

Louis Nirenberg (Ed.)

Pseudo-differential Operators

47

Stresa, Italy 1968



 Springer

FONDAZIONE
CIME
ROBERTO CONTI

Louis Nirenberg (Ed.)

Pseudo-differential Operators

Lectures given at a Summer School of the
Centro Internazionale Matematico Estivo (C.I.M.E.),
held in Stresa (Varese), Italy,
August 26-September 3, 1968

 Springer



FONDAZIONE
CIME
ROBERTO CONTI

C.I.M.E. Foundation
c/o Dipartimento di Matematica “U. Dini”
Viale Morgagni n. 67/a
50134 Firenze
Italy
cime@math.unifi.it

ISBN 978-3-642-11073-3 e-ISBN: 978-3-642-11074-0
DOI:10.1007/978-3-642-11074-0
Springer Heidelberg Dordrecht London New York

©Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2010
Reprint of the 1st ed. C.I.M.E., Ed. Cremonese, Roma 1969
With kind permission of C.I.M.E.

Printed on acid-free paper

Springer.com

CENTRO INTERNAZIONALE MATEMATICO ESTIVO
(C. I. M. E.)

2^o Cicio - Stresa dal 26 Agosto al 3 Settembre 1968

"PSEUDO-DIFFERENTIAL OPERATORS"

Coordinatore: L. Nirenberg

S. AGMON	: Asymptotic formulas with remainder estimates for eigenvalues of elliptic operators	pag. 1
J. BOKOBZA-HAGGIAG	: Une définition globale des opérateurs pseudo-différentiels sur une variété différentiable	pag. 11
L. BOUTET DE MONVEL	: Pseudo-differential operators and analytic functions	pag. 37
A. CALDERON	: A priori estimates for singular integral operators	pag. 85
O. CORDES	: Testo non pervenuto	
F. B. JONES	: Characterization of spaces of Bessel potentials related to the heat equation	pag. 143
J. J. KOHN	: Pseudo-differential operators and non-elliptic problems	pag. 157
R. SEELEY	: Topics in pseudo-differential operators	pag. 167
E. SHAMIR	: Boundary value problems for elliptic convolutions systems	pag. 307
I. M. SINGER	: Elliptic operators on manifolds	pag. 333

CENTRO INTERNAZIONALE MATEMATICO ESTIVO
(C. I. M. E.)

S. AGMON

ASYMPTOTIC FORMULAS WITH REMAINDER ESTIMATES
FOR EINGEVALUES OF ELLIPTIC OPERATORS

Corso tenuto a Siresa dal 26 Agosto al 3 Settembre 1968

ASYMPTOTIC FORMULAS WITH REMAINDER ESTIMATES FOR
EINGEVALUES OF ELLIPTIC OPERATORS

by

S. Agmon (Hebrew University)

We propose to discuss in this lecture a number of results related to the problem of eigenvalue distribution of elliptic operators. We start with some classical results. Let Δ be the Laplacian in R^n and consider the eigenvalue problem:

$$(1) \quad \begin{aligned} -\Delta u &= \lambda u \quad \text{in } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{on } \partial\Omega, \end{aligned}$$

where Ω is a bounded open set in R^n . Let $\{\lambda_j\}$ be the sequence of eigenvalues of (1), each repeated according to its multiplicity and set

$$(2) \quad N(t) = \sum_{\lambda_j < t} 1.$$

Then according to a wellknown theorem of Weyl one has:

$$(3) \quad N(t) = \gamma t^{n/2} + o(t^{n/2}), \quad t \rightarrow +\infty,$$

γ some constant. The formula (3) was further improved by Courant who gave following estimate to the remainder term:

$$(4) \quad N(t) - \gamma t^{n/2} = o(t^{(n-1)/2} \log t).$$

For the corresponding case of the Laplacian on a compact manifold Avakumovic [4] proved a somewhat better result than (4), namely that

$$(5) \quad N(t) - \gamma t^{n/2} = o(t^{(n-1)/2}).$$

The remainder estimate (5) is actually the best possible estimate which one can expect in general. This, as was observed by Avakumovic [4] (see also [12]), follows by considering the example of the Laplacian Δ_S on the

sphere S^n . In this case the different eigenvalues are $\mu_j = j(j+n-1)$, each μ_j having a multiplicity:

$$\binom{n+j}{n} - \binom{j-2}{n}$$

It then follows that

$$(6) \quad N(\mu_j + \epsilon) - N(\mu_j - \epsilon) \geq c \mu_j^{(n-1)/2}$$

for some constant $c > 0$. From (6) one concludes that (5) cannot be improved for the Laplacian on the sphere. The same example also shows that a more refined asymptotic formula for $N(t)$ with a second term in the asymptotic formula need not exist.

There is one case where (5) can be improved. This is the case of the Laplace operator on the torus $R^n \text{ mod } 2\pi$. In this case $N(t^2)$ is nothing else but the number of lattice points inside the sphere of radius t (center at the origin). It follows from classical results (e.g. [13]) that

$$(7) \quad N(t) - \gamma t^{n/2} = o(t^{(n/2)-n/(n+1)})$$

Returning to the question of eigenvalue distribution for the Dirichlet problem (1) (or any other self-adjoint differential boundary value problem for Δ) it seems very plausible that the optimal remainder estimate (5) holds also in this case. Up to now, however, this result was established only in the very special case when Ω is a polyhedron in 2 or 3 dimensions ([5] and [8;9]).

We consider now the case of a general elliptic operator. (For simplicity we shall consider the case of a single differential operator acting on functions defined on an open set of R^n . Most of the results, however, admit generalizations to elliptic systems defined on manifolds). Let A be a formally self-adjoint (positive) differential operator of order m in $\Omega \subset R^n$ (C^∞ coefficients). Let \tilde{A} be a self-adjoint realization of A in the Hilbert space $L_2(\Omega)$. Assume also that \tilde{A} is bounded from below and that it

has a discrete spectrum consisting of eigenvalues of finite multiplicity. As before let $N(t)$ denote the number of eigenvalues $< t$. The following general result on the asymptotic behavior of $N(t)$ holds.

