Dortmunder Beiträge zur Entwicklung und Erforschung des Mathematikunterrichts

RESEARCH

Carolin Mayer

Zum algebraischen Gleichheitsverständnis von Grundschulkindern

Konstruktive und rekonstruktive Erforschung von Lernchancen

IEEM Institut für Entwicklung und Erforschung des Mathematikunterrichts

Springer Spektrum

Dortmunder Beiträge zur Entwicklung und Erforschung des Mathematik-unterrichts

Band 38

Reihe herausgegeben von
S. Hußmann
M. Nührenbörger
S. Prediger
C. Selter

Dortmund, Deutschland

Eines der zentralen Anliegen der Entwicklung und Erforschung des Mathematikunterrichts stellt die Verbindung von konstruktiven Entwicklungsarbeiten und rekonstruktiven empirischen Analysen der Besonderheiten, Voraussetzungen und Strukturen von Lehr- und Lernprozessen dar. Dieses Wechselspiel findet Ausdruck in der sorgsamen Konzeption von mathematischen Aufgabenformaten und Unterrichtsszenarien und der genauen Analyse dadurch initiierter Lernprozesse.

Die Reihe „Dortmunder Beiträge zur Entwicklung und Erforschung des Mathematikunterrichts" trägt dazu bei, ausgewählte Themen und Charakteristika des Lehrens und Lernens von Mathematik – von der Kita bis zur Hochschule – unter theoretisch vielfältigen Perspektiven besser zu verstehen.

Reihe herausgegeben von
Prof. Dr. Stephan Hußmann,
Prof. Dr. Marcus Nührenbörger,
Prof. Dr. Susanne Prediger,
Prof. Dr. Christoph Selter,
Technische Universität Dortmund, Deutschland

Weitere Bände in der Reihe http://www.springer.com/series/12458

Carolin Mayer

Zum algebraischen Gleichheitsverständnis von Grundschulkindern

Konstruktive und rekonstruktive Erforschung von Lernchancen

Mit einem Geleitwort von Prof. Dr. Marcus Nührenbörger

Springer Spektrum

Carolin Mayer
Fakultät für Mathematik, IEEM
Technische Universität Dortmund
Dortmund, Deutschland

Dissertation Technische Universität Dortmund, Fakultät für Mathematik, 2018

Erstgutachter: Prof. Dr. Marcus Nührenbörger
Zweitgutachter: Prof. Dr. Ralph Schwarzkopf
Tag der Disputation: 26.02.2018

Dortmunder Beiträge zur Entwicklung und Erforschung des Mathematikunterrichts
ISBN 978-3-658-23661-8 ISBN 978-3-658-23662-5 (eBook)
https://doi.org/10.1007/978-3-658-23662-5

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Springer Spektrum

Springer Spektrum ist ein Imprint der eingetragenen Gesellschaft Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH und ist ein Teil von Springer Nature
Die Anschrift der Gesellschaft ist: Abraham-Lincoln-Str. 46, 65189 Wiesbaden, Germany

Geleitwort

In den letzten Jahren gewinnt im internationalen und nationalen Raum die Frage nach der „algebraischen Qualität“ des Arithmetikunterrichts in der Grundschule an Bedeutung. Ansätze wie „Early Algebra“ oder „Prä-Algebra“ heben hervor, dass bereits in der Grundschule algebraische Denkprozesse eine hohe Bedeutung für mathematische Lernprozesse besitzen. Hierbei geht es nicht um eine frühe Auseinandersetzung mit Buchstaben oder die Kenntnis des formalen Symbolsystems im Mathematikunterricht der Grundschule. Es rücken vielmehr arithmetische Muster und Strukturen in den Vordergrund, die von den Kindern erforscht und hinterfragt werden sollen. Frühe Algebra zielt somit auf ein strukturell nachhaltiges Verständnis elementarer arithmetischer Gesetzmäßigkeiten und Zusammenhänge, das einerseits an Zahlen und Termen gebunden ist, andererseits deren Verallgemeinerbarkeit exemplarisch aufgezeigt.

Frau Mayer konzentriert sich hierzu auf das Gleichheitsverständnis von Kindern, das sich beim Vergleichen von Termen und beim Erkennen, Beschreiben und Begründen der Gleichheit bzw. Ungleichheit von Termen zeigt. In der vorliegenden Arbeit arbeitet sie diverse Charakteristika des Verstehens von Gleichheiten bei Grundschulkindern heraus und zeigt Bezüge zwischen dem argumentierenden Verallgemeinern und der Entwicklung algebraischen Denkens, die schließlich zur Weiterentwicklung von Lernumgebungen für Kinder genutzt werden. Im theoretischen Teil der Arbeit werden spezifische Bezüge hergestellt zwischen Ansätzen der elementaren Algebra in der Sekundarstufe und der Entwicklung eines algebraischen Denkens in der Grundschule. Frau Mayer stellt deutlich heraus, wie die Algebraisierung des Arithmetikunterrichts den Blick der Kinder auf allgemeine Rechenstrategien und auf Beziehungen zwischen einzelnen Objekten und Operationen öffnen kann. Hierzu verknüpft sie geschickt algebraisches Denken mit den von Winter entwickelten Gleichheitskonzepten, um das algebraische Gleichheitsverständnis von Grundschulkindern begrifflich und empirisch zu erfassen. Darüber hinaus hebt Frau Mayer die Bedeutung einer argumentativ geprägten und die mathematischen Strukturen fokussierenden Sichtweise auf arithmetische Phänomene für die Entwicklung eines algebraisch geprägten Gleichheitsverständnisses heraus. Die Verzahnung des algebraischen Denkens im Kontext von Gleichheiten mit argumentationstheoretischen Perspektiven auf mathematisches Lernen mündet theoriegenerierend in ein Modell zur Charakterisierung des algebraischen Gleichheitsverständnisses bei Kindern, das in den argumentationstheoretischen Analysen aufgegriffen und geschärft wird.

