture	36
1.2.1	I sistemi iperstatici	38
1.2.2	Le prime soluzioni. Il metodo delle forze di Navier	41
1.2.3	Il metodo degli spostamenti	44
1.2.4	I metodi energetici	48
1.2.4.1	Applicazioni	51
1.2.5	Perfezionamento del metodo delle forze. Lévy e Mohr	56
1.2.5.1	L'equazione di congruenza "globale" di Lévy	57
1.2.5.2	Mohr e il principio dei lavori virtuali	59
1.2.6	Sviluppi alla fine dell'Ottocento	67
1.3	Il contributo italiano	67
1.3.1	I primi studi di teoria dell'elasticità	71
1.3.2	La meccanica del continuo	72
1.3.3	La meccanica delle strutture	74

	1.3.3.1	Luigi Federico Menabrea e Alberto Castigliano . . .	75
	1.3.3.2	I sistemi elastici articolati di Valentino Cerruti . . .	76
2		Gabrio Piola e la meccanica del continuo	83
	2.1	Introduzione	83
	2.2	I principi della meccanica di Piola	86
	2.3	Gli scritti di meccanica del continuo	89
	2.3.1	1833. <i>Meccanica de' corpi naturalmente estesi</i>	93
	2.3.2	1836. <i>Nuova analisi</i>	98
	2.3.3	1848. <i>Intorno alle equazioni fondamentali</i>	102
	2.3.4	Il principio di solidificazione e le forze generalizzate	108
	2.3.5	I tensori della tensione e il teorema di Piola	111
	2.3.6	I tensori della tensione di Piola-Kirchhoff	114
3		Betti, Beltrami e le loro scuole	117
	3.1	Enrico Betti	117
	3.1.1	Il contributo di Betti alla teoria dell'elasticità	119
	3.1.2	I principi della teoria dell'elasticità	122
	3.1.2.1	La deformazione infinitesima	122
	3.1.2.2	Il potenziale delle forze elastiche	124
	3.1.2.3	Il principio dei lavori virtuali	125
	3.1.3	Il teorema del lavoro mutuo	126
	3.1.4	Il calcolo degli spostamenti	129
	3.1.4.1	Dilatazione unitaria e rotazioni infinitesime	129
	3.1.4.2	Gli spostamenti	131
	3.1.5	Il problema di Saint Venant	132
	3.2	Eugenio Beltrami	135
	3.2.1	La geometria non euclidea	138
	3.2.2	<i>Sulle equazioni generali della elasticità</i>	140
	3.2.3	Lavori sulla teoria elettromagnetica di Maxwell	143
	3.2.4	Le equazioni di congruenza	147
	3.2.5	Le equazioni di Beltrami-Michell	149
	3.2.6	Lavori di meccanica delle strutture	150
	3.2.6.1	La memoria sulla resistenza dei materiali	150
	3.2.6.2	L'equilibrio delle membrane	153
	3.3	Gli allievi	155
	3.3.1	La scuola pisana	155
	3.3.2	Gli allievi di Beltrami	163
4		I teoremi di minimo di Menabrea e Castigliano	171
	4.1	Le scuole di applicazione di ingegneria	171
	4.1.1	Le prime scuole di applicazione di ingegneria	174
	4.1.1.1	La Scuola di applicazione a Torino e il Regio istituto tecnico a Milano	175
	4.1.1.2	La Scuola di applicazione di Napoli	177

4.1.1.3	La Scuola di applicazione di Roma	177
4.1.1.4	Curricula studiorum	178
4.2	La didattica della scienza delle costruzioni	181
4.3	Luigi Federico Menabrea	184
4.3.1	1858. <i>Nouveau principe sur la distribution des tensions</i>	187
4.3.1.1	Considerazioni sulla dimostrazione	188
4.3.1.2	Commenti immediati al lavoro del 1858	190
4.3.1.3	Le origini del principio di Menabrea	193
4.3.2	1868. <i>Étude de statique physique</i>	196
4.3.2.1	La prova “induttiva” del principio	199
4.3.3	1875. <i>Sulla determinazione delle tensioni e delle pressioni ne’ sistemi elastici</i>	200
4.3.4	L’applicazione del principio di elasticità da parte di Rombaux	203
4.3.4.1	Il contenuto del libro	203
4.3.4.2	La questione della priorità	205
4.4	Alberto Castigliano	206
4.4.1	1873. <i>Intorno ai sistemi elastici</i>	209
4.4.1.1	Il metodo delle deformazioni	209
4.4.1.2	Il minimo del lavoro molecolare	211
4.4.1.3	Le strutture miste	213
4.4.1.4	Applicazioni	216
4.4.2	1875. <i>Intorno all’equilibrio dei sistemi elastici</i>	219
4.4.2.1	Sistemi non semplicemente articolati	220
4.4.3	1875. <i>Nuova teoria intorno all’equilibrio dei sistemi elastici</i>	221
4.4.3.1	Il teorema di minimo del lavoro di deformazione come corollario	222
4.4.3.2	Sistemi qualunque	223
4.4.4	1879. <i>Théorie de l’équilibre des systèmes élastiques et ses applications</i>	225
4.4.4.1	I sistemi inflessi	228
4.4.4.2	Il legame costitutivo	229
4.4.4.3	Applicazioni. Il ponte sulla Dora	230
4.4.5	Un concetto mancato: l’energia complementare elastica	234
5	La statica grafica in Italia	239
5.1	La statica grafica	239
5.2	La statica grafica e il calcolo vettoriale	243
5.3	I contributi di Clerk Maxwell e Culmann	245
5.3.1	Le figure reciproche secondo Clerk Maxwell	246
5.3.2	La <i>Graphische Statik</i> di Culmann	251
5.4	Il contributo di Luigi Cremona	260
5.4.1	Il poligono funicolare e il poligono delle forze come figure reciproche	262

5.4.1.1	Il poligono funicolare e il poligono delle forze	262
5.4.1.2	La polarità nulla	266
5.4.1.3	Reciprocità tra il poligono funicolare e il poligono delle forze	269
5.4.1.4	Il diagramma di Cremona	271
5.4.2	Il corso di Statica grafica	276
5.4.3	L'eredità di Cremona	277
5.4.4	Carlo Saviotti	278
5.4.5	Il superamento del maestro	284
Appendice A. La legge Casati		287
Appendice B. Indice del testo di Saviotti		291
Appendice C. Originali delle figure		295
Appendice D. Traduzioni		301
D.1	Brani del Capitolo 1	301
D.2	Brani del Capitolo 2	317
D.3	Brani del Capitolo 3	320
D.4	Brani del Capitolo 4	322
D.5	Brani del Capitolo 5	328
Bibliografia		335
Indice degli autori		353

Fino al 1820 per il comportamento elastico dei materiali si disponeva di una teoria inadeguata della flessione, una teoria errata della torsione e della definizione del modulo di Young. Erano stati fatti studi su elementi monodimensionali, come le travi e le aste, e bidimensionali, come le piastre sottili (vedi per esempio i lavori di Sophie Germain). Da allora cominciano gli studi sui solidi elastici tridimensionali che portano la teoria dell'elasticità dei continui tridimensionali a diventare una delle più studiate teorie della fisica matematica ottocentesca. In pochi anni si archiviano definitivamente gran parte dei problemi irrisolti sulle travi e le piastre.

In questo capitolo riportiamo brevemente una sintesi degli studi sui solidi tridimensionali, concentrando l'attenzione sulla teoria dei legami costitutivi, che è la parte della teoria dell'elasticità di maggior contenuto fisico e che è stata oggetto di maggiore dibattito. Si fa un confronto tra gli studi effettuati in Italia e quelli nel resto d'Europa.

1.1

Teoria dell'elasticità e meccanica del continuo

La teoria dell'elasticità ha origini antiche. Gli storici della scienza, pressati dall'esigenza di fornire una data *a quo*, rimandano normalmente a *Lectures de potentia restitutiva* di Robert Hooke del 1678 [189]. È possibile discutere questa data, ma per il momento la accettiamo perché non è nei nostri scopi una ricostruzione storicamente accurata degli albori della teoria dell'elasticità; ci limitiamo solo a segnalare che Hooke dovrebbe dividere l'onore della primogenitura almeno con Edme Mariotte [226]. Hooke e Mariotte studiarono problemi classificabili come ingegneristici: lo spostamento di punto di una trave, la sua curvatura, la deformazione di una molla, ecc.

Le spiegazioni *per causas* dell'elasticità si possono poi far partire dalla *Quaestio* 31 dell'*Opticks* di Newton del 1704 [266], in cui viene discussa la costituzione atomica della materia. Concezioni non atomistiche verranno sviluppate nel Settecento facendo riferimento specialmente al concetto di etere (per qualche dettaglio

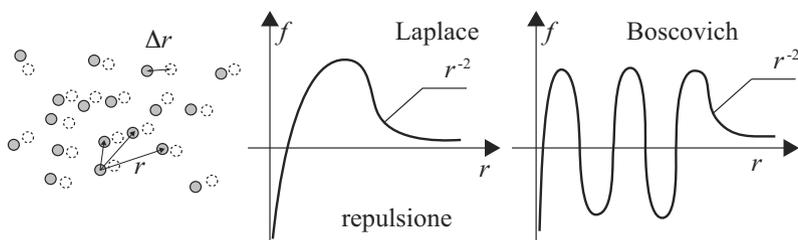


Figura 1.1 Modello molecolare: la forza f tra molecole funzione della distanza r

rimandiamo alla letteratura [26]). Nei primi anni dell'Ottocento la teoria dell'elasticità era intimamente connessa a “teorie molecolari” (o corpuscolari) particolari, quali quella di Laplace [209]¹ che perfeziona l'approccio di Newton, e considera la materia formata da piccoli corpi, dotati di estensione e massa (ipotesi successivamente sostituita con quella di punto materiale), o quella di Boscovich [46] secondo cui i costituenti la materia sono puri centri di forza, privi di estensione ma dotati di massa. I corpuscoli si attirano con forze dipendenti dalla loro distanza mutua: repulsive a breve distanza, attrattive a distanza maggiore, secondo quanto illustrato dalla Figura 1.1.

