C. Cattaneo (Ed.)

CIME Summer Schools

Relativistic Fluid Dynamics

52

Bressanone, Italy 1970

Springer

FONDAZIONE CIME ROBERTO CONTI

C. Cattaneo (Ed.)

Relativistic Fluid Dynamics

Lectures given at a Summer School of the
Centro Internazionale Matematico Estivo (C.I.M.E.),
held in Bressanone (Bolzano), Italy,
June 7-16, 1970

Springer

FONDAZIONE CIME ROBERTO CONTI

C.I.M.E. Foundation
c/o Dipartimento di Matematica "U. Dini"
Viale Morgagni n. 67/a
50134 Firenze
Italy
cime@math.unifi.it

ISBN 978-3-642-11097-9 e-ISBN: 978-3-642-11099-3
DOI:10.1007/978-3-642-11099-3
Springer Heidelberg Dordrecht London New York

Reprint of the 1st ed. C.I.M.E., Ed. Cremonese, Roma 1971
With kind permission of C.I.M.E.

Printed on acid-free paper

Springer.com

CENTRO INTERNAZIONALE MATEMATICO ESTIVO

(C.I.M.E)

I Ciclo - Bressanone - dal 7 al 16 Giugno 1970

"RELATIVISTIC FLUID DYNAMICS"

Coordinatore: Prof. C. CATTANEO

CENTRO INTERNAZIONALE MATEMATICO ESTIVO

(C.I.M.E.)

PROBLEMS MATHEMATIQUES EN HYDRODYNAMIQUE RELATIVISTE

PHAM MAU QUAN

Corso tenuto a Bressanone dal 7 al 16 Giugno 1970

Chapitre 1

LES SCHEMAS FLUIDES EN HYDRODYNAMIQUE RELATIVISTE

§1. GENERALITES SUR LA DYNAMIQUE RELATIVISTE DES FLUIDES

---

1. Le cadre géométrique.

La mécanique relativiste des fluides a pour cadre géométrique l'espace-temps qui est une variété differentiable V de dimension 4, de classe C^{∞}, sur laquelle est donnée une structure pseudo-riemannienne g de signature $+---$. La géométrie de l'espace-temps (V, g) est celle de la connexion riemannienne canoniquement associée à g.

La métrique définie par g est dite de type hyperbolique normal. Elle induit sur l'espace vectoriel tangent $T_x(V)$ en chaque point x de V une structure d'espace-temps plat de Minkowski. En coordonnées locales (x^{α}) on a

$$g = g_{\alpha\beta}\, dx^{\alpha} \otimes dx^{\beta} \qquad (\alpha, \beta = 0, 1, 2, 3). \tag{1.1}$$

Le tenseur $g_{\alpha\beta}$ dit tenseur fondamental de gravitation est assujetti à vérifier un système d'équations aux dérivées partielles du second ordre qui généralise les équations de Laplace.-Poisson et qui donne naissance aux conditions de conservation. Ces équations sont les dix équations d'Einstein

$$S_{\alpha\beta} = \chi\, T_{\alpha\beta} \tag{1.2}$$

où $S_{\alpha\beta}$ ne dépend que de la structure riemannienne g de l'espace-temps, $T_{\alpha\beta}$ est de signification purement mécanique et χ un facteur constant.

Le tenseur $T_{\alpha\beta}$ dit tenseur d'impulsion-énergie du fluide doit décrire au mieux la distribution énergétique dans l'espace-temps. Le tenseur $S_{\alpha\beta}$ est astreint aux deux conditions suivantes:

1. $S_{\alpha\beta}$ ne dépendent que de $g_{\alpha\beta}$, de leurs dérivées des deux premiers ordres, sont linéaires par rapport aux dérivées du second ordre

2. $S_{\alpha\beta}$ est conservatif, c'est-à-dire tel que

$$\nabla_\alpha S^\alpha_\beta = 0 \tag{1.3}$$

On démontre[1] qu'on a nécessairement

$$S_{\alpha\beta} = h(R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}(R+k)g_{\alpha\beta})$$

où $R_{\alpha\beta}$ est la courbure de Ricci, R la courbure scalaire de (V, g), h et k deux constantes arbitraires. k est la constante cosmologique, ne joue pas de rôle dans la description des fluides. On peut supposer $k = 0$. En supprimant d'autre part le facteur surabondant h, on prendra pour premier membre des équations d'Einstein

$$S_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} R g_{\alpha\beta} \tag{1.4}$$

$S_{\alpha\beta}$ sera dit tenseur d'Einstein.

Le tenseur d'Einstein $S_{\alpha\beta}$ étant conservatif, il en est de même du tenseur d'impulsion-énergie $T_{\alpha\beta}$. Les équations

$$\nabla_\alpha T^{\alpha\beta} = 0 \tag{1.5}$$

---

(1) E. CARTAN. - J. Math. pures et appliquées, 1. p. 141-203. (1922)

exprime alors la conservation de l'impulsion-énergie et définiront l'évolution du fluide.