Das theoretische Konstrukt des algebraischen Gleichheitsverständnisses gewinnt im Weiteren an empirischer Relevanz: Frau Mayer konstruiert hierzu zwei substanzielle Lernumgebungen (Rechenketten und Malkreuze) und erprobt diese in 88 Partnerinterviews mit insgesamt 34 Kindern der vierten Klasse. Die Lernumgebungen gründen auf vier Design-Prinzipien zur Entwicklung von algebraisch ausgerichteten Aufgabenstellungen in der Grundschule: „Gleichheiten ohne Gleichheitszeichen", „interaktives und kooperatives Lernen", „Balance zwischen empirischer Situiertheit und relationaler Allgemeinheit" sowie „produktive Irritationen" als fachlich-soziale Anlässe für strukturelle Argumentationen. Die Arbeit ist methodologisch in die interpretative Unterrichtsforschung und in die qualitative Argumentationstheorie nach Toulmin eingebettet. Anhand der Vielzahl an Daten arbeitet Frau Mayer unterschiedliche Charakteristika eines algebraischen Gleichheitsverständnisses heraus und konkretisiert diese exemplarisch anhand einzelner Fallanalysen.

Die sorgsamen und spannend lesbaren Fallanalysen bieten den Leserinnen und Lesern fundierte Einblicke in die verschiedenen Perspektiven auf das algebraische Gleichheitsverständnis von Grundschulkindern und auf deren relationalen und funktionalen Gleichheitsdeutungen. Zugleich bietet die Arbeit aber auch fachdidaktisch fundierte Hinweise für das Design von Aufgabenstellungen, mit denen sowohl mündliche als auch schriftliche Formen eines algebraischen Gleichheitsverständnisses von Kindern in der Grundschule angeregt werden können.

Marcus Nührenbörger

Danksagung

Mein größter Dank gilt *Prof. Dr. Marcus Nührenbörger*, der mir zunächst das Vertrauen zur Anfertigung dieser Arbeit entgegenbrachte und mich auf dem Weg dorthin durch seine kontinuierliche Begleitung und zielführende Beratung unterstützte.

Prof. Dr. Ralph Schwarzkopf danke ich ganz herzlich, da er sich nicht nur als Zweitgutachter dieser Arbeit bereit erklärte, sondern meine Arbeit ebenso durch intensive Gespräche sowie kritische Fragen und Anmerkungen inhaltlich begleitete und so die Arbeit immer wieder konstruktiv bereicherte.

Der *AG Nührenbörger* danke ich ganz herzlich für die gemeinsamen AG-Sitzungen, den produktiven inhaltlichen Austausch, das Aufwerfen von Fragen und Diskussionen sowie insbesondere das intensive gemeinsame Analysieren der Transkriptausschnitte.

Dorothea Tubach, *Sabrina Transchel* und *Annika Pott* danke ich für eine wunderbare Bürogemeinschaft. Sie halfen mir während des Entstehens der Dissertation nicht nur durch inhaltliche Diskussionen weiter, sondern waren insbesondere ständige Begleiterinnen in allen Höhen und Tiefen des Promovierens.

Monika London danke ich für die unzähligen intensiven Gespräche, die die vorliegende Arbeit auf besondere Weise bereicherten und gleichsam den Blick auf weitere Forschungslücken und Ideen zur Weiterarbeit eröffneten.

Dem *Funken-Programm* danke ich insbesondere für den produktiven interdisziplinären Austausch, der dieser Arbeit immer wieder einen neuen Blickwinkel gab.

Den *Lehrern*, *Kindern und Eltern* danke ich ganz besonders für ihr Interesse und die Mitarbeit an den empirischen Erprobungen, ohne die die Arbeit nicht hätte entstehen können.

Mein besonderer Dank gilt meiner *Familie,* die sowohl durch Korrekturlesen als auch durch ihr stetiges Begleiten, Motivieren und ihr Interesse an der Arbeit maßgeblich zum Entstehen dieser Dissertation beitrugen.