Va subito detto che non è stata solo l'ingegneria ad avere influenzato lo sviluppo della teoria dell'elasticità; un'analisi storica, seppure poco accurata, mostra che tali ricerche erano legate anche al tentativo di fornire un'interpretazione meccanicistica della natura. Secondo tale interpretazione ogni fenomeno fisico deve essere spiegato con le leggi della meccanica corpuscolare: la materia ha una struttura discreta e anche lo spazio è pervaso da particelle sottilissime dotate di proprietà peculiari, che vanno a formare l'*etere*. Tutti i fenomeni fisici si propagano nello spazio da una particella di etere a quella immediatamente vicina per mezzo di urti o forze di attrazione o repulsione. Questo punto di vista permette di superare le difficoltà del concetto di azione a distanza: in che modo – si chiedevano i fisici del tempo – due corpi possono interagire, per esempio attrarsi, senza l'intervento di un mezzo interposto? A ogni fenomeno fisico corrisponde uno stato di tensione dell'etere, propagato per contatto.

Con gli inizi dell'Ottocento si sentì la necessità di caratterizzare quantitativamente il comportamento elastico dei corpi e nacque la teoria matematica dell'elasticità. Essa risulta fondamentale per una descrizione precisa del mondo fisico, in particolare per comprendere meglio il fenomeno della propagazione delle onde luminose attraverso l'etere. Le scelte dei fisici furono fortemente condizionate dalla matematica in voga in quel periodo, cioè dal calcolo differenziale e integrale. Esso presuppone il continuo matematico e ha quindi qualche difficoltà a sposarsi con il modello corpuscolare discreto, ormai diventato dominante.

La maggior parte degli scienziati adottò un approccio di compromesso che oggi può venire interpretato come una tecnica di omogeneizzazione. I corpi materiali, dotati di una finissima struttura corpuscolare, sono associati a un continuo mate-

¹ vol. 4, pp. 349-350.

matico C , come potrebbe essere un solido della geometria euclidea. Le variabili di spostamento sono rappresentate da funzioni \mathbf{u} sufficientemente regolari definite in C , che assumono valori significativi solo per quei punti P che sono anche posizioni di corpuscoli. Le derivate delle funzioni \mathbf{u} rispetto alle variabili spaziali e temporali hanno anche esse significato solo per i punti P . Le forze interne scambiate tra i corpuscoli, all'inizio pensate come concentrate, vengono sostituite dai loro valori medi che sono attribuiti a tutti i punti di C , diventando così tensioni σ . Altri scienziati rinunciarono al modello fisico corpuscolare tenendolo presente solo sullo sfondo. Essi fondarono le loro teorie direttamente sul continuo, i cui punti hanno adesso tutti significato fisico. Sul continuo sono definiti sia gli spostamenti sia le tensioni, come era già stato fatto nel Settecento da Euler e Lagrange per i fluidi. Qualche scienziato oscillava tra i due approcci: tra di essi Augustin Cauchy (ma Gabrio Piola si trovava in una posizione simile) che, mentre studiava la distribuzione delle forze interne dei corpi solidi, sistematizzava l'analisi matematica, confrontandosi con le diverse concezioni di infinito e infinitesimo, di discreto e continuo. Le sue oscillazioni nell'analisi matematica si ripercossero sui suoi studi sulla costituzione della materia [146, 145].

Nel seguito presentiamo con qualche dettaglio e senso storico quanto abbiamo sopra appena delineato, parlando dei diversi approcci corpuscolari e dell'approccio continuista facendo riferimento principalmente al legame tra le grandezze interne di forza e spostamento, tra tensioni e deformazioni, ovvero al legame costitutivo. Altre problematiche della teoria dell'elasticità, sempre nell'ambito dei continui, saranno accennate in seguito, per dedicare infine diversi paragrafi alla teoria dell'elasticità dei sistemi discreti in generale e delle strutture formate da travi in particolare.

1.1.1

Il modello molecolare classico

Le teorie dell'elasticità di inizio Ottocento si basavano su differenti ipotesi corpuscolari, introdotte quasi contemporaneamente da Fresnel, Navier e Cauchy [167, 263, 80, 81]. Gli scienziati francesi adottano per i corpuscoli l'unico termine di *molecola*, che rimarrà a lungo nella letteratura scientifica europea, affiancato spesso da *atomo*, senza che i due termini abbiano un significato necessariamente diverso, almeno fino a quando non saranno diffusi gli studi dei chimici sulla costituzione della materia e i termini molecola e atomo assumeranno un significato tecnico preciso che ne differenzierà gli ambiti di applicazione.

Fresnel studiò la propagazione della luce nell'etere, pensato formato da punti materiali che si scambiano forze elastiche. In un lavoro del 1820 ottenne risultati molto interessanti, come il teorema:

Tant qu'il ne s'agit que de petits déplacements, et quelle que soit la loi des forces que les molécules du milieu exercent les unes sur les autres, le déplacement d'une molécule dans une direction quelconque produit une force répulsive égale en grandeur et en direction à

la résultante des trois forces répulsive produites par trois déplacements rectangulaires de cette molécule égaux aux composants statiques du premier déplacement.

Ce principe, presque évident par son énoncé même, peut se démontrer de la manière suivante [167].² (D.1.1)

Questo teorema sulle forze che si destano tra le molecole, «presque évident par son énoncé même», venne ripresentato da Cauchy in un'appendice al suo celebre articolo sulla tensione [82],³ dove è riportato il riferimento esplicito a Fresnel.

Il primo lavoro sistematico sull'equilibrio e il moto di corpi tridimensionali elastici è comunque di Navier, che nel 1821 lesse all'*Académie des sciences* di Parigi una memoria [263] pubblicata solo nel 1827. Nel lavoro di Navier, personaggio classificato spesso come ingegnere ma assai interessato agli aspetti teorici della meccanica, non era presente il concetto di tensione, che sarà determinante per la meccanica applicata alle costruzioni sviluppata in seguito.

Navier, riallacciandosi esplicitamente alla *Mécanique analytique* di Lagrange [202, 204], scriveva le equazioni locali di equilibrio delle forze agenti su un corpo elastico, pensato come un aggregato di punti materiali che si attirano o si respingono con una forza elastica variabile linearmente con lo spostamento tra i punti:

On regarde un corps solide élastique comme un assemblage de molécules matérielles placées à des distances extrêmement petites. Ces molécules exercent les unes sur les autres deux actions opposées, savoir, une force propre d'attraction, et une force de répulsion due au principe de la chaleur. Entre une molécule M , et l'une quelconque M' des molécules voisines, il existe une action P , qui est la différence de ces deux forces. Dans l'état naturel du corps, toutes les actions P sont nulles, ou se détruisent réciproquement, puisque la molécule M est en repos. Quand la figure du corps a été changée, l'action P a pris une valeur différente Π , et il y a équilibre entre toutes les forces Π et les forces appliquées au corps, par lesquelles le changement de figure a été produit [263].⁴ (D.1.2)

Detti X, Y, Z le forze esterne per unità di volume, ϵ una costante (il modulo di elasticità trasversale) e x, y, z lo spostamento di un punto P di coordinate iniziali a, b, c , le equazioni di bilancio di Navier [263]⁵ sono:

$$\begin{aligned} -X &= \epsilon \left(3 \frac{d^2x}{da^2} + \frac{d^2x}{db^2} + \frac{d^2x}{dc^2} + 2 \frac{d^2y}{da db} + 2 \frac{d^2z}{da dc} \right) \\ -Y &= \epsilon \left(\frac{d^2y}{db^2} + 3 \frac{d^2y}{da^2} + \frac{d^2y}{dc^2} + 2 \frac{d^2x}{da db} + 2 \frac{d^2z}{db dc} \right) \\ -Z &= \epsilon \left(\frac{d^2z}{db^2} + \frac{d^2z}{dc^2} + 3 \frac{d^2z}{da^2} + 2 \frac{d^2x}{da dc} + 2 \frac{d^2y}{db dc} \right). \end{aligned}$$

Navier le ottenne tramite sia l'equilibrio diretto sia il principio dei lavori virtuali; con quest'ultimo metodo riuscì a scrivere in modo semplice anche le condizioni al

² pp. 344-345.

³ pp. 79-81.

⁴ pp. 375-376.

⁵ p. 384.