2. Le tenseur d'impulsion-énergie.

Dans toute théorie relativiste des fluides, le premier pas consiste à choisir l'expression du tenseur d'impulsion-énergie $T_{\alpha\beta}$. Chaque expression de $T_{\alpha\beta}$ définit un schéma de fluide. $T_{\alpha\beta}$ doit être symétrique si l'on veut satisfaire aux équations d'Einstein. Mais pour que $T_{\alpha\beta}$ puisse décrire un fluide physique, il faut qu'il existe un champ de vecteurs unitaires u^{α} orientés dans le temps

$$g_{\alpha\beta}\, u^{\alpha} u^{\beta} = +1 \tag{2.1}$$

pour lequel le scalaire $T_{\alpha\beta}\, u^{\alpha} u^{\beta}$ soit positif. u^{α} est dit vecteur vitesse unitaire du fluide et ses trajectoires définissent les lignes de courant.

En fait les fluides réels sont doués de propriétés diverses. Les forces de liaisons internes qui jouent un rôle fondamental dans l'étude dynamique se traduisent par le tenseur des pressions propres. Les phénomènes calorifiques introduisent un scalaire θ dit champ de température propre. Les propriétés électromagnétiques sont susceptibles d'être représentées par deux champs de tenseurs antisymétriques $H_{\alpha\beta}$, $G_{\alpha\beta}$ comme on le verra. Il convient d'autre part d'étudier l'évolution thermodynamique du fluide. Ces diverses propriétés peuvent être envisagées dans une décomposition géométrique du tenseur d'impulsion-énergie.

On est aussi conduit à mettre $T_{\alpha\beta}$ sous la forme

$$T_{\alpha\beta} = \rho\, u_{\alpha}\, u_{\beta} - \pi_{\alpha\beta} - Q_{\alpha\beta} + \tau_{\alpha\beta} \tag{2.2}$$

où ρ est un scalaire positif représentant la densité propre de matière-énergie ponderable, $\pi_{\alpha\beta}$ les pressions propres, $Q_{\alpha\beta}$ les échanges thermiques par conduction et $\tau_{\alpha\beta}$ le tenseur d'énergie électromagnétique. Si l'on néglige certaines propriétés, les termes correspondants ne figurent pas dans la décomposition. De même on peut introduire de nouveaux termes pour étudier de nouvelles propriétés.

A chaque expression de $T_{\alpha\beta}$, correspond alors un schéma fluide. Dans chaque cas, l'évolution du fluide sera défini par les équations de conservation (1.5) qui, tenant compte du caractère unitaire de u^{α}, conduisent aux équations suivantes

(2.3) $$u_{\beta} \nabla_{\alpha} T^{\alpha\beta} = 0$$

(2.4) $$(g^{\beta}_{\rho} - u^{\beta} u_{\rho})\nabla_{\alpha} T^{\alpha\rho} = 0$$

(2.3) est dite l'équation de continuité et (2.4) constitue le système différentiel aux lignes de courant.

A ces équations on adjoindra éventuellement d'autres équations telles que les équations thermodynamiques, les équations du champ électromagnétique. On obtiendra de cette manière le système fondamental des équations du schéma considéré. Ainsi le schéma fluide pur a fait l'objet de nombreuses études divenues classiques, en particulier celles de L. P. Eisenhart et de A. Lichnerowicz. Le schéma fluide thermodynamique a été étudiée par C. Eckart et par l'auteur dans sa thèse en 1954. Le schéma fluide champ électromagnétique a fait l'objet des travaux de A. Lichnerowicz, de ceux de l'auteur datant de 1955 qui ont suscité depuis de nombreux travaux, notamment ceux de G. Pichon. Il a conduit dans un cas particulier à la magnétohydrodynamique re lativiste dont l'étude a fait l'objet de très beaux travaux de Y. Choquet-Bruhat, A. Lichnerowicz.

C'est l'étude mathématique de quelques uns de ces schémas qui constitue le sujet de ces conférences.

3. Repère propre.

On appelle repère propre en un point x de l'espace-temps (V_4, g) un repère orthonormé $(V_{\lambda'})$ dont le premier vecteur $V_{0'}$ coincide avec le vecteur vitesse unitaire u et dont les trois autres vecteurs $V_{i'}$ définissent l'espace associé à la direction de temps u.

On peut rapporter l'espace-temps dans le voisinage de tout point à un champ de repères propres qu'on supposera différentiable (mais non nécessairement intégrable). La métrique d'univers prend alors la forme canonique

$$g = \eta_{\lambda'\mu'}\omega^{\lambda'}\otimes\omega^{\mu'} = \omega^{0'}\otimes\omega^{0'} - \omega^{1'}\otimes\omega^{1'} - \omega^{2'}\otimes\omega^{2'} - \omega^{3'}\otimes\omega^{3'} \tag{3.1}$$

où les $\omega^{\lambda'}$ sont les 1-formes duales des champs de vecteurs $V_{\lambda'}$ i.e. telles que $\langle \omega^{\lambda'}, V_{\mu'}\rangle = \delta^{\lambda'}_{\mu'}$, $\delta^{\lambda'}_{\mu'}$, étant le symbole de Kronecker égal à 1 si $\lambda' = \mu'$ et 0 si $\lambda' \neq \mu'$. Les $\omega^{\lambda'}$ constituent donc quatre formes de Pfaff linéairement indépendantes.