Inhaltsverzeichnis

Geleitwort .... **V**

Danksagung .... **VII**

Abbildungsverzeichnis .... **XIII**

Tabellenverzeichnis .... **XVII**

Transkriptionsregeln .... **XXI**

Einleitung **1**

1 Gleichheiten im Mathematikunterricht der Grundschule **5**

1.1 Die Verwendung des Gleichheitszeichens 6

1.1.1 Empirische Erkenntnisse zur Interpretation des Gleichheitszeichens 7

1.1.2 Zur Problematik bei der Verwendung des Gleichheitszeichens 11

1.2 Early Algebra 12

1.2.1 Elementare Algebra in der Sekundarstufe 12

1.2.2 Algebraisches Denken in der Grundschule 13

1.2.3 Algebraisches Denken als Teil eines umfassenden arithmetischen Verständnisses 17

1.2.4 Empirische Erkenntnisse zum algebraischen Denken von Grundschulkindern 19

1.3 Die Entwicklung eines algebraischen Gleichheitsverständnisses 23

1.3.1 Gleichheitskonzepte nach Winter (1982) 23

1.3.2 Komponenten aus der Early Algebra im Kontext von Gleichheiten 26

1.3.3 Empirische Erkenntnisse zur Entwicklung eines algebraischen Gleichheitsverständnisses von Grundschulkindern 31

1.4 Gleichungen in der Sekundarstufe 32

1.4.1 Vorstellungen von Lernenden zur Gleichwertigkeit von Termen in der Sekundarstufe 33

1.4.2 Konsequenzen für die Grundschule 36

1.5 Zusammenfassung und Forschungsfragen 38

2 Argumentationsprozesse im Mathematikunterricht der Grundschule 41
2.1 Lernen und Interaktion ... 41
2.1.1 Lehr-Lern-Theorien ... 41
2.1.2 Aktiv-entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht ... 44
2.1.3 Formen des Lernens nach Miller ... 46
2.1.4 Die Entwicklung mathematischen Wissens in der Interaktion ... 49
2.2 Mathematische Argumentationsprozesse ... 53
2.2.1 Argumente: Mathematische Begründungen ... 55
2.2.2 Argumentationen: Soziale Prozesse ... 57
2.2.3 Produktive Irritationen als Argumentationsanlass ... 59
2.3 Gleichheiten und Argumentationsprozesse ... 64
2.4 Zusammenfassung ... 66

3 Methode und Design der Untersuchung ... 69
3.1 Fachdidaktische Entwicklungsforschung im Dortmunder Modell ... 69
3.2 Forschungsfragen ... 73
3.3 Designentwicklung ... 74
3.3.1 Der Einsatz substanzieller Lernumgebungen ... 75
3.3.2 Design-Prinzipien ... 78
3.3.3 Lernumgebung Rechenketten: Stofflicher Hintergrund und methodische Spezifizierung ... 80
3.3.4 Lernumgebung Malkreuze: Stofflicher Hintergrund und methodische Spezifizierung ... 89
3.4 Aufbau und Ablauf der empirischen Untersuchung ... 92
3.5 Analysemethoden ... 93
3.5.1 Interpretative Unterrichtsforschung ... 94
3.5.2 Argumentationsanalyse nach Toulmin ... 96

4 Ergebnisse der Design-Experimente ... 101
4.1 Charakteristika eines algebraischen Gleichheitsverständnisses ... 102
4.1.1 Gemeinsame Gegenstandszuweisung: Gleichheitskonzept Endzustand ... 103
4.1.2 Gemeinsame Gegenstandszuweisung: Qualitative und quantitative Vergleiche ... 104
4.1.3 Gemeinsame Gegenstandszuweisung: Relationale und funktionale Vermittlerterme ... 106
4.1.4 Gemeinsame Gegenstandszuweisung: Zahlvorstellung ... 109
4.1.5 Verallgemeinerung ... 111
4.1.6 Deutung von Operationen und Objekten ... 112
4.2 Charakterisierung der Lernumgebungen zur Entwicklung eines algebraischen Gleichheitsverständnisses ... 115
4.2.1 Balance zwischen Irritation und Erkenntnis ... 116