Theorem 1. Suppose that Ω is a bounded open set possessing the cone property. Suppose furthermore that for some integer $k > n/m$ the domain of definition of \tilde{A}^k is contained in $H_{km}(\Omega)$. Then

$$(8) \quad N(t) = \gamma t^{n/m} + o(t^{n/m}), \quad t \rightarrow \infty,$$

$$\gamma = \int_{\Omega} \int_{A'(x, \xi) < t} d\xi dx.$$

Theorem 1 yields the main term in the asymptotic eigenvalue distribution formula for a wide class of elliptic boundary value problems (e.g. [1], [6] and references given there). Recently the theorem was improved to yield an estimate for the remainder in (8). The following result holds [2].

Theorem 2. Under essentially the same conditions as those in Theorem 1:

$$(9) \quad N(t) - \gamma t^{n/m} = O(t^{(n-\sigma)/m}), \quad t \rightarrow \infty,$$

for any $\sigma < 1/2$ in the general case and any $\sigma < 1$ if the principal part A' has constant coefficients.

The basic step in proving Theorem 1 or Theorem 2 is the derivation of the corresponding asymptotic formula for the spectral function:

$$(10) \quad e(t; x, x) = \sum_{\lambda_j < t} \Psi_j(x) \overline{\Psi_j(y)},$$

where $\{\varphi_j(x)\}$ is the normalized sequence of eigenfunctions. Thus in order to prove Theorem 1 one uses the asymptotic formula (given by Carleman [7] for second order operators and by Garding [10] in the general case):

S. Agmon

$$(11) \quad e(t; x, x) = c(x)t^{n/m} + o(t^{n/m}), \quad t \rightarrow \infty, \quad c(x) = \int_{A^1(x, \xi)} < 1 \, d\xi.$$

By integration of (11) over Ω one arrives at the asymptotic formula (8). (Actually one needs additional estimates for the spectral function in order to justify the integration step since (11) is uniform in x only on compact subsets of Ω). In analogy the proof of Theorem 2 is based on the following estimate for the remainder in (11) established recently by Agmon and Kanai [3] and Hormander [11]:

$$(12) \quad e(t; x, x) - c(x)t^{n/m} = o(t^{(n-\sigma)/m})$$

for any $\sigma < 1/2$ in the general case and any $\sigma < 1$ if the principal part A^1 has constant coefficients.¹⁾

We give now some indications about the derivation of (12). Without loss of generality we shall assume that $m > n$ (this could always be achieved replacing \tilde{A} by some power \tilde{A}^k), and that \tilde{A} is positive. Let $R = (\tilde{A} - \lambda)^{-1}$ be the resolvent operator. Because $m > n$ it follows that R_λ is an integral with a continuous kernel $R_\lambda(x, y)$. One has the relation:

$$(13) \quad R_\lambda(x, x) = \int_0^\infty (t - \lambda)^{-1} de(t; x, x).$$

The main idea which goes back to Carleman is to determine the asymptotic behavior of $R_\lambda(x, x)$ in the complex λ -plane and then to deduce from this information, via the relation (13), the asymptotic behavior of the spectral function. It should be noted, however, that for the derivation of remainder

1) It should be noted that the various asymptotic results on spectral functions actually hold in the general situation when a spectral function exists, i.e. for any semi-bounded from below self-adjoint realization of A (no assumptions on the spectrum or on Ω).

S. Agmon

estimates such as (12) one needs information on the asymptotic behavior of the resolvent kernel $R_\lambda(x, x)$ near the spectrum of \tilde{A} . Thus the crucial result proved in [3] is the following.

Theorem 3. The resolvent kernel $R_\lambda(x, x)$ admits an asymptotic expansion of the form:

$$(14) \quad R_\lambda(x, x) \sim (-\lambda)^{n/m-1} \sum_{j=0}^{\infty} c_j(x) (-\lambda)^{-j/m}$$

valid for $\operatorname{Re} \lambda > 0$, $|\operatorname{Im} \lambda| \geq |\lambda|^{(m-\theta)/m+\varepsilon}$, $|\lambda| \geq 1$ (and also for $\operatorname{Re} \lambda \leq 0$, $|\lambda| \geq 1$) where $\theta = 1/2$ in the general case, $\theta = 1$ if A has constant coefficients, and ε is an arbitrary positive number. Here $c_j(x)$ are certain C^∞ functions depending only on the differential operator A .

The deduction of Theorem 2 from Theorem 3 can be achieved with the following semi-inversion formula of (13) due to Pleijel:

$$(15) \quad |e(t; x, x) - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} R_\lambda(x, x) d\lambda| \leq 2\tau |R_\zeta(x, x)|$$

where $\zeta = t + i\tau$ with $\tau > 0$ and Γ is any contour from $\bar{\zeta}$ to ζ not intersecting the positive axis. By choosing for Γ a contour of the form: $|\operatorname{Im} \lambda| = |\lambda|^{(m-\theta)/m+\varepsilon}$, $0 \leq \operatorname{Re} \lambda \leq t$, using (15) and (14), one arrives easily at the remainder estimate (12).

In order to prove Theorem 3 one needs to construct a good parametrix for the resolvent kernel which will yield also a good approximation near the spectrum. This can be done for instance with the aid of the calculus of pseudo-differential operators (this procedure was followed in [11] but not in [3] where a somewhat different method was used).

Finally we mention that very recently, using new classes of pseudo-

S. Agmon

differential operators, Hörmander [12] succeeded in proving the following optimal remainder estimate for the spectral function:

$$(16) \quad e(t; x, x) - c(x)t^{n/m} = O(t^{(n-1)/m}) .$$

With the aid of this result it is possible to improve now Theorem 1 in the case of a single operator by showing that in the general case

$$(17) \quad N(t) - \gamma t^{n/m} = O(t^{(n-1)/m+\varepsilon})$$

for any $\varepsilon > 0$. It would be interesting to know whether (17) holds with $\varepsilon = 0$. As was remarked before it is not known whether this is true even in the case of the Dirichlet boundary value problem for the Laplace operator.