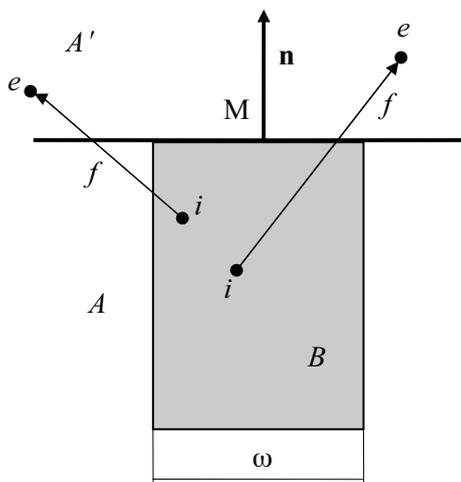


Figura 1.2 La tensione secondo Poisson

contorno. Seguì l'approccio, già accennato, comune a tutti gli scienziati francesi del secolo XIX, secondo cui i corpi elastici sono pensati discreti quando si vuole studiarne l'equilibrio, mentre sono pensati continui quando si tratta di descriverne la geometria e di ottenere relazioni matematiche semplici, sostituendo le sommatorie con integrali.⁶

Nel mondo accademico francese il modello molecolare di Navier divenne dominante anche per l'influenza dell'insegnamento di Laplace, che aveva adottato e perfezionato il modello newtoniano di materia formata da corpuscoli che si scambiano forze. Il primo ottobre 1827 Poisson e Cauchy presentarono all'*Académie des sciences* di Parigi due memorie simili tra loro,⁷ in cui si riconsiderava il modello molecolare di Navier. Poisson diede contributi determinanti in questo campo; in due memorie lette all'*Académie des sciences* di Parigi il 14 aprile 1828 [289] e il 12 ottobre 1829 [290] ne esplicitava le assunzioni principali:

Les molécules de tous les corps sont soumises à leur attraction mutuelle et à la répulsion due à la chaleur. Selon que la première de ces deux forces est plus grande ou moindre que la seconde, il en résulte entre deux molécules une force attractive ou répulsive; mais dans les deux cas, cette résultante est une fonction de la distance d'une molécule à l'autre dont la loi nous est inconnue; on sait seulement que cette fonction décroît d'une manière très rapide, et devient insensible dès que la distance a acquis une grandeur sensible. Toutefois nous supposons que le rayon d'activité des molécules est très-

⁶ La difficoltà di sostituire le sommatorie con gli integrali è stata oggetto di molti commenti degli studiosi francesi, specie Poisson e Cauchy.

⁷ Si confronti [264], pp. clv, clix. La memoria di Cauchy apparirà dapprima col titolo *Mémoire sur l'équilibre et le mouvement d'un système de points matériels sollicités par forces d'attraction ou de répulsion mutuelle* [84]. Quella di Poisson apparirà col titolo *Note sur les vibrations des corps sonores* [288].

grand par rapport aux intervalles qui les séparent, et nous admettrons, en outre, que le décroissement rapide de cette action n'a lieu que quand la distance est devenue la somme d'un très-grand nombre de ces intervalles [289].⁸ (D.1.3)

E introduceva la tensione:

[...] soit M un point situé dans l'intérieur du corps, à une distance sensible de la surface. Par ce point menons un plan qui partage le corps en deux parties, et que nous supposerons horizontal [...]. Appelons A la partie supérieure et A' la partie inférieure, dans laquelle nous comprendrons les points matériels appartenant au plan même. Du point M comme centre, décrivons une sphère qui comprenne un très-grand nombre de molécules, mais dont le rayon soit ce-pendant insensible par rapport au rayon d'activité des forces moléculaires. Soit ω l'aire de sa section horizontale; sur cette section élevons dans A un cylindre vertical, dont la hauteur soit au moins égale au rayon d'activité des molécules; appelons B ce cylindre: l'action des molécules de A' sur celles de B , divisée par ω , sera la *pression* exercée par A' sur A , rapportée à l'unité de surface et relative au point M [289].⁹ (D.1.4)

Per i materiali isotropi Cauchy [84]¹⁰ e Poisson [289],¹¹ poste X, Y, Z le forze per unità di massa e a una costante di elasticità, ottengono relazioni analoghe a quelle di Navier:

$$\begin{aligned} X - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{2}{3} \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} + \frac{2}{3} \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial x} + \frac{1}{3} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{3} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) &= 0 \\ Y - \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + a^2 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{2}{3} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{2}{3} \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial y} + \frac{1}{3} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1}{3} \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) &= 0 \\ Z - \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + a^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{2}{3} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + \frac{2}{3} \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z} + \frac{1}{3} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{3} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) &= 0. \end{aligned}$$

Nel seguito mostreremo con qualche dettaglio le caratteristiche principali del modello molecolare classico cercando di coglierne pregi e difetti insieme alla loro origine. L'attenzione è concentrata sul legame costitutivo tensioni-deformazioni perché qui si vedono meglio le conseguenze delle assunzioni relative al modello molecolare.

La definizione di tensione è quella, sopra riportata, proposta da Poisson e accettata da Cauchy; per la deformazione si considerano le componenti del gradiente degli spostamenti. Si fa riferimento al lavoro di Cauchy del 1828 [84],¹² tra i più completi e chiari sull'argomento.

⁸ pp. 368-369.

⁹ p. 29.

¹⁰ pp. 250-251.

¹¹ p. 403.

¹² pp. 227-252.

Le principali assunzioni del modello molecolare di Cauchy, analoghe a quelle degli altri studiosi francesi, sono:

1. Le molecole sono assimilate a punti materiali soggetti a forze opposte dirette lungo la loro congiungente (forze centrali).
2. La forza tra due molecole decresce rapidamente a partire da una certa distanza, piccola ma molto maggiore della distanza normale tra due molecole, detta *raggio di azione molecolare*.
3. Le molecole hanno tutte la stessa massa e la forza tra due molecole qualsiasi è fornita dalla stessa funzione $f(r)$ della distanza r .
4. Gli spostamenti relativi delle molecole si assumono piccoli.
5. La funzione $f(r)$ che esprime la forza per unità di massa tra due molecole è regolare in r e quindi può essere derivata.
6. Lo spostamento delle molecole è definito da un campo vettoriale regolare nel continuo in cui il sistema delle molecole si immagina immerso.

Le prime tre assunzioni sono di carattere fisico, le rimanenti sono di carattere matematico, introdotte chiaramente per semplificare la trattazione.

1.1.1.1

Le componenti della tensione

Come anticipato, le componenti del vettore della tensione in un punto sono ottenute applicando la definizione di tensione di Poisson. Si consideri un cilindro di base infinitesima ω e di asse parallelo a x , situato da una parte di ω . Siano \mathfrak{m} le molecole all'interno del cilindro¹³ e m quelle nel semispazio dalla parte opposta di ω rispetto al cilindro. La forza esercitata su \mathfrak{m} da tutte le molecole m è caratterizzata dalle tre componenti [84]:¹⁴

$$\sum \pm \mathfrak{m} m \cos \alpha f(r), \quad \sum \pm \mathfrak{m} m \cos \beta f(r), \quad \sum \pm \mathfrak{m} m \cos \gamma f(r),$$

in cui α, β, γ sono i coseni direttori del raggio vettore r e la somma è estesa a tutte le molecole m del semispazio opposto al cilindro, o meglio a tutte quelle contenute nella sfera di azione molecolare (la sfera definita dal raggio di azione molecolare) di \mathfrak{m} .

Per ottenere la pressione sulla superficie ω del cilindro infinitesimo bisogna estendere la somma a tutte le molecole \mathfrak{m} del cilindro. Poiché tutte le molecole sono uguali, questa somma può essere resa esplicita in modo semplice da Cauchy, che dopo qualche passaggio ottiene le seguenti componenti della tensione sulla faccia

¹³ Le molecole in M nella fig. 1.2.

¹⁴ p. 257.

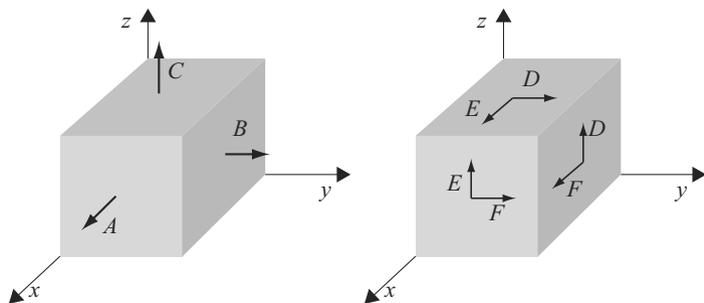


Figura 1.3 Le componenti della tensione

perpendicolare a x [86]:¹⁵

$$\begin{cases} A = \Delta \sum \pm m \cos^2 \alpha f(r) \\ F = \Delta \sum \pm m \cos \alpha \cos \beta f(r) \\ E = \Delta \sum \pm m \cos \alpha \cos \gamma f(r) \end{cases} \quad (1.1)$$

con Δ massa specifica del corpo, localmente omogeneo. Cauchy aveva già introdotto i simboli per le componenti di tensione nel lavoro del 1827 [82];¹⁶ questi saranno adottati a lungo da altri studiosi prima che si affermino le notazioni indiciali (vedi *infra*). I simboli completi e le corrispondenze con le notazioni moderne sono riportati nella lista seguente e illustrati nella Figura 1.3.

$$\begin{array}{lll} A (\equiv \sigma_x) & F (\equiv \tau_{yx}) & E (\equiv \tau_{zx}) \\ F (\equiv \tau_{xy}) & B (\equiv \sigma_y) & D (\equiv \tau_{zy}) \\ E (\equiv \tau_{xz}) & D (\equiv \tau_{yz}) & C (\equiv \sigma_z). \end{array}$$

Già nel lavoro del 1827 [82]¹⁷ Cauchy aveva trovato la relazione lineare tra le componenti del vettore della tensione in una giacitura generica con le componenti dei vettori della tensione nelle giaciture dei piani coordinati (ovvero in termini moderni la natura tensoriale della tensione), in modo molto semplice, a partire direttamente dalla definizione di tensione secondo Poisson ed esplicitando le sommatorie.