4.2.2 Balance zwischen empirischer Situiertheit und relationaler Allgemeinheit ... 118

5 Argumentationsanalysen zur Charakterisierung eines algebraischen Gleichheitsverständnisses ... 123

5.1 Relationale Gleichheitsdeutungen ... 124

5.1.1 Ordinal-qualitative Vorstellungen ... 124

5.1.2 Kardinal-qualitative Vorstellungen ... 129

5.1.3 Ordinal-quantitative Vorstellungen ... 131

5.1.4 Kardinal-quantitative Vorstellungen ... 138

5.2 Funktionale Gleichheitsdeutungen ... 146

5.2.1 Quantitative-Rechenzahl-Vorstellungen ... 147

5.2.2 Ordinal-quantitative Vorstellungen ... 153

6 Interpretative Analysen zur Charakterisierung der Lernumgebungen ... 161

6.1 Balance zwischen Irritation und Erkenntnis ... 161

6.1.1 Aufzählung isolierter Vergleiche ... 161

6.1.2 Entwicklung von Zusammenhängen zwischen Vergleichen 164

6.1.3 Diskrepanz zwischen exemplarischen und allgemeingültigen Erklärungen ... 165

6.2 Balance zwischen empirischer Situiertheit und relationaler Allgemeinheit ... 169

6.2.1 Notationsform in der Lernumgebung „Rechenketten“ ... 169

6.2.2 Notationsform in der Lernumgebung „Malkreuze“ ... 175

7 Fazit und Ausblick ... 185

7.1 Fazit und Ausblick zum algebraischen Gleichheitsverständnis von Grundschulkindern ... 186

7.1.1 Zusammenfassung der Ergebnisse ... 186

7.1.2 Folgerungen für die Unterrichtspraxis ... 187

7.1.3 Weiterführende Fragen für die Erforschung von Lernprozessen ... 188

7.2 Fazit und Ausblick zu den Lernumgebungen zur Entwicklung eines algebraischen Gleichheitsverständnisses ... 190

7.2.1 Zusammenfassung der Ergebnisse ... 190

7.2.2 Folgerungen für die Unterrichtspraxis ... 191

7.2.3 Weiterführende Fragen für die Erforschung von Lernprozessen ... 192

Literaturverzeichnis ... 195

Abbildungsverzeichnis

Abbildung 0.1 Kettennotation mit dem Gleichheitszeichen von Amelie......... 1
Abbildung 0.2 Rechenketten aus der vorliegenden Arbeit 2
Abbildung 1.1 Bewertete Gleichungen der Form a±b=c±d (Borromeo Ferri & Blum 2011, S. 129f.)............................ 10
Abbildung 1.2 Handlungs- und Beziehungsaspekt in der elementaren Algebra (Malle 1993, S.144)... 13
Abbildung 1.3 Das Zusammenspiel von Arithmetik und Algebra und ihren Denkweisen (in Anlehnung an Malle 1993, S. 144)............. 19
Abbildung 1.4 Flächeninhalt des Rechtecks $(a+b)\cdot c = a\cdot c + b\cdot c$.................. 34
Abbildung 2.1 Argumentationskette nach Bezold 2009, S. 37...................... 58
Abbildung 2.2 Produktive Irritation 63
Abbildung 2.3 Aufgabenbeispiel aus der vorliegenden Arbeit 64
Abbildung 2.4 Zahlenmauern mit gleichem Zielstein (Nührenbörger & Schwarzkopf 2015a) 65
Abbildung 3.1 Zyklus der fachdidaktischen Entwicklungsforschung im Dortmunder Modell (Prediger et al. 2012, S. 453)............... 72
Abbildung 3.2 Lehr-Lern-Arrangement der vorliegenden Arbeit................. 77
Abbildung 3.3 Rechenketten im Zahlenbuch 2 und 3 (Wittmann & Müller 2012b, S. 57, 2012c, S.19) 81
Abbildung 3.4 Aufgabenstellungen im Kontext von Rechenketten (Wittmann & Müller 2012b, S. 57, 2012c, S.19) 81
Abbildung 3.5 Rechenkette aus der vorliegenden Arbeit 83
Abbildung 3.6 Aufgabe „30er-Ketten vergleichen“ 84
Abbildung 3.7 Aufgabe „Rechenketten mit Zielzahl 2450 erkennen“ 85
Abbildung 3.8 Aufgabe „Rechenketten mit gleicher Zielzahl finden“.......... 86
Abbildung 3.9 Aufgabe „Zweite Pfeilzahl finden“ 87
Abbildung 3.10 Aufgabe „Rechenketten verlängern“ 88
Abbildung 3.11 Malkreuz-Aufgabe im Zahlenbuch 4 (Wittmann & Müller 2013, S. 19) 89
Abbildung 3.12 Aufgabe im Aufgabenformat Malkreuze aus der vorliegenden Arbeit... 91
Abbildung 3.13 $12\cdot 12$-Malkreuz zur Aufgabe $13\cdot 12$ 92
Abbildung 3.14 Iterativer Erprobungszyklus der vorliegenden Arbeit............ 93
Abbildung 3.15 Argumentationsschema nach Toulmin.................................. 98
Abbildung 3.16 Argumentationsschema zu 5+5=6+4 99

Abbildung 4.1 Charakteristika eines algebraischen Gleichheitsverständnisses ... 102
Abbildung 4.2 Zwei Terme zum Begründen der Gleichheit miteinander vergleichen ... 105
Abbildung 4.3 Relationaler Vermittlerterm ... 107
Abbildung 4.4 Vermittlerterm $x\cdot 30+60-30$ ... 107
Abbildung 4.5 Funktionaler Vermittlerterm ... 108
Abbildung 4.6 Vermittlerterm $7\cdot 350$ ... 109
Abbildung 4.7 Balance zwischen empirischer Situiertheit und relationaler Allgemeinheit ... 111
Abbildung 4.8 Operationen und Objekte der Terme $4\cdot 30$ und $6\cdot 30$ ... 113
Abbildung 4.9 Operationen und Objekte der Terme $327\cdot 30$ und $(19620/2)\cdot 2$ ... 114
Abbildung 4.10 Operationen als Objekte denken ... 114
Abbildung 4.11 Punktefeld und Malkreuz zur Aufgabe $14\cdot 15$ ... 119
Abbildung 4.12 Deutung der Lernenden der Aufgabe $14\cdot 15$ ... 120
Abbildung 4.13 Individuelle Notation im Malkreuz ... 120
Abbildung 5.1 Charakteristika eines algebraischen Gleichheitsverständnisses ... 123
Abbildung 5.2 Charakterisierung des algebraischen Gleichheitsverständnisses: relational-ordinal-qualitative Vorstellungen ... 125
Abbildung 5.3 Jens und Noahs Arbeitsblatt der 30er-Rechenketten ... 125
Abbildung 5.4 Argumentationsschema Noah ... 128
Abbildung 5.5 Charakterisierung des algebraischen Gleichheitsverständnisses: relational-kardinal-qualitative Vorstellungen ... 129
Abbildung 5.6 30er-Rechenketten von Melissa und Lena ... 130
Abbildung 5.7 Argumentationsschema Melissa ... 131
Abbildung 5.8 Charakterisierung des algebraischen Gleichheitsverständnisses: relational-ordinal-quantitative Vorstellungen ... 132
Abbildung 5.9 Argumentationsschema Jens ... 134
Abbildung 5.10 Lineare Darstellung der Gleichheit ... 135
Abbildung 5.11 Lineare Darstellung der Gleichheit 2 ... 137
Abbildung 5.12 Argumentationsschema Melissa und Lena ... 138
Abbildung 5.13 Charakterisierung des algebraischen Gleichheitsverständnisses: relational-kardinal-quantitative Vorstellungen ... 139
Abbildung 5.14 Rechenketten mit Startzahlen 8 und 7 ... 139
Abbildung 5.15 Argumentationsschema Nils und Dilay ... 142
Abbildung 5.16 Rechenketten $7\cdot 70$ und $6\cdot 70+70$ ... 142
Abbildung 5.17 Rechenkette $10\cdot 70\pm x=490$ ... 142