S. Agmon

REFERENCES

- [1] Agmon, S., On kernels, eigenvalues, and eigenfunctions of operators related to elliptic problems, *Comm. Pure Appl. Math.* 18 (1965), 627-663.
- [2] Agmon, S., Asymptotic formulas with remainder estimates for eigenvalues of elliptic operators, *Arch. Rat. Mech. Anal.* 28 (1968), 165-183.
- [3] Agmon, S. and Y. Kannai, On the asymptotic behavior of spectral functions and resolvent kernels of elliptic operators, *Israel J. Math.* 5 (1967), 1-30.
- [4] Avakumovic, V.G., Ueber die Eigenfunktionen auf geschlossenen Riemannschen Mannigfaltigkeiten, *Math. Z.* 65 (1956), 327-344.
- [5] Bailey, P.B. and F.H. Brownell, Removal of the log factor in the asymptotic estimates of polygonal membrane eigenvalues, *J. Math. Appl.* 4(1962), 212-239.
- [6] Browder, F.E., Asymptotic distribution of eigenvalues, and eigen-functions for non-local elliptic boundary value problems I., *Amer. J. Math.* 87(1965), 175-195.
- [7] Carleman, T., Propriétés asymptotiques des fonctions fondamentales des membranes vibrantes, *C.R. du 8ème Congrès de Math. Scand. Stockholm 1934 (Lund 1935)*, 34-44.
- [8] Fedosov, B.V. Asymptotic Formulas for the eigenvalues of the Laplace operator in the case of a polygonal domain, *Dokl. Akad. Nauk SSSR* 151 (1963), 786-789.
- [9] Fedosov, B.V. Asymptotic formulas for the eigenvalues of the Laplace operator for a polyhedron, *Dokl. Akad. Nauk SSSR* 157 (1964), 536-538.
- [10] Gårding, L., On the asymptotic properties of the spectral function belonging to a self-adjoint semi-bounded extension of an elliptic differential operator, *Kungl. Fysiogr. Sällsk. i Lund Forth.* 24 (1954), 1-18.
- [11] Hörmander, L., On the Riesz means of spectral functions and eigenfunction expansions for elliptic differential operators. To appear.
- [12] Hörmander, L., The spectral function of an elliptic operator, To appear.
- [13] Landau, E. Einführung in die Zahlentheorie II, Leipzig 1927.

CENTRO INTERNAZIONALE MATEMATICO ESTIVO
(C. I. M. E.)

J. BOKOBZA-HAGGIAG

UNE DEFINITION GLOBALE DES OPERATEURS PSEUDO-
-DIFFERENTIELS SUR UNE VARIETE DIFFERENTIABLE

Corso tenuto a Stresa dal 26 Agosto al 3 Settembre 1968

UNE DEFINITION GLOBALE DES OPERATEURS PSEUDO-DIFFERENTIELS SUR UNE VARIETE DIFFERENTIALE.

par

Juliane Bokobza-Haggiag

(Purdue University)

Introduction.

Nous introduisons dans ce qui suit une définition globale des opérateurs pseudo-différentiels sur une variété différentiable et un calcul symbolique qui permet d'établir une correspondance linéaire bijective entre les opérateurs pseudo-différentiels modulo les opérateurs régularisants d'une part et une classe de symboles modulo les symboles qui sont à décroissance rapide sur les fibres de l'espace cotangent d'autre part.

L'idée de ce calcul est basée sur le fait que la formule

$$(A \psi)(x) = \int f(x, \xi) d\xi \int e^{-2i \pi(y-x) \cdot \xi} \psi(y) dy$$

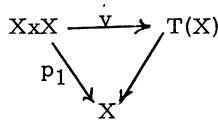
qui définit un opérateur pseudo-différentiel sur \mathbb{R}^n , si f a certaines propriétés de régularité et de croissance à l'infini, prend un sens sur une variété si l'on y remplace $y-x$ par un vecteur tangent en x à la variété, soit $v(x, y)$, "infinitésimalement égal" à $y-x$, et si l'on prend quelques précautions supplémentaires destinées à faire converger l'intégrale et à lui assurer un sens intrinsèque.

J. Bokobza

CHAPITRE I

LINEARISATION D'UNE VARIÉTÉ DIFFÉRENTIABLE.

Définition (I. 1) . Soient X une variété réelle de classe C^∞ , paracompacte et $T(X)$ son espace tangent. Soit v une application de classe C^∞ de $X \times X$ dans $T(X)$ telle que le diagramme



soit commutatif, p_1 désignant la première projection du produit $X \times X$ sur X . On dira que v est une linéarisation de X si les conditions (i) et (ii) sont vérifiées:

- (i) pour tout $x \in X, v(x, x) = 0$;
- (ii) pour tout $x \in X$, la différentielle de l'application $y \mapsto v(x, y)$, laquelle est une application linéaire de $T_y(X)$ dans $T_x(X)$, est au point $y=x$ l'application identique de $T_x(X)$.

Signalons dès maintenant que plus que de l'application $d_y v(x, y)$ nous aurons besoin de sa transposée que nous notons l_x^y : c'est l'application linéaire de $T_x^*(X)$ dans $T_y^*(X)$ définie par

$$l_x^y(\xi) = d_y \langle v(x, y), \xi \rangle$$

pour tout ξ appartenant à $T_x^*(X)$, où $T_x^*(X)$ désigne l'espace

J. Bokobza

cotangent de X ; la condition (ii) s'exprime bien sûr par le fait que pour tout $x \in X$ l_x^X est l'application identique de $T_x^*(X)$.