1.1.1.2

Il legame costitutivo

Nelle moderne teorie della meccanica del continuo, per introdurre le relazioni costitutive, si definiscono, in modo indipendente, le componenti della tensione e quelle della deformazione, poi si precisa la funzione che le lega, che è appunto il legame costitutivo.

¹⁵ p. 257, eq. (13).

¹⁶ pp. 60-81.

¹⁷ pp. 79-81.

Nella teoria molecolare classica il percorso storico è stato diverso. La definizione della deformazione passa in secondo piano e scaturisce implicitamente dal tentativo di stabilire il legame tra tensioni e spostamenti, non appena si approssimino questi ultimi con i loro valori infinitesimi. Questo approccio è stato certamente influenzato dal lavoro di Navier del 1821 [263], che aveva l'obiettivo di trovare le equazioni differenziali nelle componenti di spostamento in un corpo elastico, prescindendo da ogni esame delle forze interne.

Per ottenere le relazioni che legano le componenti della tensione a quelle degli spostamenti, si riscrivono nello stato deformato relazioni analoghe alle (1.1), le quali per comodità si considerano riferite allo stato indeformato, o naturale, o iniziale, tenendo conto dello spostamento di componenti ξ, η, ζ delle molecole dalla loro posizione iniziale. Se, seguendo Cauchy, si indicano con $\Delta a, \Delta b, \Delta c$ le componenti della distanza r tra due molecole nello stato indeformato e con $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ quelle della distanza nello stato deformato, valgono le:

$$\Delta x = \Delta a + \Delta \xi, \quad \Delta y = \Delta b + \Delta \eta, \quad \Delta z = \Delta c + \Delta \zeta.$$

La nuova distanza tra due molecole è definita da Cauchy attraverso la deformazione longitudinale ϵ :

$$r(1 + \epsilon).$$

Le componenti della tensione nella configurazione deformata sono fornite sostituendo nelle (1.1) le nuove espressioni delle forze e delle distanze [86]:¹⁸

$$\left\{ \begin{array}{l} A = \frac{\rho}{2} \sum \left\{ \pm m \frac{f[r(1+\epsilon)]}{r(1+\epsilon)} \Delta x^2 \right\}; \quad D = \frac{\rho}{2} \sum \left\{ \pm m \frac{f[r(1+\epsilon)]}{r(1+\epsilon)} \Delta y \Delta z \right\} \\ B = \frac{\rho}{2} \sum \left\{ \pm m \frac{f[r(1+\epsilon)]}{r(1+\epsilon)} \Delta y^2 \right\}; \quad E = \frac{\rho}{2} \sum \left\{ \pm m \frac{f[r(1+\epsilon)]}{r(1+\epsilon)} \Delta z \Delta x \right\} \\ C = \frac{\rho}{2} \sum \left\{ \pm m \frac{f[r(1+\epsilon)]}{r(1+\epsilon)} \Delta z^2 \right\}; \quad F = \frac{\rho}{2} \sum \left\{ \pm m \frac{f[r(1+\epsilon)]}{r(1+\epsilon)} \Delta x \Delta y \right\} \end{array} \right. \quad (1.2)$$

in cui ρ è la densità nella configurazione deformata, diversa in generale dalla densità Δ nella configurazione indeformata, e la sommatoria è estesa a tutte le molecole contenute entro la sfera di azione molecolare di m , sia nel semispazio del cilindro infinitesimo sia in quello opposto. Ciò giustifica il fattore $1/2$.

Per ottenere relazioni suscettibili di elaborazione algebrica e quindi di semplificazione, Cauchy introduce l'ipotesi di piccoli spostamenti, che gli permette di pervenire a relazioni linearizzate in ϵ ; ciò porta naturalmente a un legame elastico lineare tra tensioni e deformazioni [84]:

$$\frac{f[r(1+\epsilon)]}{r(1+\epsilon)} \approx \frac{f(r)}{r} + \frac{rf'(r) - f(r)}{r} \epsilon$$

$$\epsilon = \frac{1}{r} (\cos \alpha \Delta \xi + \cos \beta \Delta \eta + \cos \gamma \Delta \zeta).$$

¹⁸ p. 260, eq. (18).

Scelta una molecola m di riferimento, per esempio quella al centro della superficie elementare ω del cilindro, Cauchy linearizza le variazioni delle componenti di spostamento delle molecole all'interno della sfera di azione molecolare relativa a m , data la dimensione limitata della sfera di azione molecolare:

$$\begin{aligned}\frac{\Delta\xi}{r} &= \frac{\partial\xi}{\partial a} \cos\alpha + \frac{\partial\xi}{\partial b} \cos\beta + \frac{\partial\xi}{\partial c} \cos\gamma \\ \frac{\Delta\eta}{r} &= \frac{\partial\eta}{\partial a} \cos\alpha + \frac{\partial\eta}{\partial b} \cos\beta + \frac{\partial\eta}{\partial c} \cos\gamma \\ \frac{\Delta\zeta}{r} &= \frac{\partial\zeta}{\partial a} \cos\alpha + \frac{\partial\zeta}{\partial b} \cos\beta + \frac{\partial\zeta}{\partial c} \cos\gamma\end{aligned}$$

in cui le derivate sono calcolate in m .

Sostituendo nelle (1.2) le espressioni linearizzate di f e ϵ , semplificando e trascurando gli infinitesimi di ordine superiore in ϵ , $\Delta\xi$, $\Delta\eta$, $\Delta\zeta$, Cauchy perviene alle relazioni riportate nella Tabella 1.1, le quali esprimono il legame costitutivo. Esse forniscono l'espressione delle componenti della tensione A, B, C, D, E, F in funzione delle nove componenti del gradiente dello spostamento $\partial\xi/\partial a$, $\partial\xi/\partial b$, $\partial\xi/\partial c$, $\partial\eta/\partial a$, $\partial\eta/\partial b$, $\partial\eta/\partial c$, $\partial\zeta/\partial a$, $\partial\zeta/\partial b$, $\partial\zeta/\partial c$, le quali ultime definiscono implicitamente le componenti della deformazione.

Nella Tabella 1.1 le componenti della tensione sono legate a quelle della deformazione da 21 coefficienti distinti, definiti dalle sommatorie estese a tutte le molecole interne alla sfera di azione del punto-molecola in cui si vuole calcolare la tensione, che moltiplicano le derivate delle componenti dello spostamento nel punto stesso (nella Tabella 1.1 il simbolo S sta per sommatoria). Fa eccezione il primo termine, che non contiene derivate dello spostamento. Cauchy nota che se lo *stato primitivo* indeformato è equilibrato con forze esterne nulle (in termini moderni, uno stato naturale) si annullano 6 dei coefficienti tra le componenti della tensione e le derivate dello spostamento. Infatti per lo stato indeformato si deve porre $\epsilon = 0$ e le componenti della tensione A, B, C, D, E, F si riducono ai primi elementi della Tabella 1.1. In assenza di forze esterne questi devono annullarsi, così come tutte le somme che contengono i termini quadratici nei coseni direttori. Ciò comporta l'annullarsi anche dei termini della seconda riga della Tabella 1.1 che dipendono dagli spostamenti. Pertanto i coefficienti non nulli sono solo quelli della terza riga della Tabella 1.1 caratterizzati da termini del quarto ordine nei coseni direttori, cioè 15, pari alle combinazioni con ripetizione di 3 oggetti ($\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$) di classe 4 (l'ordine del prodotto dei coseni).

La Tabella 1.1, oltre a consentire un controllo sul numero di coefficienti, mostra una certa simmetria. I coefficienti delle derivate associate a variabili di spostamento e di posizione corrispondenti sono uguali; per esempio, sono uguali i coefficienti di $\partial\xi/\partial b$ e $\partial\eta/\partial a$, di $\partial\xi/\partial c$ e $\partial\zeta/\partial a$, ecc. Un lettore moderno può così affermare che le componenti della tensione si esprimono in funzione delle sei componenti di deformazione infinitesima, pervenendo a un legame costitutivo tensioni-deformazioni caratterizzato da solo 15 coefficienti.