Abbildung 5.18 Argumentationsschema Felix und Julian 144
Abbildung 5.19 Verlängerte Rechenkette 145
Abbildung 5.20 Argumentationsschema Jens.. 146
Abbildung 5.21 Charakterisierung des algebraischen Gleichheitsverständnisses: Funktional-quantitative-Rechenzahl-Vorstellungen... 147
Abbildung 5.22 Rechenketten mit gleicher Zielzahl 148
Abbildung 5.23 Argumentationsschema Amelie und Jule 1.......................... 149
Abbildung 5.24 Argumentationsschema Amelie und Jule 2.......................... 150
Abbildung 5.25 350er-Rechenketten... 151
Abbildung 5.26 Argumentationsschema Jens.. 152
Abbildung 5.27 Charakterisierung des algebraischen Gleichheitsverständnisses: funktional-ordinal-quantitative Vorstellungen. 153
Abbildung 5.28 15·15 und 14·14 Malkreuz Jens und Noah.......................... 154
Abbildung 5.29 Argumentationsschema Jens, Z.198 155
Abbildung 5.30 13·13- und 16·16-Malkreuz.. 156
Abbildung 5.31 Erweiterte Malkreuze 156
Abbildung 5.32 Neu ausgefülltes Malkreuz von Till (links) und Philipp (rechts)... 157
Abbildung 5.33 Argumentationsschema Till & Philipp 159
Abbildung 6.1 Rechenketten mit den Startzahlen 10 und 20....................... 166
Abbildung 6.2 Rechenketten-Notation 170
Abbildung 6.3 Julians und Felix Lösung zur Aufgabe „Rechenketten verlängern“.. 172
Abbildung 6.4 Schülerlösungen zur Aufgabe „Verlängern von Rechenketten“.. 174
Abbildung 6.5 Notationen im Malkreuz 182
Abbildung 7.1 Rechenketten-Aufgabe („Das Zahlenbuch 2“, Arbeitsheft S. 37)192 192

Tabellenverzeichnis

Tabelle 1.1 Prozentualer Anteil der Lösungen zur Gleichung 8+4=c+5 (Falkner et al. 1999, S. 233) 9
Tabelle 1.2 Gleichheitskonzepte nach Winter (1982) 26
Tabelle 2.1 Drei unterschiedliche Formen des Lernens (Miller 1986, S. 140) 49
Tabelle 3.1 Forschungsfragen der vorliegenden Arbeit 74
Tabelle 3.2 Übersicht über die vier Design-Prinzipien der vorliegenden Arbeit 80
Tabelle 4.1 Forschungsfragen der vorliegenden Arbeit auf Forschungsebene 101
Tabelle 4.2 Struktur der Rechenketten und Deutung der Lernenden 119
Tabelle 7.1 Inhaltsbezogene Kompetenzen im Kontext eines algebraischen Gleichheitsverständnisses (Kultusministerkonferenz 2004) 188

Transkriptionsregeln

35	Die einzelnen Wortbeiträge sind durchnummeriert
I	Interviewern
J	Jens
	Die Namen der Kinder sind anonymisiert. Im Transkript ist immer der Anfangsbuchstabe des Pseudonyms angegeben. Jedes Pseudonym wurde nur einmal vergeben
,	Kurzes Absetzen innerhalb einer Äußerung
(.)	Pause von ca. 1 Sekunde
(..)	Pause von ca. 2 Sekunden
(...)	Pause von ca. 3 Sekunden
(8 sec)	Bei längeren Pausen ist deren Dauer angegeben
mehr	Besonders betonte Wörter
eigentlich	Besonders lang gezogene Wörter
(zeigt auf Noahs Startzahlen)	Handlungen, nonverbale Ausdrücke
#	Ein Sprecher fällt dem anderen ins Wort.
	Gibt es mehrere Unterbrechungen, werden die Rauten durchnummeriert.
Mhm	eindeutige Bejahung

Einleitung

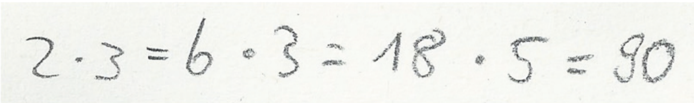

Abbildung 0.1 Kettennotation mit dem Gleichheitszeichen von Amelie

Derweilen vielfach erforscht und diskutiert ist die Problematik bei der Verwendung des Gleichheitszeichens in der Primar- und Sekundarstufe. Die meisten Lernenden verstehen das Gleichheitszeichen als Handlungsaufforderung, eine Ergebniszahl zu berechnen oder, wie auch Amelies Aufzeichnung in Abbildung 0.1. zeigt, als Symbol, welches den nächsten Rechenschritt ankündigt. Sie verstehen das Gleichheitszeichen in der Regel nicht als Zeichen für die Gleichwertigkeit zweier Terme (Winter 1982). Insbesondere diese Sichtweise auf Gleichungen ist jedoch für erfolgreiches mathematisches Lernen sowohl in der Grundschule als auch danach von besonderer Bedeutung, da viele Variablengleichungen erst mit einem derartigen Verständnis gelöst werden können und in der Grundschule erst eine auf die Gleichwertigkeit von Termen bedachte Sichtweise strategisches Rechnen ermöglicht.