Proposition (I. 1). Soient X et Y deux variétés réelles de classe C^∞ , paracompactes, et h une immersion $Y \rightarrow X$, c'est à dire une application C^∞ , de rang partout égal à la dimension de Y .

Soit $h^*(T(X))$ le fibré sur Y image réciproque par h de $T(X)$, à un sous-fibré duquel on peut identifier $T(Y)$ (au moyen de la différentielle de h) et soit H un fibré supplémentaire de $T(Y)$ dans $h^*(T(X))$ (tel, par exemple, qu'on peut le définir par choix d'une structure riemannienne sur $h^*(T(X))$). Soit q la projection de $h^*(T(X))$ sur $T(Y)$ parallèlement à H .

Alors si v est une linéarisation sur X , on définit une linéarisation sur Y en posant

$$(h^*v)(y_1, y_2) = q(v(hy_1, hy_2)).$$

En effet $d_{y_2}(h^*v)(y_1, y_2) = q \circ l_{hy_1}^{hy_2} dh(h_2)$, d'où résulte immédiatement la condition (ii) puisque $l_{hy_1}^{hy_1} = I$ et que l'application q est une inverse à gauche de dh .

Notons que h^*v est définie canoniquement par la donnée de h et v lorsque h est un difféomorphisme local.

Corollaire. Toute variété admet une linéarisation.

Cela résulte en effet du théorème de Whitney et de la proposition (I. 1).

J. Bokobza

Proposition (I.2). Soit v une linéarisation de la variété X . Il existe un voisinage ouvert Ω de Δ , diagonale de $X \times X$, vérifiant les propriétés suivantes:

(iii) la restriction de v à Ω est un difféomorphisme de Ω sur un voisinage ouvert de la section nulle de $T(X)$.

(iv) les deux projections de $\bar{\Omega}$ sur X sont des applications propres.

Un tel ouvert Ω sera appelé un domaine de la linéarisation v .

En outre, on peut supposer que Ω est symétrique et que pour tout $x \in X$, la coupe $\Omega_x = \{y \in X \text{ tels que } (x, y) \in \Omega\}$ est connexe.

En effet, d'après le théorème des fonctions implicites, il existe, pour tout $x \in X$, un voisinage ouvert U_x de x tel que la restriction de v à $U_x \times U_x$ soit un difféomorphisme. On peut bien sûr, supposer U_x relativement compact.

X étant paracompacte, on sait que l'on peut définir un recouvrement ouvert localement fini (V_λ) de X tel que si

$V_\lambda \cap V_\mu \neq \emptyset$ il existe $t \in X$ tel que $V_\lambda \cup V_\mu \subset U_t$.

Alors $\Omega = \bigcup_\lambda V_\lambda \times V_\lambda$ vérifie les conditions (iii) et (iv): pour la condition (iii), il n'y a que l'injectivité à vérifier; mais si $v(x, y) = v(x, z)$, où $(x, y) \in V_\lambda \times V_\lambda$ et $(x, z) \in V_\mu \times V_\mu$, alors $V_\lambda \cup V_\mu \subset U_t$ pour un certain $t \in X$, de sorte que (x, y) et (x, z) appartiennent tous deux à $U_t \times U_t$, d'où $y = z$.

J. Bokobza

Par ailleurs, si K est une partie compacte de X , (x, y) ne peut appartenir à Ω , x appartenant à K , que si y appartient à la réunion des ouverts relativement compacts V_λ qui coupent K , lesquels sont en nombre fini, d'où (iv).

Pour assurer les deux dernières conditions, choisissons pour tout $x \in X$ un voisinage ouvert connexe W_x de x tel que $W_x \times W_x \subset \Omega$. Alors $\Omega' = \bigcup_{x \in X} W_x \times W_x$ répond à la question car $\Omega'_x = \bigcup_{x \in W_y} W_y$ est connexe, et Ω' est, bien sûr, symétrique.

Cette démonstration prouve d'ailleurs que tout voisinage de Δ contient un domaine de v , symétrique et à coupes connexes.

CHAPITRE II

ESPACES DE SYMBOLES ET D'OPERATEURS.

Dans tout ce qui suit, X est une variété réelle de classe C^∞ et de dimension n , que l'on suppose, pour simplifier, dénombrable à l'infini.

Définition (II.1). Soit m un nombre réel. $C^\infty(T^*(X); m)$ est l'espace des fonctions F de classe C^∞ sur $T^*(X)$, à valeurs complexes, telles que pour tout compact K de X contenu dans un domaine de coordonnées, pour tout choix d'un système de coordonnées dans un voisinage de K , et quels que soient les multi-indices p et q , il existe une constante C telle que:

J. Bokobza

$$\left| D_x^p \partial_\xi^q F(x, \xi) \right| \leq C |\xi|^{m-|q|}$$

pour $x \in K$ et $\xi \in T_x(X)$, $|\xi| \geq 1$

Remarque:

On pose ici

$$D_x^p = \frac{1}{(2i\pi)^{|p|}} \frac{\partial^{|p|}}{\partial x_1^{p_1} \dots \partial x_n^{p_n}} \quad \text{et}$$

$$\partial_\xi^q = \frac{\partial^{|q|}}{\partial \xi_1^{q_1} \dots \partial \xi_n^{q_n}}$$

il y aura lieu d'introduire également des dérivations par rapport aux coordonnées de l'espace tangent sous la forme

$$D_\eta^p = \frac{1}{(2i\pi)^{|p|}} \frac{\partial^{|p|}}{\partial \eta_1^{p_1} \dots \partial \eta_n^{p_n}}.$$

Ces dérivations ne prennent bien sûr un sens que moyennant la donnée d'un système de coordonnées locales ou celle d'une base en un point donné de l'espace tangent ou cotangent; mais toutes les formules globales qui suivront et feront intervenir de telles dérivations ont un sens intrinsèque, étant entendu que les dérivations par rapport aux coordonnées de l'espace tangent et cotangent sont toujours écrites par rapport à des bases duales de ces deux espaces.