Cauchy non fa queste considerazioni, non è interessato a una teoria dei legami costitutivi, vuole solo ottenere la tensione in funzione delle derivate dello sposta-

Tabella 1.1a Componenti di tensione nel modello molecolare di Cauchy [86]¹⁹

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \begin{aligned}
 & A = \rho \mathbb{S} \left[\pm \frac{m\rho}{2} \cos^2 \alpha f(r) \right] \\
 & + 2\rho \left\{ \frac{\partial \xi}{\partial a} \mathbb{S} \left[\pm \frac{m\rho}{2} \cos^2 \alpha f(r) \right] + \frac{\partial \xi}{\partial b} \mathbb{S} \left[\pm \frac{m\rho}{2} \cos \alpha \cos \beta f(r) \right] + \frac{\partial \xi}{\partial c} \mathbb{S} \left[\pm \frac{m\rho}{2} \cos \alpha \cos \gamma f(r) \right] \right\} \\
 & + \rho \left\{ \begin{aligned}
 & \left(\frac{\partial \xi}{\partial a} \mathbb{S} \left[\frac{m\rho}{2} \cos^4 \alpha f(r) \right] + \frac{\partial \xi}{\partial b} \mathbb{S} \left[\frac{m\rho}{2} \cos^3 \alpha \cos \beta f(r) \right] + \frac{\partial \xi}{\partial c} \mathbb{S} \left[\frac{m\rho}{2} \cos^3 \alpha \cos \gamma f(r) \right] \right. \\
 & \left. + \frac{\partial \eta}{\partial a} \mathbb{S} \left[\frac{m\rho}{2} \cos^3 \alpha \cos \beta f(r) \right] + \frac{\partial \eta}{\partial b} \left[\frac{m\rho}{2} \cos^2 \alpha \cos^2 \beta f(r) \right] + \frac{\partial \eta}{\partial c} \mathbb{S} \left[\frac{m\rho}{2} \cos^2 \alpha \cos \beta \cos \gamma f(r) \right] \right. \\
 & \left. + \frac{\partial \zeta}{\partial a} \mathbb{S} \left[\frac{m\rho}{2} \cos^3 \alpha \cos \gamma f(r) \right] + \frac{\partial \zeta}{\partial b} \mathbb{S} \left[\frac{m\rho}{2} \cos^2 \alpha \cos \beta \cos \gamma f(r) \right] + \frac{\partial \zeta}{\partial c} \left[\frac{m\rho}{2} \cos^2 \alpha \cos^2 \gamma f(r) \right] \right\}
 \end{aligned} \right. \\
 \\
 & \left\{ \begin{aligned}
 & B = \rho \mathbb{S} \left[\pm \frac{m\rho}{2} \cos^2 \beta f(r) \right] \\
 & + 2\rho \left\{ \frac{\partial \eta}{\partial a} \mathbb{S} \left[\pm \frac{m\rho}{2} \cos \alpha \cos \beta f(r) \right] + \frac{\partial \eta}{\partial b} \mathbb{S} \left[\pm \frac{m\rho}{2} \cos^2 \beta f(r) \right] + \frac{\partial \eta}{\partial c} \mathbb{S} \left[\pm \frac{m\rho}{2} \cos \alpha \cos \gamma f(r) \right] \right\} \\
 & + \rho \left\{ \begin{aligned}
 & \left(\frac{\partial \xi}{\partial a} \mathbb{S} \left[\frac{m\rho}{2} \cos^2 \alpha \cos^2 \beta f(r) \right] + \frac{\partial \xi}{\partial b} \mathbb{S} \left[\frac{m\rho}{2} \cos \alpha \cos^3 \beta f(r) \right] + \frac{\partial \xi}{\partial c} \mathbb{S} \left[\frac{m\rho}{2} \cos \alpha \cos^2 \beta \cos \gamma f(r) \right] \right. \\
 & \left. + \frac{\partial \eta}{\partial a} \mathbb{S} \left[\frac{m\rho}{2} \cos \alpha \cos^3 \beta f(r) \right] + \frac{\partial \eta}{\partial b} \left[\frac{m\rho}{2} \cos^4 \beta f(r) \right] + \frac{\partial \eta}{\partial c} \mathbb{S} \left[\frac{m\rho}{2} \cos^3 \beta \cos \gamma f(r) \right] \right. \\
 & \left. + \frac{\partial \zeta}{\partial a} \mathbb{S} \left[\frac{m\rho}{2} \cos \alpha \cos^2 \beta \cos \gamma f(r) \right] + \frac{\partial \zeta}{\partial b} \mathbb{S} \left[\frac{m\rho}{2} \cos^3 \beta \cos \gamma f(r) \right] + \frac{\partial \zeta}{\partial c} \mathbb{S} \left[\frac{m\rho}{2} \cos^2 \beta \cos^2 \gamma f(r) \right] \right\}
 \end{aligned} \right. \\
 \\
 & \left\{ \begin{aligned}
 & C = \rho \mathbb{S} \left[\pm \frac{m\rho}{2} \cos^2 \gamma f(r) \right] \\
 & + 2\rho \left\{ \frac{\partial \xi}{\partial c} \mathbb{S} \left[\pm \frac{m\rho}{2} \cos \alpha \cos \gamma f(r) \right] + \frac{\partial \xi}{\partial b} \mathbb{S} \left[\pm \frac{m\rho}{2} \cos \beta \cos \gamma f(r) \right] + \frac{\partial \xi}{\partial a} \mathbb{S} \left[\pm \frac{m\rho}{2} \cos^2 \gamma f(r) \right] \right\} \\
 & + \rho \left\{ \begin{aligned}
 & \left(\frac{\partial \xi}{\partial a} \mathbb{S} \left[\frac{m\rho}{2} \cos^2 \alpha \cos^2 \beta f(r) \right] + \frac{\partial \xi}{\partial b} \mathbb{S} \left[\frac{m\rho}{2} \cos \alpha \cos \beta \cos^2 \gamma f(r) \right] + \frac{\partial \xi}{\partial c} \mathbb{S} \left[\frac{m\rho}{2} \cos \alpha \cos^3 \gamma f(r) \right] \right. \\
 & \left. + \frac{\partial \eta}{\partial a} \mathbb{S} \left[\frac{m\rho}{2} \cos \alpha \cos \beta \cos^2 \gamma f(r) \right] + \frac{\partial \eta}{\partial b} \mathbb{S} \left[\frac{m\rho}{2} \cos^2 \beta \cos^2 \gamma f(r) \right] + \frac{\partial \eta}{\partial c} \mathbb{S} \left[\frac{m\rho}{2} \cos \beta \cos^3 \gamma f(r) \right] \right. \\
 & \left. + \frac{\partial \zeta}{\partial a} \mathbb{S} \left[\pm \frac{m\rho}{2} \cos \alpha \cos^3 \gamma f(r) \right] + \frac{\partial \zeta}{\partial b} \mathbb{S} \left[\pm \frac{m\rho}{2} \cos \beta \cos^3 \gamma f(r) \right] + \frac{\partial \zeta}{\partial c} \mathbb{S} \left[\pm \frac{m\rho}{2} \cos^4 \gamma f(r) \right] \right\}
 \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

mento al fine di scrivere le equazioni di equilibrio e di moto per il sistema di punti materiali in termini di spostamento, come fatto da Navier. La suddivisione del problema elastico del continuo in analisi della tensione (equilibrio), della deformazione (congruenza) e del legame costitutivo sarà pienamente sviluppata solo con Lamé [206] e Saint Venant [316]. Cauchy inoltre non si cura mai del numero di costanti

¹⁹ p. 263.