Die Erforschung eines derartigen algebraischen Gleichheitsverständnisses steht im Mittelpunkt der vorliegenden Arbeit. In bisherigen Untersuchungen wurde ein einseitiges, auf die Ergebnisbestimmung fokussiertes Verständnis von Lernenden im Kontext der Verwendung des Gleichheitszeichens vielfach analysiert. Ob und wie Lernende jedoch ein algebraisches Gleichheitsverständnis losgelöst von dem formalen Symbol des Gleichheitszeichens zeigen, ist bislang wenig erforscht. Die vorliegende Arbeit möchte anhand der beiden entwickelten Lernumgebungen „Rechenketten“ und „Malkreuze“[1] einen Beitrag für diese Forschungslücke leisten. Bei der Entwicklung der Lernumgebungen wurde bewusst auf die Verwendung des Gleichheitszeichens verzichtet, um den Blick der Lernenden nicht auf die Ergebnisermittlung zu lenken, sondern auf die Gleichheitsbeziehung zwischen Termen.

---

1 Die beiden Lernumgebungen wurden auf Grundlage der Aufgabenformate aus dem Schulbuch „Das Zahlenbuch“ entwickelt (Wittmann & Müller 2012a, 2012b, 2012c, 2013).

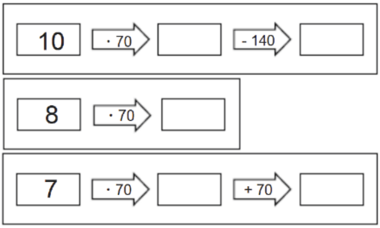

Abbildung 0.2 Rechenketten aus der vorliegenden Arbeit

Der Fokus der entwickelten und in der empirischen Untersuchung eingesetzten Aufgaben liegt, wie obige Abbildung zeigt, auf der Entdeckung, Erkundung und Begründung von Gleichheitsbeziehungen in der Grundschule. Die Lernenden werden, anders als in vielen bisherigen Untersuchungen, nicht mit Gleichungen konfrontiert, welche sie bewerten, vervollständigen oder verbessern sollen. Vielmehr beschäftigen sie sich im Kontext der beiden substanziellen Lernumgebungen auf kindgerechte Weise mit Beziehungen zwischen Termen und denken über Gleichheitsbeziehungen nach. Dabei sollen sie Begründungen entwickeln, welche die zugrundeliegende mathematische Struktur der gleichwertigen Terme in den Blick nehmen.

Amelie, die obige Kettennotation vornahm und im Zuge des Umgangs mit dem Gleichheitszeichen scheinbar ein Verständnis zeigt, welches die Gleichwertigkeit von Termen unberücksichtigt lässt, erklärt ihrer Partnerin wie folgt die Gleichheitsbeziehung der Terme aus Abbildung 0.2:

Guck mal. Das hat ja hier alles mit der 7 zu tun ne? Und die 14 ist doch in der Siebenerreihe ne? *(zeigt auf die Rechenkette 10·70-140)* Und zwei <u>mal</u> sieben sind 14 und wenn ich jetzt die 10 hab‘ *(zeigt auf die Rechenkette 10·70-140),* dann könnte ich quasi minus zwei, dann passt das zur acht *(zeigt auf die Startzahl 8)* und hier einmal plus eins quasi *(zeigt erst auf die zweite Pfeilzahl, dann auf die Startzahl der Rechenkette 7·70+70)* dann hab ich, dann passt das auch zur acht.
[...] Dann würd‘ das quasi das gleiche Ergebnis ergeben wie hier *(zeigt erst auf die Zielzahl der Rechenkette 10·70-140, dann auf die Zielzahl der Rechenkette 8·70)*

Der kurze Transkriptausschnitt zeigt, dass Amelie hier Terme zueinander in Beziehung setzt, eine strukturelle Sichtweise auf die Aufgaben einnimmt und die Gleichheit begründet. Während sie bei der formalen Gleichungsnotation die Gleichwertigkeit der Terme scheinbar unberücksichtigt lässt, scheint sie bei der Begründung der Rechenketten-Terme durchaus ein algebraisches Gleichheitsverständnis zu zeigen.

Wie Amelie und andere Lernende bei der Ermittlung und Begründung der Gleichheit vorgehen, welche Vorstellungen sie einnehmen und wie sich somit ein algebraisches Gleichheitsverständnis charakterisieren lässt, möchte die vorliegende Arbeit nachgehen und beantworten. Gleichsam interessiert das Potenzial der Lernumgebungen, welche auf eine formale Gleichungsnotation verzichten, im Hinblick auf die Entwicklung eines algebraischen Gleichheitsverständnisses.

Aufbau der Arbeit

Das erste Kapitel der Arbeit stellt fachdidaktische Grundlagen zum Lerngegenstand der arithmetischen Gleichheiten dar. Dafür wird zunächst die Problematik um die Verwendung des Gleichheitszeichens theoretisch und empirisch erläutert, ehe darauffolgend ebenso theoretische und empirische, für den vorliegenden Lerngegenstand relevante Ausgangspunkte der Early Algebra aufgeführt werden. Anschließend wird die Entwicklung eines algebraischen Gleichheitsverständnisses aus theoretischer Perspektive dargelegt und mit Überlegungen zu Gleichungen in der Sekundarstufe abgeglichen.

Nach der theoretischen Fundierung des Lerngegenstands werden in Kapitel 2 die für die vorliegende Arbeit relevanten lerntheoretischen Grundlagen vorgestellt und erläutert. Dabei wird zum einen der Fokus auf Lernen im Kontext von Interaktionsprozessen gelegt und zum anderen im Besonderen der Zusammenhang zu Argumentationsprozessen im Mathematikunterricht. Abschließend werden diese Überlegungen mit denen zum Lerngegenstand der arithmetischen Gleichheiten vereint.