Par ailleurs, on voit facilement qu'il suffit que l'inégalité souhaitée soit remplie localement pour un certain système de coordonnées pour qu'elle le soit pour tout système de coordonnées.

J. Bokobza

Définition (II. 2). Soit m un nombre réel. $\mathcal{L}(X;m)$ est l'espace des opérateurs linéaires continus A de $\mathcal{D}(X)$ dans $\mathcal{D}(X)$, qui se prolongent continûment de $\mathcal{D}(X)$ dans $\mathcal{D}(X)$, et pour tout s réel, de $H_{\text{comp}}^s(X)$ dans $H_{\text{comp}}^{s-m}(X)$, et qui, en outre, sont très réguliers, c'est à dire vérifient la condition suivante: si T est une distribution sur X de classe C^∞ dans un ouvert Ω de X , alors la distribution AT est de classe C^∞ dans Ω .

Remarques:

Tous les espaces de distributions considérés ici sont de sous-espaces de $\mathcal{L}'(X)$, espace des courants pairs de degré 0, $\mathcal{L}(X)$ étant l'espace des fonctions (à valeurs complexes) de classe C^∞ sur X et à support compact, $\mathcal{E}(X)$ l'espace des fonctions de classe C^∞ et $\mathcal{E}'(X)$ l'espace de courants à support compact.

Il résulte facilement de la définition que si $A \in \mathcal{L}(X;m)$, alors A opère de $\mathcal{E}'(X)$ dans $\mathcal{E}'(X)$, de $H_{\text{loc}}^s(X)$ dans $H_{\text{loc}}^{s-m}(X)$ et de $\mathcal{E}(X)$ dans $\mathcal{E}(X)$.

Il convient de remarquer, pour un usage ultérieur, que dans la définition (II. 2), on peut supprimer l'hypothèse que A opère de $\mathcal{D}'(X)$ dans $\mathcal{L}'(X)$ (la dernière condition étant alors remplacée par la condition: $T \in \mathcal{E}'(X)$ et T est C^∞ dans Ω entraînent AT est C^∞ dans Ω) si pour tout compact K de X on peut trouver un compact L de X tel que $T \in \mathcal{L}'(X)$ et $T=0$ sur L entraînent $AT = 0$ sur K .

En effet, moyennant cette condition, AT s'annulera sur $\overset{\circ}{K}$

si $T \in \mathcal{E}'(X)$ et s'annule dans un voisinage de L , puisque la régularisation n'augmente pas trop le support; cela étant, soit (φ_i) une partition C^∞ de l'unité sur X , dénombrable et localement finie; alors si $T \in \mathcal{D}'(X)$ la famille $(A(\varphi_i T))$ est une famille de distribution localement finie (le support de $A(\varphi_i T)$ ne pouvant couper un compact K si le support de φ_i ne coupe pas le compact L associé) et en définissant $AT = \sum_i A(\varphi_i T)$ on obtient le prolongement voulu de A à $\mathcal{D}'(X)$; l'inclusion $\text{supp. sing. } AT \subset \text{supp. sing. } T$ pour toute $T \in \mathcal{D}'(X)$ est évidente.

Enfin, signalons que $\mathcal{L}(X; -\infty) = \bigcap_m \mathcal{L}(X; m)$ n'est que l'espace des opérateurs linéaires continus de $\mathcal{E}'(X)$ dans $\mathcal{D}(X)$ et de $\mathcal{L}'(X)$ dans $\mathcal{E}(X)$; nous désignerons ces opérateurs sous le nom d'opérateurs régularisants.

Proposition (II, 1). $C^\infty(T^*(X); m)$ est complet pour sa structure de groupe topologique (non séparé) pour laquelle un système fondamental de voisinages de 0 est constitué par les sous-espaces $C^\infty(T^*(X); k)$ (k réel $\leq m$).

Cette proposition, et la suivante, permettent de sommer des séries de symboles ou d'opérateurs dont les ordres tendent vers $-\infty$. Elles ont été données en même temps, la première par Hörmander ([1]), et la deuxième par nous-mêmes ([2]).

Proposition (II, 2). $\mathcal{L}(X; m)$ est complet pour sa structure de groupe topologique pour laquelle un système fondamental de voisinages de 0 est constitué par les sous-espaces $\mathcal{L}(X; k)$ (k réel $\leq m$).

La démonstration repose ici sur le théorème de Mittag-Leffler (cf. Bourbaki, Topologie générale, chapitre 2), les lemmes

J. Bokobza

(II. 1) et (II. 2) sont des intermédiaire à cette démonstration.

Nous commençons par définir, pour tout compact K de X et tout nombre réel m , l'espace $\mathcal{M}_K(X; m)$ suivant: c'est l'espace des opérateurs A de $\mathcal{L}(X)$ dans $\mathcal{L}'(X)$ qui vérifient les deux conditions suivantes:

- (1) $\forall T \in \mathcal{L}(X), \text{supp}(T) \subset \overset{\circ}{K} \implies AT = 0$
- (2) $\forall s, t \in \mathbb{R}, t > m, A \text{ opère de } H_{\text{loc}}^s(X) \text{ dans } H_{\text{loc}}^{s-t}(X).$

Un tel opérateur A opère évidemment de $\mathcal{L}(X)$ dans $\mathcal{E}(X)$ et de $\mathcal{L}'(X)$ dans $\mathcal{E}'(X)$. On peut mettre sur $\mathcal{M}_K(X; m)$ une structure d'espace de Fréchet de la façon suivante: soit K' un compact de X , $K \subset \overset{\circ}{K}'$; quels que soient s et t , l'espace d'application linéaires continues $\mathcal{L}(H_K^s(X), H_{\text{loc}}^{s-t}(X))$ est un espace de Fréchet pour la topologie de la convergence uniforme sur les parties bornées de $H_K^s(X)$. On met sur $\mathcal{M}_K(X; m)$ la topologie borne supérieure des topologies induites par ces espaces, lorsque s et t parcourent \mathbb{Q} , avec $t > m$.