La considération du repère propre est fort utile. En effet l'espace vectoriel tangent $T_x(V)$ a une structure d'espace-temps de Minkowski le repère propre $V_{\lambda'}$ doit être identifié à un repère galiléen local où le fluide a une vitesse nulle. Si on connait les composantes d'un tenseur t relativement au repère propre, ses composantes dans un repère quelconque (e_α) se déduisent des premières par des formules de transformation connues.

En effet si $(A^{\lambda'}_{\alpha})$ est la matrice de passage du repère (e_α) au repère propre $(V_{\lambda'})$ et $(A^{\alpha}_{\lambda'})$ la matrice inverse, on a

(3.2) $$A^{\alpha}_{0'} = u^{\alpha} \qquad A^{\alpha}_{i'} = V_{(i')}{}^{\alpha}$$

(3.2') $$A^{0'}_{\alpha} = u_{\alpha} \qquad A^{i'}_{\alpha} = - V^{(i')}{}_{\alpha}$$

Si t est un tenseur d'ordre 2, ses composantes $t_{\alpha\beta}$ dans le repère (e_{α}) se déduisent de ses composantes $t_{\lambda'\mu'}$ dans le repère propre par les formules

(3.3) $$t_{\alpha\beta} = A^{\lambda'}_{\alpha} A^{\mu'}_{\beta} t_{\lambda'\mu'}$$

On a en particulier pour le tenseur métrique

(3.4) $$g_{\alpha\beta} = u_{\alpha} u_{\beta} - V_{(1')\alpha} V_{(1')\beta} - V_{(2')\alpha} V_{(2')\beta} - V_{(3')\alpha} V_{(3')\beta}$$

Ainsi pour déterminer l'expression du tenseur d'impulsion-énergie d'un fluide pur, on le rapporte d'abord au repère propre. Le fluide y est caractérisé par sa densité propre de matière-énergie ρ, son tenseur des pressions partielles $\pi_{i'j'}$. Son tenseur d'impulsion-énergie a pour composantes dans le repère propre

$$T_{0'0'} = \rho \qquad T_{i'j'} = - \pi_{i'j'}$$

Rapportons maintenant l'espace-temps à des coordonnées locales x^{α}, on a $\omega^{\lambda'} = A^{\lambda'}_{\alpha} dx^{\alpha}$ et l'application des formules (3.3) donne

(3.5) $$T_{\alpha\beta} = \rho u_\alpha u_\beta - \pi_{\alpha\beta}$$

où $\pi_{\alpha\beta} = \sum_{i',j'} \pi_{i'j'} A^{i'}_\alpha A^{j'}_\beta$ satisfait aux identités

(3.6) $$\pi_{\alpha\beta} u^\alpha = 0$$

On voit que dans le cas d'un fluide pur, le tenseur d'impulsion-énergie se décompose relativement à u^α une composante temporelle $\rho u_\alpha u_\beta$ et en une composante spatiale $\pi_{\alpha\beta}$.

Définition - On dit que le fluide est parfait si la quadrique des pressions dans le repère propre est une sphère i. e. si $\pi_{i'j'} = p\,\delta_{i'j'}$, p est dite pression scalaire du fluide.

Pour un fluide parfait, on a $\pi_{\alpha\beta} = p \sum_{i'} A^{i'}_\alpha A^{i'}_\beta$, soit en tenant compte de (3.2) et (3.4) $\pi_{\alpha\beta} = p\,(g_{\alpha\beta} - u_\alpha u_\beta)$. Ainsi le tenseur d'impulsion-énergie d'un fluide parfait est donné par

(3.7) $$T_{\alpha\beta} = (\rho + p) u_\alpha u_\beta - p g_{\alpha\beta}.$$

Appelons repère principal en x le repère orthonormé (W_λ) dont chaque vecteurs W_λ est vecteur propre de la matrice $(R_{\alpha\beta})$ par rapport à la matrice $(g_{\alpha\beta})$. Les directions définies par W_λ ne sont autres que les directions principales de Ricci. Or en vertu des équations d'Einstein, W_λ sont aussi vecteurs propres de la matrice $(T_{\alpha\beta})$ relativement à la matrice $(g_{\alpha\beta})$.

On peut exprimer les composantes de $T_{\alpha\beta}$ à partir des valeurs propres et vecteur propres comme

(3.8) $$T_{\alpha\beta} = s_0\, W_{(0)\alpha} W_{(0)\beta} - \sum_{i=1}^{3} s_i\, W_{(i)\alpha} W_{(i)\beta}$$

On voit qu'en général le repère propre d'un fluide thermodynamique char-
gé est different du repère principal, sauf dans le cas d'un fluide pur où

$$T_{\alpha\beta} = \rho\, u_\alpha u_\beta - \sum_{i',j'} \pi_{i'j'}\, V_{(i')\alpha} V_{(j')\beta}$$

pour lequel $\rho = s_0$ et on peut faire une rotation du 3-plan espace de manière à amener $V_{i'}$ sur W_i.. s_i sont alors les valeurs propres de la matrice $(\pi_{i'j'})$.