Kapitel 3 zeigt den forschungsmethodischen Rahmen der Arbeit auf. Nach einem theoretischen Überblick über das Forschungsprogramm der fachdidaktischen Entwicklungsforschung im Dortmunder Modell, in dessen Rahmen die vorliegende Arbeit angesiedelt ist, werden die Forschungsfragen sowie die Designentwicklung des verwendeten Lehr-Lern-Arrangements vorgestellt und der Aufbau und Ablauf der empirischen Untersuchung dargelegt. Die beiden Analysemethoden der interpretativen Unterrichtsforschung sowie der Argumentationsanalysen nach Toulmin, welche für die Auswertung der empirischen Untersuchung leitend sind, werden abschließend erläutert.

Im vierten Kapitel werden die gewonnenen Ergebnisse der empirischen Untersuchung zusammenfassend dargestellt. Die Ergebnisse zu den Charakteristika eines algebraischen Gleichheitsverständnisses (Kap. 4.1) wurden aus den Argumentationsanalysen nach Toulmin generiert, welche in Kapitel 5 nachzulesen sind. Die Ergebnisse zur Charakterisierung der Lernumgebungen (Kap. 4.2) wurden aus den interpretativen Analysen gewonnen, welche Kapitel 6 darlegt.

Abschließend wird in Kapitel 7 die vorliegende Arbeit mit ihren Forschungsergebnissen zusammengefasst, Folgerungen für die Unterrichtspraxis sowie weiterführende Fragen für die Erforschung von Lernprozessen aufgezeigt.

1 Gleichheiten im Mathematikunterricht der Grundschule

„Du hast den gleichen Stift wie ich“, „Wir beide sind gleich groß“, „In jeder Mannschaft müssen gleich viele Kinder sein“ – Den Begriff der Gleichheit kennen wir aus unserem alltäglichen Sprachgebrauch. Im Alltag weisen wir mit dem Begriff der Gleichheit häufig auf äußerliche Gemeinsamkeiten hin. Stimmen unsere Stifte in ihren Charakteristiken wie Farbton und Marke überein, können wir feststellen, dass sie gleich sind. Aber auch im Sinne eines Relationsausdrucks ist der Begriff der Gleichheit im Alltag bekannt. Ist ein Kind weder *größer* noch *kleiner* als ein anderes, sind beide Kinder *gleich* groß. Ihre Größe kann durch eine Gleichheitsbeziehung beschrieben werden. Ebenso sind in zwei Mannschaften mit *gleich* vielen Kindern nicht in einer Mannschaft *mehr* oder *weniger* Kinder. Stellen wir im Alltag eine Gleichheit fest, sind wir in der Regel erstaunt, halten es für kommunikationsbedürftig, für ein besonderes Phänomen.

Auch im Mathematikunterricht in der Schule stellt die Gleichheit ein besonderes Phänomen dar und ist für das weitere Lernen bedeutsam. Während Gleichheiten in geometrischen Kontexten in Form von kongruenten Abbildungen auftauchen, spielen sie im arithmetischen Anfangsunterricht zunächst bei der Ausbildung von Grundvorstellungen eine zentrale Rolle. Es sollen „tragfähige mentale Modelle für mathematische Begriffe“ (vom Hofe 2003, S. 5) entwickelt werden, die, neben einem flexiblen Verständnis von Zahlen, Operationsvorstellungen betreffen. Ein erstes Verständnis von Gleichheit entwickeln die Lernenden hier zunächst beim Aufbau additiver (und subtraktiver) Vorstellungen. Zwei Mengen, wie 4 und 3, werden zusammengefügt und es entsteht eine neue Menge, 7. Die Mächtigkeit der neuen Menge entspricht dabei stets der Mächtigkeit beider zusammengefügten Einzelmengen. Die zusammengefügten Mengen und die so entstandene Menge sind gleich groß: 4+3=7. Neben dieser ersten Grundvorstellung der Addition reihen sich, basierend auf einem Teil-Ganzes-Verständnis, weitere additive und subtraktive Vorstellungen, ebenso wie Grundvorstellungen zur Multiplikation und Division, hinzu. Die Gleichheit wird hier stets durch das Verhältnis von einer Gesamtmenge zu zwei (oder mehreren) Teilmengen angezeigt. Für die wichtige Ausbildung von grundlegenden Fertigkeiten wie dem ‚Einspluseins’ oder ‚Einmaleins’ ist ein derartiges Verständnis von Gleichheit unerlässlich.

Neben dem Verständnis von Gleichheit, das auf der Einsicht in das Verhältnis zweier (oder mehrerer) Teilmengen zu einer Gesamtmenge beruht, tritt bereits im Anfangsunterricht ein Gleichheitsverständnis, welches das Verhältnis von mehreren, unterschiedlichen Teilmengen zueinander betrifft. Es gilt nicht

C. Mayer, *Zum algebraischen Gleichheitsverständnis von Grundschulkindern*,
Dortmunder Beiträge zur Entwicklung und Erforschung des Mathematikunterrichts 38,
https://doi.org/10.1007/978-3-658-23662-5_1

nur 4+3=7, sondern ebenso 4+3=5+2=2·3+1=... Die strukturelle Einsicht in diese Gleichheitsbeziehungen auf Grundlage der algebraischen Rechengesetze ist Voraussetzung für flexibles Rechnen. Dabei sollen Lernende unterschiedliche Rechenstrategien kennen und situationsangemessen nutzen (Ministerium für Schule und Weiterbildung NRW 2008). Die vermeintliche Eindeutigkeit der Gleichheit im Sinne eines Faktenwissens wird durch das Erkennen und Nutzen struktureller Beziehungen zur Mehrdeutigkeit.