Lemme (II. 1). Si $t < m$, $\mathcal{M}_K(X; t)$ est dense dans $\mathcal{M}_K(X; m)$.

Il suffit de construire une suite (\mathcal{R}_κ) d'opérateurs opérant pour tout s de $H_{\text{loc}}^s(X)$ dans $H_{\text{loc}}^{s+m-t}(X)$ et convergeant simplement vers l'opérateur identique de $H_{\text{loc}}^s(X)$, comme on peut le voir par application du théorème de Banach-Steinhaus et du lemme de Rellich.

Par choix d'un système fini de cartes, on se ramène alors au problème suivant: soient L_1 et L_2 deux compacts de \mathbb{R}^n , $L_1 \subset \overset{\circ}{L}_2$; montrer qu'il existe une suite d'opérateurs sur \mathbb{R}^n convergeant simplement pour tout s vers l'application identique de

J. Bokobza

$H_{L_1}^s(\mathbb{R}^n)$ dans $H_{L_2}^s(\mathbb{R}^n)$ et opérant de $H_{L_1}^s(\mathbb{R}^n)$ dans $\mathcal{C}_{L_2}(\mathbb{R}^n)$.

Or si (γ_k) est la suite standard de fonctions de $\mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ convergeant vers la distribution de Dirac δ , la suite des opérateurs de convolution associés répond à la question.

Lemme (II. 2). Soient K et K' deux compacts de $X, K \subset K', (m_j)_{j>0}$ une suite strictement décroissante de nombres réels tendant vers $-\infty$, et pour tout j , un opérateur $A_j \in \mathcal{L}(X; m_j)$ à bisupport compact dans K , c'est-à-dire tel que

$$\begin{aligned} \forall T \in \mathcal{S}(X), \text{ supp.}(A_j T) \subset K, \text{ et:} \\ \forall T \in \mathcal{C}(X), \text{ supp.}(T) \subset \bigcup_j K \implies A_j T = 0. \end{aligned}$$

Il existe alors $A \in \mathcal{L}(X; m_0)$, à bisupport compact dans K' , tel que, quel que soit k , $A - \sum_{j \in k-1} A_j$ appartienne à $\mathcal{L}(X; m_k)$.

En effet, soit pour tout, $W_k = \sum_{j \in k-1} A_j + \mathcal{K}_K(X; m_k)$, que l'on munit de la métrique de $\mathcal{K}_K(X; m_k)$ transportée par translation. D'après le lemme (II. 1) et le théorème de Mittag-Leffler, il existe $B \in \bigcap_k W_k$ et si $\varphi \in \mathcal{C}_{K'}(X)$ est égale à 1 dans un voisinage de K , $A = (\varphi)B$ répond à la question ((φ) est ici l'opérateur de multiplication par φ). On ramène à ce lemme le cas général par partition de l'unité.

J. Bokobza

CHAPITRE III

OPERATEURS PSEUDO-DIFFERENTIELS SUR UNE VARIETE DIFFERENTIABLE.

Soient v une linéarisation de X et Ω un domaine de v .

Quels que soient x et y appartenant à X , l'application linéaire

$$l_x^y : T_x^*(X) \longrightarrow T_y^*(X)$$

définit, en passant à la puissance extérieure n -ième, une application linéaire $\bigwedge_x^{n,y} : \bigwedge_x^n T_x^*(X) \longrightarrow \bigwedge_y^n T_y^*(X)$, que l'on peut aussi interpréter comme un élément de $\bigwedge_x^n T_x(X) \otimes \bigwedge_y^n T_y(X)$, et une section \bigwedge^n de classe C du fibré ${}^n T(X) \times {}^n T(X)$ au-dessus de $X \times X$ (il s'agit bien sûr ici du produit tensoriel externe).

Au-dessus de Ω , il y a également une section canonique (relativement à v) du fibré $\bigwedge_t^n T(X) \otimes \bigwedge_t^n T^*(X)$, où $\bigwedge_t^n T(X)$ (resp. $\bigwedge_t^n T^*(X)$) est l'espace des n -vecteurs tordus (resp. n -covecteurs tordus), section qui se déduit de la précédente puisqu'une orientation de Ω_x est définie canoniquement par la donnée d'une orientation de X au point x (en effet $y \longrightarrow v(x,y)$ définit un difféomorphisme de Ω_x sur un ouvert de $T_x(X)$).

On désignera la valeur de cette dernière section au point (x,y) par la notation $d\xi \otimes \det \frac{\partial v(x,y)}{\partial y} dy$. C'est du reste son expression en coordonnées locales, lorsque des coordonnées locales sont choisies dans des voisinages de x et de y de façon compatible quant à l'orientation définie par la carte $\Omega_x \longrightarrow T_x(X)$ et par

n'importe laquelle des deux orientations possibles de $T_x(X)$.

Si f est une fonction localement sommable sur X , à support dans \mathcal{U}_x , on désignera par $d\xi \int_{\mathcal{U}_x} f(y) \det \frac{\partial v(x,y)}{\partial y} dy$ l'intégrale sur \mathcal{U}_x de $f(y) d\xi \det \frac{\partial v(x,y)}{\partial y} dy$, qui est une forme impaire de degré n sur \mathcal{U}_x , à valeurs dans l'espace des n -vecteurs tordus en x : cette intégrale est un n -vecteur tordu en x , qui peut donc servir de mesure sur $T_x^*(X)$.

Définition (III.1). Soient \mathcal{U} un domaine d'une linéarisation v de X , et χ une fonction C^∞ sur $X \times X$, à support contenu dans \mathcal{U} , et égale à 1 dans un voisinage de la diagonale Δ de $X \times X$.