§2. LE FLUIDE THERMODYNAMIQUE

4. Le fluide parfait et les variables thermodynamiques.

Le tenseur d'impulsion-énergie d'un fluide parfait non conducteur de chaleur est

$$T_{\alpha\beta} = (\rho+p)u_\alpha u_\beta - p g_{\alpha\beta} \tag{4.1}$$

Il est clair que u^α est vecteur propre orienté dans le temps et ρ la valeur propre correspondante de $(T_{\alpha\beta})$. Tout repère propre de ce fluide coincide avec un repère principal qui est indéterminé à cause de la valeur propre triple $-p$.

En vue de l'étude énergétique, on décompose la densité propre ρ en la somme d'une densité de matière r et d'une densité d'énergie vitesse $r\varepsilon$ où ε est l'énergie interne spécifique

$$\rho = r(1+\varepsilon) \tag{4.2}$$

On est amené à introduire l'indice f du fluide défini par

$$f = 1 + \varepsilon + \frac{p}{r} \tag{4.3}$$

Dans ces formules et dans la suite, les unités physiques ont été choisies de manière que la vitesse limite c soit égale à 1. Autrement, il faudra remplacer ε, p par εc^{-2}, pc^{-2}.

Le tenseur d'impulsion-énergie d'un fluide parfait non conducteur de la chaleur prend alors la forme

$$T_{\alpha\beta} = rfu_{\alpha}u_{\beta} - pg_{\alpha\beta} \, . \tag{4.4}$$

Du point de vue thermodynamique, la température propre θ et l' entropie spécifique propre S peuvent être définis comme en hydrodinamique classique par la relation

$$\theta dS = d\varepsilon + pd\tau \tag{4.5}$$

où $\tau = \frac{1}{r}$ est le volume spécifique. En tenant compte de (4.3), et en prenant f, s, p comme variables thermodynamiques (non indépendantes) on peut écrire (4.5) sous la forme équivalente

$$r\theta dS = rdf - dp \tag{4.6}$$

Ces relations expriment qu'il existe parmi les variables r, θ, f, S, p, seulement deux variables indépendantes pour lesquelles on choisira souvent f et S ou S et p.

Si on prend f et S comme variables indépendantes et si l'on se donne p en fonction de f et S, la relation (4.6) entraine

$$r = \frac{\partial p}{\partial f} \qquad\qquad r\theta = -\frac{\partial p}{\partial S}$$

La première relation définit l'équation d'état du fluide sous la forme

$$r = r\,(f,S)$$

et la seconde relation définit la température.

Des conditions de conservation appliquées au tenseur d'impulsion-énergie (4.4) on tire l'équation de continuité et le système différentiel aux lignes de courant

(4.7) $$\nabla_\alpha\,(rfu^\alpha) - u^\alpha \partial_\alpha p = 0$$

(4.8) $$rfu^\alpha \nabla_\alpha u^\beta - (g^{\alpha\beta} - u^\alpha u^\beta)\partial_\alpha p = 0$$

Tenant compte de (4.6) on peut écrire l'équation de continuité sous la forme

(4.7') $$f\nabla_\alpha(ru^\alpha) + r\theta\; u^\alpha\,\partial_\alpha S = 0$$

d'où l'on déduit

Théorème - Pour un fluide parfait, il est équivalent de dire qu'il y a conservation de la matière ou que l'entropie est constante le long des lignes de courant.

$$u \nabla_\alpha (r u^\alpha) = 0 \iff u^\alpha \partial_\alpha S = 0$$

un fluide tel que $u^\alpha \partial_\alpha S = 0$ est dit adiabatique.

De même tenant compte de l'équation thermodynamique, le système différentiel aux lignes de courant s'écrit avec les variables f, S

$$f u^\alpha \nabla_\alpha u^\beta - (g^{\alpha\beta} - u^\alpha u^\beta) \partial_\alpha f + \theta g^{\alpha\beta} \partial_\alpha S = 0 \tag{4.8'}$$

On en déduit

Théorème - Si le mouvement du fluide est isentropique (S = const.) le système différentiel aux lignes de courant se réduit à

$$u^\alpha \nabla_\alpha u^\beta - (g^{\alpha\beta} - u^\alpha u^\beta) \frac{\partial_\alpha f}{f} = 0 \tag{4.9}$$

Nous montrerons que pour un tel fluide isentropique, il existe un principe extrémal pour les lignes de courant

5. Le fluide visqueux.

Pour caractériser la déformation locale du fluide, nous introduisons la derivée de Lie du tenseur métrique g suivant le vecteur vitesse $\underline{u}$ nitaire

$$(L_u g)_{\alpha\beta} = \nabla_\alpha u_\beta + \nabla_\beta u_\alpha$$

et nous posons

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \gamma^\rho_\alpha \cdot \gamma^\mu_\beta \, (\nabla_\rho u_\mu + \nabla_\mu u_\rho) \tag{5.1}$$

où $\gamma_{\alpha\beta}$ est le projecteur d'espace.