Tabella 1.1b Componenti di tensione nel modello molecolare di Cauchy [86]²⁰

$$\begin{aligned}
 D &= \rho S \left[\pm \frac{m\rho}{2} \cos \beta \cos \gamma f(r) \right] \\
 &+ \rho \left\{ \begin{aligned} &\left[\frac{\partial \eta}{\partial a} S \left[\pm \frac{m\rho}{2} \cos \alpha \cos \gamma f(r) \right] + \frac{\partial \eta}{\partial b} S \left[\pm \frac{m\rho}{2} \cos \beta \cos \gamma f(r) \right] + \frac{\partial \eta}{\partial c} S \left[\pm \frac{m\rho}{2} \cos^2 \gamma f(r) \right] \right] \\ &+ \left[\frac{\partial \xi}{\partial a} S \left[\frac{m\rho}{2} \cos \alpha \cos \beta f(r) \right] + \frac{\partial \xi}{\partial b} S \left[\frac{m\rho}{2} \cos^2 \beta f(r) \right] + \frac{\partial \xi}{\partial c} S \left[\frac{m\rho}{2} \cos \beta \cos \gamma f(r) \right] \right] \end{aligned} \right\} \\
 &+ \rho \left\{ \begin{aligned} &\left[\frac{\partial \xi}{\partial a} S \left[\frac{m\rho}{2} \cos^2 \alpha \cos \beta \cos \gamma f(r) \right] + \frac{\partial \xi}{\partial b} S \left[\frac{m\rho}{2} \cos \alpha \cos^2 \beta \cos \gamma f(r) \right] + \frac{\partial \xi}{\partial c} S \left[\frac{m\rho}{2} \cos \alpha \cos \beta \cos^2 \gamma f(r) \right] \right] \\ &+ \left[\frac{\partial \eta}{\partial a} S \left[\frac{m\rho}{2} \cos \alpha \cos^2 \beta \cos \gamma f(r) \right] + \frac{\partial \eta}{\partial b} S \left[\frac{m\rho}{2} \cos^3 \beta \cos \gamma f(r) \right] + \frac{\partial \eta}{\partial c} S \left[\frac{m\rho}{2} \cos^2 \beta \cos^2 \gamma f(r) \right] \right] \\ &+ \left[\frac{\partial \zeta}{\partial a} S \left[\frac{m\rho}{2} \cos \alpha \cos \beta \cos^2 \gamma f(r) \right] + \frac{\partial \zeta}{\partial b} S \left[\frac{m\rho}{2} \cos^2 \beta \cos^2 \gamma f(r) \right] + \frac{\partial \zeta}{\partial c} S \left[\frac{m\rho}{2} \cos \beta \cos^3 \gamma f(r) \right] \right] \end{aligned} \right\} \\
 E &= \rho S \left[\pm \frac{m\rho}{2} \cos \gamma \cos \alpha f(r) \right] \\
 &+ \rho \left\{ \begin{aligned} &\left[\frac{\partial \zeta}{\partial a} S \left[\pm \frac{m\rho}{2} \cos^2 \alpha f(r) \right] + \frac{\partial \zeta}{\partial b} S \left[\pm \frac{m\rho}{2} \cos \alpha \cos \beta f(r) \right] + \frac{\partial \zeta}{\partial c} S \left[\pm \frac{m\rho}{2} \cos \alpha \cos \gamma f(r) \right] \right] \\ &+ \left[\frac{\partial \xi}{\partial a} S \left[\frac{m\rho}{2} \cos \alpha \cos \gamma f(r) \right] + \frac{\partial \xi}{\partial b} S \left[\pm \frac{m\rho}{2} \cos \beta \cos \gamma f(r) \right] + \frac{\partial \xi}{\partial c} S \left[\pm \frac{m\rho}{2} \cos^2 \gamma f(r) \right] \right] \end{aligned} \right\} \\
 &+ \rho \left\{ \begin{aligned} &\left[\frac{\partial \xi}{\partial a} S \left[\frac{m\rho}{2} \cos^3 \alpha \cos \gamma f(r) \right] + \frac{\partial \xi}{\partial b} S \left[\frac{m\rho}{2} \cos^2 \alpha \cos \beta \cos \gamma f(r) \right] + \frac{\partial \xi}{\partial c} S \left[\frac{m\rho}{2} \cos^2 \alpha \cos^2 \gamma f(r) \right] \right] \\ &+ \left[\frac{\partial \eta}{\partial a} S \left[\frac{m\rho}{2} \cos^2 \alpha \cos \beta \cos \gamma f(r) \right] + \frac{\partial \eta}{\partial b} S \left[\frac{m\rho}{2} \cos \alpha \cos^2 \beta \cos \gamma f(r) \right] + \frac{\partial \eta}{\partial c} S \left[\frac{m\rho}{2} \cos \alpha \cos \beta \cos^2 \gamma f(r) \right] \right] \\ &+ \left[\frac{\partial \zeta}{\partial a} S \left[\frac{m\rho}{2} \cos^3 \alpha \cos^2 \gamma f(r) \right] + \frac{\partial \zeta}{\partial b} S \left[\frac{m\rho}{2} \cos \alpha \cos \beta \cos^2 \gamma f(r) \right] + \frac{\partial \zeta}{\partial c} S \left[\frac{m\rho}{2} \cos \alpha \cos^3 \gamma f(r) \right] \right] \end{aligned} \right\} \\
 F &= \rho S \left[\pm \frac{m\rho}{2} \cos \alpha \cos \beta f(r) \right] \\
 &+ \rho \left\{ \begin{aligned} &\left[\frac{\partial \xi}{\partial a} S \left[\pm \frac{m\rho}{2} \cos \alpha \cos \beta f(r) \right] + \frac{\partial \xi}{\partial b} S \left[\pm \frac{m\rho}{2} \cos^2 \beta f(r) \right] + \frac{\partial \xi}{\partial c} S \left[\pm \frac{m\rho}{2} \cos \beta \cos \gamma f(r) \right] \right] \\ &+ \left[\frac{\partial \eta}{\partial a} S \left[\pm \frac{m\rho}{2} \cos^2 \alpha f(r) \right] + \frac{\partial \eta}{\partial b} S \left[\pm \frac{m\rho}{2} \cos \alpha \cos \beta f(r) \right] + \frac{\partial \eta}{\partial c} S \left[\pm \frac{m\rho}{2} \cos \alpha \cos \gamma f(r) \right] \right] \end{aligned} \right\} \\
 &+ \rho \left\{ \begin{aligned} &\left[\frac{\partial \xi}{\partial a} S \left[\frac{m\rho}{2} \cos^3 \alpha \cos \beta f(r) \right] + \frac{\partial \xi}{\partial b} S \left[\frac{m\rho}{2} \cos^2 \alpha \cos^2 \beta f(r) \right] + \frac{\partial \xi}{\partial c} S \left[\frac{m\rho}{2} \cos^2 \alpha \cos \beta \cos \gamma f(r) \right] \right] \\ &+ \left[\frac{\partial \eta}{\partial a} S \left[\frac{m\rho}{2} \cos^2 \alpha \cos^2 \beta f(r) \right] + \frac{\partial \eta}{\partial b} S \left[\frac{m\rho}{2} \cos \alpha \cos^3 \beta f(r) \right] + \frac{\partial \eta}{\partial c} S \left[\frac{m\rho}{2} \cos \alpha \cos^2 \beta \cos \gamma f(r) \right] \right] \\ &+ \left[\frac{\partial \zeta}{\partial a} S \left[\frac{m\rho}{2} \cos^2 \alpha \cos \beta \cos \gamma f(r) \right] + \frac{\partial \zeta}{\partial b} S \left[\frac{m\rho}{2} \cos \alpha \cos^2 \beta \cos \gamma f(r) \right] + \frac{\partial \zeta}{\partial c} S \left[\frac{m\rho}{2} \cos \alpha \cos \beta \cos^2 \gamma f(r) \right] \right] \end{aligned} \right\}
 \end{aligned}$$

che ha trovato per il modello elastico più generale, in particolare se siano 15 o 21, anche se in un lavoro del 1829 dà un nome a tutti i coefficienti e li espone in ordine [87].²¹ Secondo Love, Clausius è stato tra i primi a evidenziare il particolare numero, 15, delle costanti del modello molecolare [218].²² In realtà già Poisson aveva

²⁰ p. 264.

²¹ pp. 162-173.

²² p. 9.

“contato” i coefficienti del legame costitutivo nella forma tensione-deformazione infinitesima, osservando che quelli necessari per descriverlo sono in generale 36 e solo in conseguenza delle ipotesi del modello molecolare classico si riducono a 15 [289].²³

Cauchy assume in seguito ipotesi ulteriori di simmetria materiale:

1. Il corpo ha tre piani ortogonali di simmetria (ortotropia): i coefficienti con almeno un esponente dispari dei coseni direttori svaniscono (le somme che li esprimono si annullano); il numero dei coefficienti distinti si riduce a 6.
2. Il corpo ha tre piani di simmetria e la disposizione delle molecole è identica nelle tre direzioni ortogonali a questi piani (ortotropia identica): nei coefficienti si può scambiare β con α , α con γ , ecc.; il numero dei coefficienti distinti si riduce a 2.
3. Il corpo ha la stessa disposizione di molecole attorno al punto in cui si calcola la tensione (isotropia): con un ragionamento complicato, forse non impeccabile, Cauchy mostra che c'è solo un coefficiente distinto.

1.1.2

Le critiche dall'interno del modello molecolare classico

Le conclusioni di Navier, Cauchy e Poisson furono accettate dalla comunità scientifica internazionale, specialmente in Francia, per la semplicità della teoria a loro fondamento e per le loro basi fisiche universalmente riconosciute. Tuttavia, questi risultati vennero lentamente ma inesorabilmente contraddetti dall'evidenza sperimentale.²⁴ Questa mostrava, soprattutto con l'avanzare della precisione degli strumenti di misura, che per caratterizzare materiali elastici lineari isotropi sono necessarie due costanti. Maggiore la precisione e l'attendibilità dei risultati sperimentali, maggiormente le predizioni teoriche di Cauchy e Poisson venivano smentite, senza che fosse chiaro il perché [197].²⁵

Un primo tentativo di adattare il modello molecolare “classico” ai risultati sperimentali fu di rilassare alcune ipotesi di base della teoria molecolare. Poisson fu tra i primi, nella memoria letta all'*Académie des sciences* nel 1829 [289], ad avanzare l'ipotesi di molecole non puntiformi e corpi cristallini, con una disposizione regolare di molecole; l'idea di forze centrali dipendenti solo dalla distanza mutua tra i centri delle molecole cade:

On suppose que dans les corps de cette nature, les molécules sont régulièrement distribuées, et celles s'attirent ou se repoussent inégalement par leurs différens cotés. Par cette raison il n'est plus permis, en calculant l'action exercée par une partie du corps sur une autre, de regarder l'action mutuelle de deux molécules comme une simple fontion

²³ pp. 83-85.

²⁴ Per esempio, dai risultati ampiamente illustrati da Wertheim [375], pp. 581-610. Per alcuni riferimenti bibliografici sulle sperimentazioni relative ai legami costitutivi vedi [163].