Si $F \in C^0(T_x^*(X); m)$, m étant un nombre réel quelconque, $A = \mathcal{E}_{v, \chi}[F]$ est l'opérateur défini sur $\mathcal{E}(X)$ par

$$(A\varphi)(x) = \int_{T_x^*(X)} F(x, \xi) d\xi \int_{\mathcal{U}_x} \chi(x, y) \varphi(y) e^{-2i\pi \langle v(x, y), \xi \rangle} \det \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} dy.$$

On notera par $(\tilde{\chi}\varphi)(x, \xi)$ la valeur en (x, ξ) de la seconde intégrale. D'autre part on notera v_x le difféomorphisme de \mathcal{U}_x sur un ouvert de $T_x(X)$ défini par $v_x(y) = v(x, y)$ et w_x le difféomorphisme réciproque; $\tilde{\chi}(x, \eta)$ sera la fonction définie sur $T(X)$ par $\tilde{\chi}(x, \eta) = \chi(x, w_x(\eta))$ si $(x, \eta) \in v(\mathcal{U})$ et nulle en dehors de $v(\mathcal{U})$. On peut alors écrire aussi

$$(\tilde{\chi}\varphi)(x, \xi) = d\xi \int_{T_x(X)} \tilde{\chi}(x, \eta) \varphi(w_x(\eta)) e^{-2i\pi \langle \eta, \xi \rangle} d\eta.$$

Proposition (III.1). Avec les notations de la définition (III.1), A opère de $\mathcal{E}(X)$ dans $\mathcal{E}(X)$ et de $\mathcal{E}(X)$ dans $\mathcal{E}(X)$.

On va montrer que si s et t sont deux entiers tels que $s-m-n > t \geq 0$, $s \geq 0$, A opère de $H_{\text{comp}}^s(X)$ dans $C_{\text{comp}}^t(X)$, espace des fonctions de classe C^t à support compact, ce qui montrera la proposition.

Définissons une structure riemannienne sur X par le choix d'un produit scalaire (\cdot, \cdot) sur $T^*(X)$, prolongé de façon \mathbb{C} -bilinéaire sur le complexifié de $T^*(X)$. On a, pour $\xi \neq 0$:

$$e^{-2i\pi \langle v(x, y), \xi \rangle} = - \frac{1}{2i\pi |\xi|^2} (\xi | (I_x^y)^{-1} d_y e^{-2i\pi \langle v(x, y), \xi \rangle},$$

d'où après une intégration par parties (effectué sur l'espace tangent):

$$i(\tilde{A}\varphi)(x, \xi) = \frac{1}{2i\pi} d\xi \int_{\Omega_x} e^{-2i\pi \langle v(x, y), \xi \rangle} \times \\ \times (\xi | (I_x^y)^{-1} d_y (|\xi|^{-2} \alpha(x, y) \varphi(y))) \det \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} dy,$$

ce qui donne, on itérant s fois le procédé,

$$|(i\tilde{A}\varphi)(x, \xi)| \leq C |\xi|^s \|\varphi\|_{H^s} \quad \text{pour } |\xi| \neq 0, \text{ et comme on a}$$

$$|(i\tilde{A}\varphi)(x, \xi)| \leq C \|\varphi\|_{H^0} \quad \text{pour } |\xi| \leq 1,$$

$$|(A\varphi)(x)| \leq C \|\varphi\|_{H^0} + C \int_{|\xi| > 1} |F(x, \xi)| |\xi|^{-s} \|\varphi\|_{H^s} d\xi \leq C_1 \|\varphi\|_{H^s}$$

puisque $s-m-n > 0$; enfin, en appliquant un opérateur différentiel P

J. Bokobza

d'ordre $\leq t$ à $A\varphi$ écrite sous sa forme initiale, on voit que l'on a encore

$$|(PA\varphi)(x)| \leq C \|\varphi\|_{H^s}$$

Proposition (III. 2). Soit l'opérateur défini dans la définition (III. 1), et soit $h:Y \rightarrow X$ un difféomorphisme. Si h^*A est l'opérateur défini sur $\mathcal{D}(Y)$ par $(h^*A)(\varphi) = A(\varphi \circ h^{-1}) \circ h$, on a

$$h^*A = \oplus_{h^*v, h^*\alpha} [h^*F],$$

avec

$$(h^*\alpha)(x, y) = \alpha(hx, hy), \quad (h^*v)(x, y) = dh(x)^{-1} v(hx, hy) \quad \text{et}$$

$$(h^*F)(x, \xi) = F(hx, {}^t dh(x)^{-1} \xi).$$

Il suffit de faire un changement de variables dans les intégrales qui définissent h^*A .

Définition (III. 2). Soit A un opérateur linéaire continu de $\mathcal{D}(X)$ dans $\check{C}(X)$. Soient v une linéarisation de X et α une fonction C^∞ sur $X \times X$, à support dans un domaine de v , égale à 1 dans un voisinage de Δ . Le symbole de A par rapport à (v, α) est la fonction (de classe C^∞) sur $T^*(X)$ définie par

$$\sigma_{v, \alpha}(A)(x, \xi) = A_y(\alpha(x, y) e^{2i\pi \langle v(x, y), \xi \rangle})(x),$$

la notation A_y signifiant que l'opérateur A agit sur la

J. Bokobza

fonction qui suit considérée comme fonction de y , les autres variables étant fixées.