Les lois contraintes-déformations sont supposées linéaires, si le milieu est isotrope, les phénomènes de viscosité sont décrits par le tenseur

(5.2) $$\sigma_{\alpha\beta} = c_{\alpha\beta}{}^{\rho\mu}\,\varepsilon_{\rho\mu}$$

où

(5.3) $$c_{\alpha\beta\rho\mu} = \lambda\gamma_{\alpha\beta}\gamma_{\rho\mu} + \mu(\gamma_{\alpha\rho}\gamma_{\beta\mu} + \gamma_{\alpha\mu}\gamma_{\beta\rho})$$

ou compte tenu de $g_{\alpha\beta}\,u^\alpha u^\beta = 1$

(5.3') $$c_{\alpha\beta\rho\mu} = \lambda\gamma_{\alpha\beta}\gamma_{\rho\mu} + \mu\,(g_{\alpha\rho}\,g_{\beta\mu} + g_{\alpha\mu}\,g_{\beta\rho})$$

Le tenseur d'impulsion-énergie du fluide visqueux homogène est alors donné par

(5.4) $$T_{\alpha\beta} = (\rho + p)u_\alpha\,u_\beta - pg_{\alpha\beta} + \lambda\,(\nabla_\sigma\,u^\sigma)\gamma_{\alpha\beta} + 2\mu\varepsilon_{\alpha\beta}$$

Cette expression est utilisée par C. Eckart, G. Pichon. A. Lichnerowicz proposàit une autre expression de $\varepsilon_{\alpha\beta}$ où intervient dans la définition de la viscosité le vecteur $C_\alpha = fu_\alpha$. Le tenseur d'impulsion-énergie devient alors

(5.5) $$T_{\alpha\beta} = (\rho + p - \lambda\nabla_\rho C^\rho)\;u_\alpha u_\beta - (p - \lambda\nabla_\rho C^\rho)\;g_{\alpha\beta} + \mu\tau_{\alpha\beta}$$

avec

$$2\,\bar{\varepsilon}_{\alpha\beta} = \bar{\nabla}_\alpha C_\beta + \bar{\nabla}_\beta C_\alpha - \bar{C}^\lambda\,(\bar{\nabla}_\lambda C_\alpha C_\beta + \bar{\nabla}_\lambda C_\beta C_\alpha)$$

$\bar{\nabla}$ désignant la dérivée covariante dans la métrique $\bar{g} = f^2 g$.

6. Le fluide conducteur de chaleur.

On tient compte des échanges thermiques par conduction. Celle-ci est définie par un vecteur q_α orthogonal au vecteur u^α . C'est l'expression de q_α , sa présencd dans le tenseur d'impulsion-énergie qui caractérise les points de vue.

Eckart a choisi le tenseur:

(9.1) $$T_{\alpha\beta} = (\rho + p)u_\alpha u_\beta - p g_{\alpha\beta} + \theta_{\alpha\beta} - (u_\alpha q_\beta + u_\beta q_\alpha)$$

Les équations qui régissent l'évolution du fluide sont données par les conditions de conservation du tenseur d'impulsion-énergie, la conservation du courant de matière, l'équation de définition de q_α :

$$\nabla_\alpha T^{\alpha\beta} = 0$$

$$\nabla_\alpha (r u^\alpha) = 0$$

(9.2) $$q_\alpha = -\,\kappa\,(g_\alpha^\beta - u_\alpha u^\beta)\,(\partial_\beta \theta - \theta\, u^\rho \nabla_\rho u_\beta)$$

et une équation thermodynamique.

Pham

L'auteur a proposé en 1954 le tenseur d'impulsion-énergie

(9.3) $$T_{\alpha\beta} = (\rho + p)\, u_\alpha u_\beta - p g_{\alpha\beta} - (u_\alpha q_\beta + u_\beta q_\alpha)$$

où l'on a négligé la viscosité. q_α est défini par

(9.4) $$q_\alpha = -\varkappa\,(g_\alpha^\beta - u_\alpha u^\beta)\,\partial_\alpha \theta$$

Les équations du mouvement sont constituées par les conditions de conservation $\nabla_\alpha T^{\alpha\beta} = 0$ et l'équation thermodynamique est remplacée par l'équation de conduction qui généralise celle de Fourier

(9.5) $$\nabla_\alpha q^\alpha = C u^\alpha \partial_\alpha \theta - \frac{l}{\rho}\, u^\alpha \partial_\alpha \rho$$

C est la chaleur spécifique à volum constant et l la chaleur de dilatation du fluide. Pichon a repris ce modèle en ajoutant le terme de viscosité $\theta_{\alpha\beta}$.