²⁵ pp. 481-503.

de la distance qui les sépare [...]. S'il s'agit d'un corps homogène qui soit dans son état naturel, où il n'est soumis à aucune force étrangère, on pourra le considérer comme un assemblage de molécules de même nature et de même *forme*, dont les sections homologues seront parallèles entre elles [289].²⁶ (D.1.5)

Per Poisson nei corpi cristallini le relazioni che riducono le costanti elastiche indipendenti a 15, ottenute nei suoi lavori precedenti e in quelli di Cauchy, non sono più valide:

Les composants P, Q, &c., étant ainsi réduites à six forces différentes, et la valeur de chaque force pouvant contenir six coefficients particuliers, il en résulte que les équations générales de l'équilibre, et par suite, celles du mouvement, renferment trente-six coefficients, q'on ne pourra pas réduire à un moindre nombre sans restreindre la généralité de la question [289].²⁷ (D.1.6)

D'altra parte, nei corpi non cristallini, con cristallizzazione debole o irregolare, anche se le molecole non sono più considerate puntiformi, tutto rimane come se le forze interne fossero centrali. Questo è dovuto a compensazioni di cause, anche considerando un modello molecolare più raffinato del tradizionale:

Il suit de là que si l'on considère deux parties *A* et *B* d'un corps non cristallisé qui soient d'une étendue insensible, mais dont chacune comprenne cependant un très-grand nombre de molécules, et qu'on veuille déterminer l'action totale de *A* sur *B*, on pourra supposer dans ce calcul que l'action mutuelle de deux molécules *m* et *m'* se réduise, comme dans le cas des fluides, à une force *R* dirigée suivant la droite qui joint leurs centres de gravité *M* et *M'*, et dont l'intensité ne sera fonction que de la distance *MM'*. En effet, quelle que soit cette action, on peut la remplacer par une semblable force, qui sera la moyenne des actions de tous les points de *m'* sur tous ceux de *m*, et que l'on combinera avec une autre force *R'*, ou, s'il est nécessaire avec deux autres forces *R'* et *R''*, dépendantes de la disposition respective des deux molécules. Or, cette disposition n'ayant par hypothèse aucune sorte de régularité dans *A* et *B*, et les nombres de molécules de *A* et *B* étant extrêmement grands et comme infinis, on conçoit que toutes les forces *R'* et *R''* se compenseront sans altérer l'action totale de *A* sur *B*, qui ne dépendra par conséquent que des forces *R*. Il faut d'ailleurs ajouter que pour un même accroissement dans la distance, l'intensité des forces *R'* et *R''* diminue plus rapidement en général que celle des forces *R* ce qui contribuera encore à faire disparaître l'influence des premières forces sur l'action mutuelle de *A* sur *B* [289].²⁸ (D.1.7)

Anche Cauchy esprime dubbi sulla validità del modello molecolare "classico" in alcune memorie del 1839 [79]²⁹ e in una revisione del 3 marzo 1851 [89] delle memorie di Wertheim circa la determinazione sperimentale delle costanti elastiche. Cauchy qui afferma che nei corpi cristallini le molecole non debbono essere considerate puntiformi ma particelle piccolissime composte da atomi. Poiché nei cristalli vi è una disposizione regolare di molecole, i moduli elastici non sono uniformi, bensì funzioni periodiche delle variabili spaziali (affermazione ripresa più tardi da Saint

²⁶ p. 69.

²⁷ p. 85.

²⁸ pp. 7-8.

²⁹ ser. 2, vol. XI, pp. 11-27, 51-74, 134-172.

Venant [264]).³⁰ Al fine di ottenere una relazione costitutiva con coefficienti uniformi, Cauchy amplia il numero di moduli elastici, pervenendo infine a due soli nel caso di materiali isotropi.³¹

Lamé nei suoi lavori [206, 207] avanza una serie di dubbi sulla questione. Per esempio, gran parte della ventesima lezione del manuale del 1859 [207] è dedicata all'esposizione delle perplessità sulla reale natura delle molecole, sul postulato esatto riguardo alle azioni mutue, su quale sia una forma ragionevole per la legge dell'azione intermolecolare, su quale sia la direzione di quest'ultima. Nella monografia del 1852 sulla teoria matematica dell'elasticità [206] Lamé ottiene dapprima le relazioni costitutive elastiche lineari per molecole puntiformi e forze intermolecolari centrali. Ammettendo che ogni componente della tensione è funzione lineare di tutte le componenti di deformazione, l'elasticità lineare in generale è descritta da 36 coefficienti. Assumendo inoltre l'isotropia (*élasticité constante*), considerazioni sulle rotazioni riducono i coefficienti a due, indicati con λ e μ :

Par cette méthode de réduction, on obtient définitivement, pour les N_i, T_i , dans le cas des corps solides homogènes et d'élasticité constante, les valeurs [...] contenant deux coefficients, λ, μ . Quand on emploie la méthode indiquée à la fin de la troisième Leçon, on trouve $\lambda = \mu$, il ne reste plus qu'un seul coefficient. Nous ne saurons admettre cette relation, qui s'appuie nécessairement sur l'hypothèse de la continuité de la matière dans les milieux solides. Les résultats des expériences de Wertheim font bien voir que le rapport de λ à μ n'est pas l'unité, mais ne semblent pas assigner à ce rapport une autre valeur fixe et bien certaine. Nous conserverons donc les deux coefficients λ et μ , en laissant leur rapport indéterminé [206].³² (D.1.8)

Con argomenti simili a quelli di Poisson nel 1829 [289], Lamé mostra che anche per i corpi cristallini vale la relazione con 36 costanti [206]³³ e individua l'errore nelle trattazioni di Cauchy e Poisson nell'ipotesi di sostanza omogenea, che permette le considerazioni di simmetria altrimenti inammissibili:

Telle est la méthode suivie par Navier et autres géomètres, pour obtenir les équations générales de l'élasticité dans les milieux solides. Mais cette méthode suppose évidemment la continuité de la matière, hypothèse inadmissible. Poisson croit lever cette difficulté [...] mais [...] il ne fait, en réalité, que substituer le signe Σ au signe \int [...]. La méthode que nous avons suivie [...] dont on trouve l'origine dans les travaux de Cauchy, nous paraît à l'abri de toute objection [206].³⁴ (D.1.9)

Sebbene i risultati della teoria molecolare dell'elasticità fossero chiaramente considerati insoddisfacenti persino dai seguaci della scuola francese di meccanica, così non era per la fondatezza dell'approccio molecolare. Uno dei sostenitori principali dell'approccio molecolare alla teoria dell'elasticità fu, come già detto, Saint Venant;

³⁰ Appendice V, p. 689.

³¹ Una ricostruzione dettagliata e commentata degli argomenti di Cauchy si trova nell'Appendice V, redatta da Saint Venant [264], pp. 691-706.

³² pp. 51-52.

³³ pp. 36-37.

³⁴ p. 38.

le sue idee in merito, oltre che nei lavori pubblicati a suo nome, sono contenute nell'enorme quantità di note, commenti e appendici alla monografia di Clebsch [113] e al *Résumé des leçons* di Navier [264] in cui Saint Venant afferma:

L'élasticité des corps solides et même des fluides [...] toutes leurs propriétés mécaniques prouvent que les molécules ou les dernières particules qui les composent exercent les unes sur les autres des actions répulsives indéfiniment croissantes pour les distances mutuelles les moindres, et devenant attractives pour des distances considérables, mais relativement insensibles quand ces distances, dont elles sont ainsi fonctions, acquièrent une grandeur perceptible [264].³⁵ (D.1.10)

Per i corpi cristallini il modello molecolare classico pare non valere:

Je me ne refuse pas pourtant à reconnaître que les molécules intègrantes dont les arrangements divers composent la texture des solides, et dont les petits changement de distance produisent les déformations perceptibles appelées ∂g , ne sont pas les *atoms* constituants del la matière, mais en sont des groupes inconnous. Je reconnais en conséquence, tout en pensant que les actions entre atoms sont régie par la loi des intensités fonction des seules distances ou elles s'exercent, qu'il n'esta pas bien certain que les actions *résultantes* ou entre *molécules*, doivent suivre tout à fait la même loi vis-à-vis des distances de leurs centres de gravité. On peut considérer aussi que les groupes, en changeant de distances, peuvent changer d'orientation [113].³⁶ (D.1.11)

Ma, aggiunge Saint Venant, questa è solo una situazione ideale, perché i corpi ordinari non sono dei cristalli, inoltre i moti termici producono una situazione caotica che in media porta a una legge di azione a distanza delle molecole sostanzialmente dello stesso tipo di quella che c'è tra gli atomi. Saint Venant fa dipendere le sei componenti della tensione linearmente dalle sei componenti della deformazione, ottenendo anch'egli una relazione elastica in termini di 36 coefficienti. Tuttavia continua ad ammettere la validità delle relazioni di Cauchy e Poisson, che riducono le componenti indipendenti a 15, e che sono valide quando le forze intermolecolari sono supposte centrali:

Les 36 coefficients [...] ne sont pas indépendants les uns des autres, et il est facile de voir qu'il y a entre eux vingt et une égalités [264].³⁷ (D.1.12)

In effetti, la prova che tali relazioni siano valide considera variazioni della distanza intermolecolare che sono le stesse sotto un'estensione in una data direzione e un opportuno scorrimento angolare [264].³⁸ Se l'azione intermolecolare è centrale e dipende solo dalla variazione della distanza tra i centri delle molecole, la forza tra le molecole, e di conseguenza la tensione, è uguale. Così, vi sono delle uguaglianze tra le costanti elastiche, che ne riducono il numero da 36 a 15; in particolare, per corpi isotropi, Saint Venant trova un'unica costante:

³⁵ pp. 542-543.

³⁶ p. 759.

³⁷ p. 556.

³⁸ pp. 556-560.