Proposition (III. 3). Soient $F \in C^\infty(T^*(X); m)$, v et v_1 deux linéarisations de X , α et α_1 deux fonction C^∞ sur $X \times X$ à support dans des domaines respectifs de v et v_1 , égales à 1 dans un voisinage de Δ , et $A = \otimes_{v, \alpha} [F]$. Alors $\mathcal{G}_{v_1, \alpha_1}(A)$ appartient à $C^\infty(T^*(X); m)$ et ne dépend pas de α ni de α_1 à un élément de $C^\infty(T^*(X); -\infty)$ près. En fait, si ψ_x est la fonction définie sur $v_x(\Omega) \subset T_x(X)$ qui fait passer de $v(x, y)$ à $v_1(x, y)$, on a :

$$\mathcal{G}_{v_1, \alpha_1}(A)(x, \xi) \sim \sum_{|r| \geq 0} \frac{1}{r!} \partial_\xi^r F(x, \xi) D_\eta^r \left\{ e^{2i\pi \langle \psi_x(\eta) - \eta, \xi \rangle} \right\} (\eta=0),$$

et en particulier $\mathcal{G}_{v, \alpha}(A) \sim F$.

Avant de démontrer cette proposition, remarquons que la somme

$$\sum_{|r|=k} \frac{1}{r!} \partial_\xi^r F(x, \xi) D_\eta^r \left\{ e^{2i\pi \langle \psi_x(\eta) - \eta, \xi \rangle} \right\} (\eta=0)$$

est bien définie indépendamment du système de coordonnées choisi et appartient à $C^\infty(T^*(X); m - \left[\frac{k+1}{2} \right], \left[\frac{k+1}{2} \right])$ désignant la partie entière de $\frac{k+1}{2}$; en effet $D_\eta^r \left\{ e^{2i\pi \langle \psi_x(\eta) - \eta, \xi \rangle} \right\} (\eta=0)$ est un polynôme en ξ de degré $\leq \left[\frac{|r|}{2} \right]$ dont les coefficients sont des fonctions C^∞ de x , comme il résulte du fait que $\psi_x(\eta) - \eta$ s'annule ainsi que ses dérivées du premier ordre en $\eta = 0$.

J. Bokobza

La série est alors convergente au sens de la proposition (II. 1).

Posons alors $\alpha_2(x, y) = \alpha(x, y) \alpha_1(x, y)$; d'autre part choisissons une structure riemannienne sur X , et une fonction de classe C^∞ sur $T(X)$, égale à 1 pour $|\eta| \leq \frac{1}{2}$ et à 0 pour $|\eta| \geq 1$ et posons

$$\gamma(x, y, \xi) = \beta(x, |\xi|^{1/4} v(x, y)).$$

On écrit alors $\sigma_{v_1, \alpha_1}(A) = G_1 + G_2$, avec

$$G_2(x, \xi) = \int_{T_x^*(X)} F(x, \zeta) d\zeta \int \alpha_2(x, y) \gamma(x, y, \xi) \times \\ \times e^{-2i\pi \langle v(x, y), \zeta \rangle + 2i\pi \langle v_x(x, y), \xi \rangle} \det \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} dy$$

G_2 s'obtenant en remplaçant dans cette expression γ par $1-\gamma$.

On démontre alors que $G_2 \in C^\infty(T^*(X); -\infty)$ en écrivant que

$$1 - \beta(x, \eta) = |\eta|^{4N} \chi(x, \eta)$$

N étant un entier arbitrairement grand et en intégrant par parties, au moyen de la carte définie par le difféomorphisme $(v_1)_x$, la deuxième intégrale.

Quant à G_1 , il s'écrit, après les changements de variables

$$\zeta \mapsto \xi + \zeta, \quad \eta = v(x, y) \\ G_1(x, \xi) = \sum_{|r| \leq 2k-2} \frac{1}{r!} \partial_\xi^r F(x, \xi) D_\eta^r \{ e^{2i\pi \langle \frac{1}{2} v(x, \eta) - \eta, \xi \rangle} \}_{(\eta=0)} + \\ + R_k(x, \xi)$$

J. Bokobza

où $R_k(x, \xi) =$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left[F(x, \xi + \zeta) - \sum_{|I| \leq 2k-1} \frac{1}{I!} \partial_{\xi}^I F(x, \xi) \zeta^I \right] d\zeta$$

$$\times \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{\alpha}_2(x, \eta) \beta(x, |\xi|^{1/4} \eta) e^{-2i\pi \langle \eta, \zeta \rangle + 2i\pi \langle \frac{\eta}{x}(\eta) - \eta, \zeta \rangle} d\eta.$$

Il s'agit de prouver que quels que soient p et q , $D_x^p \partial_{\xi}^q R_k(x, \xi)$ est majoré, x restant dans un compact, par telle puissance de $|\xi|$ que l'on veut, pourvu que k soit assez grand.

Mais d'après la formule de Leibniz, une dérivée de R_k est somme d'expressions analogues à celle de R_k , mais où F est remplacée par une dérivée de F et $\tilde{\alpha}_2(x, \eta)$ par un polynôme en ξ et $|\xi|^{1/4}$ dont les coefficients sont des fonctions C^∞ de (x, η) . Il suffit donc d'obtenir une estimation de R_k .

On sépare R_k en deux: $R_k^1(x, \xi) = \int_{|\zeta| < \frac{|\xi|}{2}}$ et

$$R_k^2(x, \xi) = \int_{|\zeta| > \frac{|\xi|}{2}}.$$

Pour simplifier les notations posons

$$\varphi(x, \xi, \eta) = \tilde{\alpha}_2(x, \eta) \beta(x, |\xi|^{1/4} \eta) e^{2i\pi \langle \frac{\eta}{x}(\eta) - \eta, \zeta \rangle}$$

$\hat{\varphi}(x, \xi, \zeta)$ désignant sa transformée de Fourier par rapport à η , calculée au point ζ . Dans le support de $\beta(x, |\xi|^{1/4} \eta)$, on a $\eta \leq |\xi|^{-1/4}$, et $\frac{\eta}{x}(\eta) - \eta$ s'annulant ainsi que ses dérivées premières en $\eta = 0$, une dérivée d'ordre j (par rapport à η) de $\varphi(x, \xi, \eta)$ est majoré par $C |\xi|^{j/4}$, où C est une constante indépendante de ξ et de x lorsque ce dernier parcourt un compact. Ceci prouve que, quel que soit ν entier positif,