Pour Landau et Lifchitz, le tenseur d'impulsion-énergie d'un fluide conducteur de chaleur est identique à celui d'un fluide parfait, le vecteur courant de chaleur q_α apporte sa contribution à travers l'équation de conservation d'un certain vecteur P_α . Il pose

(9.6) $$T_{\alpha\beta} = rf u_\alpha u_\beta - p g_{\alpha\beta}$$

(9.7) $$P_\alpha = r u_\alpha - q_\alpha$$

Les équations du mouvement sont données par

$$\nabla_\alpha T^{\alpha\beta} = 0$$

$$\nabla_\alpha P^\alpha = 0$$

auxquelles ont ajoute l'équation de définition de q_α :

(9.8) $$q_\alpha = -\varkappa\theta^2 (g_\alpha^\beta - u_\alpha u^\beta)\partial_\beta\left(\frac{1+G}{\theta}\right)$$

où G est la fonction de Gibbs définie par

(9.10) $$G = \varepsilon + \frac{p}{r} - \theta S.$$

Ces modèles se justifient par des considérations physiques et cinétiques et ont tous le mérite de se réduire à la limite à la description classique non relativiste. L'étude du problème de Cauchy montre que les les systèmes d'équations auxquels ils donnent lieu, sont mixtes et comportent une partie parabolique provenant soit de la viscosité, soit de la définition du vecteur courant de chaleur q_α. Ce qui conduit à une vitesse de propagation infinie.

Pour lever la difficulté provenant de q_α, Cattaneo et Vernotte ont suggéré de modifier l'hypothèse de Fourier par un terme de Relaxation. Kranys a fait la traduction de cette hypothèse en relativité

(9.11) $$q^\alpha + \nu u^\beta \nabla_\beta q^\alpha = -\varkappa (g^{\alpha\beta} - u^\alpha u^\beta)\partial_\beta\theta$$

Ce vecteur q_α n'est alors plus orthogonal à u_α . Adoptant le point de vue de Landau-Lifchitz et celui de Cattaneo-Vernotte-Kranys, Mahjoreb a proposé une nouvelle théorie cette année.

§3. LE CHAMP ELECTROMAGNETIQUE

10. Représentation du champ électromagnétique.

S'il existe un champ électromagnétique, le fluide est soumis à des inductions électromagnétiques qu'on peut décrire à l'aide de deux 2-formes: la 2-forme champ électrique-induction magnétique H et la 2-forme induction électrique-champ magnétique G. On note $*H$, $*G$ leurs formes duales au sens de l'élément de volume riemannien η de l'espace-champ. On a en composantes

(10.1) $$(*H)_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta\lambda\mu} H^{\lambda\mu}$$

(10.2) $$(*G)_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta\lambda\mu} H^{\lambda\mu}$$

On appelle vecteurs champs et inductions électriques et magnétiques les vecteurs définis par les 1-formes

(10.3) $$e = i_u H \qquad d = i_u G \qquad h = i_u(*G) \qquad b = i_u(*H)$$

où i_u est le produit intérieur par le vecteur vitesse unitaire u. En composantes, on a

(10.4) $$e = u^\rho H_{\rho\alpha} \qquad d_\alpha = u\, G \qquad h_\alpha = u^\rho(*G)_{\rho\alpha} \qquad b_\alpha = u^\rho(*H)_{\rho\alpha}$$

Ces vecteurs sont orthogonaux à u^α.

Inversement, H, G, $*H$, $*G$ s'expriment en fonction de e, d, h, b

par les formules

(10.5) $\qquad H = u \wedge e - * (u \wedge b) \qquad G = (u \wedge d) - *(u \wedge h)$

(10.6) $\qquad *H = u \wedge b + *(u \wedge e) \qquad *G = u \wedge h + *(u \wedge d)$

Dans les deux dernières relations le signe + provient du fait que sur une variété riemannienne l'opérateur $*$ satisfait à la relation $*^2 = \varepsilon_g (-1)^{p\,(n-p)}$ où $n = \dim V$, p = degré de la forme et ε_g le signe du det. g. On en déduit les relations suivantes qui donnent lescom composantes

$$H_{\alpha\beta} = u_\alpha e_\beta - u_\beta e_\alpha - \eta_{\alpha\beta\lambda\mu} u^\lambda b^\mu$$

$$G_{\alpha\beta} = u_\alpha d_\beta - u_\beta d_\alpha - \eta_{\alpha\beta\lambda\mu} u^\lambda h^\mu$$

En théorie électromagnétique de Maxwell, les inductions dépendent linéairement des champs. Dans le cas isotrope où le fluide a une permitivité diélectrique λ et une perméabilité magnétique μ, on a

(10.7) $\qquad d = \lambda e \qquad b = \mu h$

Les deux relations (10.5) donnent alors

(10.8) $\qquad G = \frac{1}{\mu} H + \frac{\lambda\mu - 1}{\mu} u \wedge i_u H$

soit en composantes

(10.8') $$G_{\alpha\beta} = \frac{1}{\mu} H_{\alpha\beta} + \frac{\lambda\mu - 1}{\mu} (u_\alpha u^\rho H_{\rho\beta} - u_\beta u^\rho H_{\rho\alpha})$$

qu'on peut mettre sous la forme

(10.9) $$G_{\alpha\beta} = \frac{1}{\mu} \varepsilon_{\alpha\beta}^{\rho\sigma} H_{\rho\sigma}$$

où

$$\varepsilon_{\alpha\beta}^{\rho\sigma} = \bar{g}_\alpha^\rho \bar{g}_\beta^\sigma - \bar{g}_\alpha^\sigma \bar{g}_\beta^\rho \qquad \text{avec} \qquad \bar{g}_\mu^\lambda = g_\mu^\lambda - (1-\lambda\mu)\, u^\lambda u_\mu .$$

L'induction électromagnétique H, G satisfait aux équations de Maxwell

(10.10) $$dH = 0$$

(10.11) $$\delta G = J$$

où δ est la codifférentielle, J une 1-forme dont le vecteur associé définit le courant électrique. L'équation (10.10) signifie que la 2-forme H est localement exacte i.e. qu'il existe localement une 1-forme Φ telle que $H = d\Phi$. Φ s'appelle le potentiel vecteur électromagnétique, (10.11) donne en remarquant que $\delta^2 = 0$

(10.12) $$\delta J = 0$$

équation qui exprime la conservation du courant électrique.