Ähnlich wie beim Gebrauch des Gleichheitsbegriffs im Alltag kann auch die mathematische Gleichheit aufgrund äußerlicher Gemeinsamkeiten festgestellt werden. Während im Geometrieunterricht Kongruenzabbildungen durch ihren deckungsgleichen Charakter festgestellt werden können, können arithmetische Gleichheiten stets durch das Ausrechnen und Prüfen gleicher Ergebnisse verstanden werden. Während im Alltag ein oberflächliches Erfassen von Gleichheit oftmals zufriedenstellend ist, reicht dies für das komplexe Verstehen mathematischer Gleichheiten nicht aus. Hierfür ist die Einsicht in Operationsvorstellungen sowie strukturelle Zusammenhänge grundlegend.

Neben der Entwicklung von inhaltlichen Vorstellungen zur arithmetischen Gleichheit werden die Schülerinnen und Schüler auf symbolischer Ebene mit einem neuen, für sie in der Regel bislang unbekannten Zeichen konfrontiert: dem Gleichheitszeichen. Das Gleichheitszeichen zeigt die Gleichwertigkeit zweier (bzw. mehrerer) Terme an. Diese Tatsache sowohl inhaltlich zu verstehen als auch entsprechend zu notieren, stellt die Lernenden vor eine Herausforderung. Im Folgenden wird daher zunächst die Problematik bei der Verwendung dieses besonderen mathematischen Zeichens erläutert, bevor im Anschluss detailliert auf die inhaltlichen Vorstellungen zur Gleichwertigkeit von Termen eingegangen wird.

1.1 Die Verwendung des Gleichheitszeichens

Die folgende Szene stammt aus einem Gespräch der Autorin mit zwei Schülerinnen der vierten Klasse, Amelie und Jule, über die Bedeutung des Gleichheitszeichens. Sie zeigt exemplarisch verbreitete Vorstellungen über das Gleichheitszeichen von Lernenden auf.

I Was bedeutet denn das Gleichheitszeichen?
A Das Ergebnis
I Wie meinst du das?
A Das Ergebnis von einer Aufgabe
I Mhm. Und Jule, wie verstehst du das Gleichheitszeichen?
J Dass das ähm voraussagt, welches Ergebnis (.) das eine Aufgabe ist

Amelie (A) und Jule (J) assoziieren das Gleichheitszeichen mit dem Ergebnis einer Aufgabe. Amelie scheint das Gleichheitszeichen mit dem Ergebnis einer

Aufgabe gleichzusetzen: Das Gleichheitszeichen „bedeutet“ das Ergebnis. Jule führt an, dass das Gleichheitszeichen das Ergebnis einer Aufgabe voraussagt: Das Gleichheitszeichen, welches nach einer Rechenaufgabe steht, weist den Lernenden darauf hin, dass im Folgenden das Ergebnis angeführt wird. Denkt man an die Funktion des Gleichheitszeichens auf dem Taschenrechner, sagt es bei entsprechender Betätigung das Ergebnis voraus. Auf dem Papier muss das Ausführen der Operationen noch von den Lernenden durchgeführt werden. Das Gleichheitszeichen kann als Signal verstanden werden, diese Operationen auszuführen.

Die Interpretation des Gleichheitszeichens, so wie sie Amelie und Jule in dem obigen Beispiel zeigen, ist typisch für viele Lernende, wie zahlreiche nationale und internationale Studien belegen. Winter wies bereits 1982 darauf hin, dass Lernende das Gleichheitszeichen zumeist operational auffassen, d.h. sie verstehen es als Aufforderung eine Rechnung, notiert auf der linken Seite des Zeichens auszuführen und das Ergebnis im Anschluss auf der rechten Seite zu notieren (Winter 1982). Eine derartige Aufgabe-Ergebnis-Deutung, wie Winter sie benennt, zeigen auch die beiden Schülerinnen im oben angeführten Beispiel. Amelie macht dies sprachlich explizit, indem sie die Termini „Aufgabe“ und „Ergebnis“ mit dem Gleichheitszeichen in Verbindung bringt.

Im Folgenden werden die Ergebnisse aus nationalen und internationalen Studien zur Interpretation und Verwendung des Gleichheitszeichens zusammengefasst.

1.1.1 Empirische Erkenntnisse zur Interpretation des Gleichheitszeichens

Bereits seit den 70er Jahren wurden empirische Untersuchungen zum Verständnis des Gleichheitszeichens bei Lernenden durchgeführt. Eine Auswahl von Ergebnissen wird im Folgenden dargestellt. Diese werden hinsichtlich der verschiedenen Aufgabenstellungen, wie sie in vielen Studien zu finden sind, unterteilt: die Interpretation des Gleichheitszeichens, die Verwendung dessen beim Lösen von unkonventionellen Gleichungen sowie die Verwendung beim Bewerten von unkonventionellen Gleichungen.

Verschiedene Studien zeigen, dass Lernende das Gleichheitszeichen auf ähnlich rechnerische Sicht interpretieren wie Amelie und Jule im obigen Beispiel. Werden die Lernenden nach der Bedeutung des Gleichheitszeichens gefragt, führen sie das Ausführen einer Rechnung oder das Ergebnis dieser an. Folgende Antworten von Lernenden zur Bedeutung des Gleichheitszeichens können verschiedenen nationalen und internationalen Studien entnommen werden:

„when two numbers are added, that’s what it turns out to be“ (Behr, Erlwanger & Nichols 1980, S. 13)

„what the problem’s answer is“ (Knuth, Stephens, McNeil & Alibali 2006, S. 303)

„immer nach einem = Zeichen steht das Ergebnis“ (Steinweg 2013, S. 75)