Les trente-six coefficients [...] se réduisent à deux [...] et on peut dire même à un seul [...] en vertu de ce que les trente-six coefficients sont réductibles à quinze [264].³⁹
(D.1.13)

Saint Venant sa benissimo che queste conclusioni sono contraddette dagli esperimenti e, poiché non trova difetti evidenti nella teoria molecolare dell'elasticità, preferisce accettare che non esistano corpi isotropi in natura:

Mais les expériences [...] et la simple considération de la manière dont s'opèrent le refroidissement et la solidification des corps, prouvent que l'isotropie est fort rare [...]. Aussi, plutôt que de prendre, au lieu des formules [...] à un seul coefficient [...], les formules [...] à deux coefficients [...], qui ne sont composées comme celles-ci que pour des corps parfaitement isotropes, il conviendra de se servir le plus qu'on pourra des formules [...] relatives au cas plus général d'une élasticité inégale dans deux ou trois sens [264].⁴⁰ (D.1.14)

In alcuni lavori sul *Journal de mathématiques pures et appliquées*, dal 1863 al 1868 [318],⁴¹ [319],⁴² [320],⁴³ Saint Venant introduce il concetto di «corps amorphes» per definire le proprietà acquisite dai corpi inizialmente isotropi a seguito di processi geologici. In questo stato le proprietà meccaniche sono caratterizzate da tre coefficienti e non solo due come accade per i corpi isotropi.

Saint Venant spende più di 200 pagine di note e appendici alle lezioni di Navier al fine di presentare risultati sperimentali e tentativi di spiegazioni del paradosso, evidenziando un'ampia conoscenza della letteratura del suo tempo (tra gli altri, cita Savart, Wertheim, Hodgkinson, Regnault, Oersted, Green, Clebsch, Kirchhoff, Rankine, William Thomson). Alla fine comunque, il quesito rimaneva poiché non c'era accordo tra le trattazioni dei contemporanei del grande meccanico francese, anche se era chiaro che erano necessarie due costanti elastiche. Dov'era il difetto in una teoria attraente e apparentemente fondata come quella di Navier, Cauchy e Poisson?

Il dibattito tra i meccanici fu rafforzato, da differenti punti di vista, dai lavori di Green e Bravais, che diedero vita a scuole d'elasticità affatto diverse in Inghilterra e Germania e modi diversi di studiare cristallografia.

1.1.3

Le alternative al modello molecolare

Quello molecolare non fu l'unico modello con cui i fisici e i matematici cercarono di rappresentare il comportamento dei corpi elastici. Il 30 settembre 1822, un anno dopo la memoria di Navier, Cauchy presenta all'*Académie des sciences* una memoria che affronta lo studio dell'elasticità in modo continuista, con una trattazione ancora oggi prevalente e sostanzialmente invariata. Quello di Cauchy è un approccio puramente

³⁹ p. 582.

⁴⁰ p. 583.

⁴¹ pp. 353-430.

⁴² pp. 297-350.

⁴³ pp. 242-254.

fenomenologico, in linea con le tendenze empiriste che si erano sviluppate presso gli scienziati francesi.⁴⁴ La materia è modellata come un continuo matematico senza che si facciano ipotesi di natura fisica su di essa. Si dà per scontato che le diverse parti di materia si scambino delle forze e si deformino. Le relazioni tra le forze interne e le deformazioni hanno natura affatto generale e il numero delle costanti elastiche che definiscono il problema è determinato semplicemente da un conteggio delle componenti della tensione e della deformazione. Nella sua versione più compiuta, riportata negli scritti di Lamé, il modello continuo di Cauchy porta a una relazione tensione-deformazione definita da 36 coefficienti.

Un approccio diverso è quello di Green, che in un lavoro del 1839 [179] segue anche lui un punto di vista fenomenico disinteressandosi della reale costituzione della materia, senza neppure la necessità di presupporre un continuo fisico e disinteressandosi sostanzialmente anche al concetto di forze interne. Green assume comunque un principio meccanico, quello dell'esistenza di un potenziale delle forze interne, che in qualche modo dà una certa forza teorica alle sue argomentazioni.

1.1.3.1

L'approccio fenomenologico di Cauchy

Della presentazione all'*Académie des sciences* del 1822 da parte di Cauchy appare un sunto nel 1823 [80]⁴⁵ in cui si enuncia il "principio" della tensione:⁴⁶ su ogni superficie orientata e regolare che separa un corpo in due c'è un campo vettoriale regolare che esprime l'azione tra le parti:

Si dans un corps solide élastique ou non élastique on vient à rendre rigide et invariable un petit élément du volume terminé par des faces quelconques, ce petit élément éprouvera sur ses différentes faces, et en chaque point de chacune d'elles, une pression ou tension déterminé. Cette pression ou tension sera semblable à la pression qu'un fluide exerce contre un élément de l'enveloppe d'un corps solide, avec cette seule différence, que la pression exercée par un fluide en repos contre la surface d'un corps solide, est dirigée perpendiculairement à cette surface de dehors en dedans, et indépendante en chaque point de l'inclinaison de la surface par rapport aux plans coordonnés, tandis que la pression ou tension exercée en un point donné d'un corps solide contre un très petit élément de surface passant par ce point, peut être dirigée perpendiculairement ou obliquement à cette surface, tantôt de dehors en dedans, s'il y a condensation, tantôt de dedans en dehors, s'il y a dilatation, et peut prendre de l'inclinaison de la surface par rapport aux plans dont il s'agit [80].⁴⁷ (D.1.15)

⁴⁴ Per una discussione sulle concezioni empiriste della scienza francese nella prima metà dell'Ottocento vedi [285].

⁴⁵ Pare che il 30 settembre 1822 Cauchy abbia informato l'Accademia delle sue ricerche senza darne lettura pubblica né depositare un manoscritto; vedi [12], p. 97. In [348] si legge anche che Cauchy di fatto presentò la memoria.

⁴⁶ Cauchy usa *tensione* o *pressione* rispettivamente per le trazioni e le compressioni.

⁴⁷ p. 300.

Questo enunciato prescinde da ogni ipotesi costitutiva sulla materia, ma si appoggia sul concetto, allora ancora poco accettato, di forza distribuita. Cauchy pubblica i risultati annunciati nel 1822, nel 1827 [82] e nel 1828 [85]. Nel 1827 Cauchy, facendo l'equilibrio di un tetraedro infinitesimo, mostra la dipendenza lineare tra tensione e normale alla giacitura [83] e ottiene le equazioni locali di equilibrio per le componenti della tensione [83]:⁴⁸

$$\begin{aligned}\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial E}{\partial z} + \rho X &= 0 \\ \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial D}{\partial z} + \rho Y &= 0 \\ \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial D}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} + \rho Z &= 0\end{aligned}$$

con A, B, C, D, E, F componenti di tensione, corrispondenti alle grandezze denotate con lo stesso simbolo e introdotte da Cauchy per il modello molecolare.

Vale la pena di rilevare che nella memoria di Cauchy del 1823 erano anticipate tutte le nozioni principali della meccanica del continuo: i tensori⁴⁹ di tensione e deformazione, la loro simmetria, l'esistenza degli assi principali, il criterio per ottenere le equazioni di equilibrio con il principio di "solidificazione", l'introduzione della legge di Hooke sotto forma generalizzata. Negli anni successivi, fino al 1827-28, Cauchy metterà a punto molte tecniche oggi classificabili come algebra lineare necessarie per formalizzare le sue idee sulla meccanica del continuo: l'utilizzo di tabelle quadrate per le matrici; la classificazione delle matrici in diversi tipi (simmetriche, emisimmetriche, ecc.), i teoremi sugli autovalori, i teoremi sulla decomposizione canonica delle matrici; la prima caratterizzazione moderna del determinante.⁵⁰

Per arrivare al legame costitutivo del modello continuo bisogna definire esplicitamente le componenti della deformazione. Cauchy lo fa in un suo lavoro del 1827 [81] dove introduce la deformazione locale dell'elemento lineare come variazione percentuale di lunghezza di un segmento infinitesimo. Essa, nell'ambito dei piccoli spostamenti, viene a dipendere dalle sei funzioni $\partial\xi/\partial a$, $\partial\eta/\partial b$, $\partial\zeta/\partial c$, $\partial\xi/\partial b + \partial\eta/\partial a$, $\partial\xi/\partial c + \partial\zeta/\partial a$, $\partial\eta/\partial c + \partial\zeta/\partial b$, che assumono il ruolo di componenti della deformazione. Cauchy dà un significato geometrico solo alle prime tre componenti, che rappresentano le variazioni unitarie di lunghezza nella direzione degli assi coordinati. In ciò è meno esplicito di Euler e Lagrange che, nello studio della statica e dinamica dei fluidi, dove introducevano grandezze linearizzate della

⁴⁸ p. 144.

⁴⁹ Il termine *tesore* non appartiene a Cauchy, ma a Hamilton [186] e a Voigt [360]. Così non gli appartengono le regole formalizzate del calcolo tensoriale, che saranno precisate solo alla fine del secolo XIX da Ricci Curbastro (vedi in particolare [213], pp. 125-201).

⁵⁰ Da notare che in tutti i lavori sopra citati Cauchy fa ampio uso degli infinitesimi, mentre aveva già portato avanti le sue ricerche di analisi matematica con l'obiettivo di eliminare appunto gli infinitesimi. Questo atteggiamento è analogo a quello tenuto da Lagrange che, mentre nella *Théorie des fonctions analytiques* del 1797 sviluppava il modo per evitare l'uso degli infinitesimi, nella *Mécanique analytique* del 1788 usava gli infinitesimi, giustificando il loro uso per la maggiore semplicità [60].