En composantes, les équations (10.10), (10.11), (10.12) s'écrivent

$$\frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta\gamma\delta}\ \nabla_\alpha H_{\beta\gamma} = 0$$

$$\nabla_\alpha G^{\alpha\beta} = J^\beta$$

$$\nabla_\alpha J^\alpha = 0$$

On décompose le courant électrique J en un courant de convection colinéaire à u et un courant de conduction Γ orthogonal à u. Γ peut être défini par l'hypothèse d'Ohm $\Gamma = \sigma e$ où σ est la conductivité électrique du fluide. On a alors

(10.13) $$J^\alpha = \gamma u^\alpha + \sigma e^\alpha$$

γ s'appelle la densité de charge.

11. Le tenseur d'énergie électromagnétique.

A partir de $H_{\alpha\beta}$, $G_{\alpha\beta}$ on construit le tenseur d'impulsion-énergie électromagnétique $\tau_{\alpha\beta}$ dont la divergence donne la densité de force électromagnétique agissant sur le fluide. En généralisant un résultat connu dans le cas non inductif $\lambda = \mu = 1$, on obtient le tenseur donné par Minkowski

$$\tau_{\alpha\beta} = \frac{1}{4} g_{\alpha\beta} (G_{\rho\sigma} H^{\rho\sigma}) - G_{\rho\alpha} H^{\rho}{}_{\beta} \tag{11.1}$$

Pour interpréter ce tenseur, on va l'exprimer à l'aide des vecteurs e, d, h, b:
On obtient

$$\tau_{\alpha\beta} = (e_{\rho} d^{\rho} + h_{\rho} b^{\rho}) (u_{\alpha} u_{\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta}) - (e_{\alpha} d_{\beta} + h_{\alpha} b_{\beta}) - + (P_{\alpha} u_{\beta} + u_{\alpha} Q_{\beta}) \tag{11.2}$$

où

$$P_{\alpha} = \eta_{\alpha\lambda\mu\nu} e^{\lambda} h^{\mu} u^{\nu} \qquad Q_{\alpha} = \eta_{\alpha\lambda\mu\nu} d^{\lambda} b^{\mu} u^{\nu} \tag{11.3}$$

P_{α} est le vecteur de Poynting et $Q_{\alpha} = \lambda_{\mu} P_{\alpha}$. Sur (11.2) on voit la signification de chaque groupe de termes.

$\tau_{\alpha\beta}$ n'est pas symétrique. On peut prendre l'expression proposée par Abraham

$$\tau_{\alpha\beta} = - (e_{\rho} d^{\rho} + h_{\rho} b^{\rho}) (u_{\alpha} u_{\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta}) - (e_{\alpha} d_{\beta} - h_{\alpha} b_{\beta}) - + (P_{\alpha} u_{\beta} + u_{\alpha} P_{\beta}). \tag{11.4}$$

On peut penser à le symétriser [ ] , mais les raisons physiques sont obscures.

Pham

Nous conservons l'expression (11.1) . En prenant la divergence de ce tenseur, nous avons

$$(11.5) \qquad \nabla_\alpha \tau^\alpha{}_\beta = \nabla_\alpha G^{\alpha\rho} H_{\rho\beta} + G^{\alpha\rho} \nabla_\alpha H_{\rho\beta} + \frac{1}{4} (G^{\rho\sigma} \nabla_\beta H_{\rho\sigma} + H_{\rho\sigma} \nabla_\beta G^{\rho\sigma})$$

Or les équations de Maxwell du 1er groupe s'écrivent encore

$$\nabla_\alpha H_{\rho\beta} + \nabla_\rho H_{\beta\alpha} + \nabla_\beta H_{\alpha\rho} = 0$$

Par multiplication contractée avec $G^{\alpha\rho}$, il vient

$$2 G^{\alpha\rho} \nabla_\alpha H_{\rho\beta} = - G^{\alpha\rho} \nabla_\beta H_{\alpha\rho}$$

En portant dans (11.4), on a alors en tenant compte de la définition de J

$$(11.5') \qquad \nabla_\alpha \tau^\alpha{}_\beta = J^\rho H_{\rho\beta} + \frac{1}{4} (G^{\rho\sigma} \nabla_\beta H_{\rho\sigma} - H_{\rho\sigma} \nabla_\beta G^{\rho\sigma})$$

On peut transformer la parenthèse en utilisant les équations de liaison ce qui donne finalement

$$(11.6) \qquad \nabla_\alpha \tau^\alpha{}_\beta = J^\rho H_{\rho\beta} + (\lambda\mu - 1) \nabla_\beta u^\rho P_\rho + \frac{1}{2} (e_\rho e^\rho \partial_\beta \lambda + h_\rho h^\rho \partial_\beta \mu)$$

où

$$J^\rho H_{\rho\beta} = \gamma e_\beta - \sigma (e_\rho e^\rho) u_\beta + \sigma\mu P_\beta$$

La signification du groupe $J^{\varrho} H_{\varrho\beta}$ est claire. Le tenseur supplémentaire $(\lambda\mu - 1)\nabla_\beta u^{\varrho} P_{\varrho}$ est nul si $\lambda\mu = 1$ ou $P_\alpha = 0$, c'est-à-dire si $\tau_{\alpha\beta}$ est symétrique. Il est encore nul si u^α est un champ à dérivée covariante nulle. Le terme supplémentaire $\frac{1}{2}(e_{\varrho} e^{\varrho} \partial_\beta \lambda + h_{\varrho} h^{\varrho} \partial_\beta \mu)$ correspond aux phénomènes de magnétostriction et d'électrostriction. En fait λ, μ dépendent des variables d'état.

12. Cas où $\tau_{\alpha\beta}$ défini par (11.1) est symétrique.

Le tenseur $\tau_{\alpha\beta}$ n'est pas symétrique en général. Son antisymétrisé est $(\lambda\mu - 1)(u_\alpha P_\beta + u_\beta P_\alpha)$. Comme u_α et P_α sont orthogonaux, l'antisymétrisé est nul i.e. que $\tau_{\alpha\beta}$ est symétrique si:

1.- $\lambda\mu = 1$, cas non inductif

2.- $P_\alpha = 0$, ce qui est vérifié soit que $e_\alpha = 0$ soit que $h_\alpha = 0$.

Dans le cas non inductif, on prend $\lambda = \mu = 1$, alors $H_{\alpha\beta} = G_{\alpha\beta} = F_{\alpha\beta}$. Le tenseur d'énergie électromagnétique s'écrit

$$\tau_{\alpha\beta} = \frac{1}{4} g_{\alpha\beta}(F_{\varrho\sigma} F^{\varrho\sigma}) - F_{\varrho\alpha} F^{\varrho}{}_{\beta} \tag{12.1}$$

et

$$\nabla_\alpha \tau^\alpha{}_\beta = J^{\varrho} H_{\varrho\beta} \tag{12.2}$$

Le cas $e_\alpha = 0$ correspond à celui de la magnétohydrodynamique ou fluides de conductivité $\sigma = \infty$. Comme le courant électrique doit être borné $\sigma e < \infty$, on a nécessairement $e = 0$. Le tenseur d'impulsion-énergie électromagnétique s'écrit alors

(12.3) $$\tau_{\alpha\beta} = \mu \left\{ |h|^2 \left(u_\alpha u_\beta - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta}\right) - h_\alpha h_\beta \right\}$$

Le cas $h_\alpha = 0$ conduit à

(12.4) $$\tau_{\alpha\beta} = \lambda \left\{ |e|^2 \left(u_\alpha u_\beta - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta}\right) - e_\alpha e_\beta \right\}$$

Il convient pour la description d'un électron considéré comme une boule continue.

Dans chacun de ces cas, le tenseur d'impulsion-énergie du fluide s'obtient à ajoutant $\tau_{\alpha\beta}$ à l'expression déjà connue. On obtient un tenseur d'impulsion-énergie du fluide qui est symétrique, par suite on peut écrir les équations d'Einstein.

13. Le fluide parfait chargé sans inductions.

On a dans ce cas le tenseur d'impulsion-énergie total

(13.1) $$T_{\alpha\beta} = (\rho + p)\, u_\alpha u_\beta - p g_{\alpha\beta} + \tau_{\alpha\beta}$$

où

$$\tau_{\alpha\beta} = \frac{1}{4} g_{\alpha\beta} (F_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma}) - F_{\rho\alpha} F^{\rho}{}_{\beta}$$

Les équations du mouvement sont données par les conditions de conservation

(13.2) $$\nabla_\alpha T^{\alpha\beta} = 0$$

l'équation thermodynamique

(13.3) $$r\theta \, d\,S = rdf - dp$$

et les équations de Maxwell

(13.4) $$\frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta\gamma\delta} \nabla_\alpha F_{\beta\gamma} = 0$$

(13.5) $$\nabla_\alpha F^{\alpha\beta} = J^\beta$$

Où supposons la conductivité $\sigma = 0$, de sorte que $J^\beta = \gamma u^\beta$ et

(13.6) $$\nabla_\alpha (\gamma u^\alpha) = 0$$

En prenant f, S comme variables thermodynamiques, les conditions de conservation (13.2) donnent l'équation de continuité et le système différentiel aux lignes de courant

(13.7) $$rfu^\alpha \nabla_\alpha u^\beta - (g^{\alpha\beta} - u^\alpha u^\beta)\, \partial_\alpha p - \gamma u^\alpha F_\alpha{}^\beta = 0$$

(13.8) $$f \nabla_\alpha (ru^\alpha) + r\theta\, u^\alpha \partial_\alpha S = 0$$