G. Prodi (Ed.)

CIME Summer Schools

Problems in Non-Linear Analysis

55

Varenna, Italy 1970

Springer

FONDAZIONE CIME ROBERTO CONTI

G. Prodi (Ed.)

Problems in Non-Linear Analysis

Lectures given at a Summer School of the
Centro Internazionale Matematico Estivo (C.I.M.E.),
held in Varenna (Como), Italy,
August 20-29, 1970

Springer

FONDAZIONE CIME ROBERTO CONTI

C.I.M.E. Foundation
c/o Dipartimento di Matematica “U. Dini”
Viale Morgagni n. 67/a
50134 Firenze
Italy
cime@math.unifi.it

ISBN 978-3-642-10996-6 e-ISBN: 978-3-642-10998-0
DOI:10.1007/978-3-642-10998-0
Springer Heidelberg Dordrecht London New York

Reprint of the 1st ed. C.I.M.E., Ed. Cremonese, Roma 1971
With kind permission of C.I.M.E.

Printed on acid-free paper

Springer.com

CENTRO INTERNAZIONALE MATEMATICO ESTIVO

(C. I. M. E.)

4° Ciclo - Varenna - dal 20 al 29 Agosto 1970

PROBLEMS IN NON-LINEAR ANALYSIS

Coordinatore: Prof. G. PRODI

CENTRO INTERNAZIONALE MATEMATICO ESTIVO

(C.I.M.E.)

H. BREZIS

PROPRIÉTÉS RÉGULARISANTES DE CERTAINS SEMIGROUPES ET APPLICATIONS

Corso tenuto a Varenna dal 20 al 29 Agosto 1970

PROPRIÉTÉS RÉGULARISANTES DE CERTAINS SEMIGROUPES ET APPLICATIONS

par

H. Brezis

(Université - Paris)

I. Propriétés régularisantes de certains semigroupes nonlinéaires.

Soit H un espace de Hilbert et soit $\varphi : H \to]-\infty, +\infty]$ une fonction convexe semi continue inférieurement, $\varphi \not\equiv +\infty$.

On pose $Au = \partial\varphi(u) = \{f \in H;\ \varphi(v) - \varphi(u) \geq (f, v-u)\ \forall v \in H\}$.

Il est bien connu que A est maximal monotone et donc $-A$ engendre un semigroupe continu de contractions $S(t)$ sur $\overline{D(A)}$ (pour les notations et résultats standards relatifs aux semigroupes nonlinéaires voir par exemple les exposés de A. Pazy à ce séminaire

On se propose de montrer que $S(t)$ possède une propriété "régularisante" comparable en un certain sens à celle des semigroupes linéaires analytiques. Nous indiquons ici seulement le principe des démonstrations; pour les détails et diverses extensions, on pourra se reporter à [2] .

Théorème 1. Soit $u_o \in \overline{D(A)}$, alors $S(t)u_o \in D(A)$ pour tout $t > 0$ et on a

$$|A^{\circ} S(t)u_o| \leq (1+\varepsilon)|A^{\circ} v| + \left(\frac{1+\varepsilon^2}{\varepsilon}\right)\frac{|v-u_o|}{t}$$

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \forall v \in D(A), \quad \forall t > 0 .$$

Autrement dit, pour $u_o \in \overline{D(A)}$, il existe une fonction $u \in C([0, +\infty[\, ; H)$ unique vérifiant

(1) u est dérivable p.p. sur $]0, +\infty[$

(2) u est dérivable à droite en tout $t > 0$

(3) $u(t) \in D(A)$ pour tout $t > 0$

(4) $\frac{d^+u}{dt} + \overset{\circ}{A}u(t) = 0$ pour tout $t > 0$

(5) $u(0) = u_o$.

De plus on a

(6) $$\left|\frac{d^+u}{dt}(t)\right| \leq (1 + \varepsilon)|\overset{\circ}{A}v| + \left(\frac{1+\varepsilon^2}{\varepsilon}\right)\frac{|v-u_o|}{t}$$

$$\forall \varepsilon > 0,\ \forall v \in D(A),\ \forall t > 0 .$$

<u>Principe de la démonstration</u>. Soit A_λ la régularisée Yosida de A, i.e. $A_\lambda = \frac{I-(I+\lambda A)^{-1}}{\lambda}$; on montre que $A_\lambda = \partial\varphi_\lambda$ avec $\varphi_\lambda(u) = \underset{v \in H}{\mathrm{Inf}}\left\{\frac{1}{2\lambda}|u-v|^2 + \varphi(v)\right\}$ et que φ_λ est Fréchet - différentiable.

Soit u_λ la solution de l'équation $\frac{du_\lambda}{dt} + A_\lambda u_\lambda = 0$, $u_\lambda(0) = u_o$.

Comme $\lim\limits_{\lambda \to 0} u_\lambda(t) = S(t)u_o$, on se ramène donc à établir

(6). Pour simplifier les notations on supprime dorénavant λ et on cherche à prouver (6) dans le cas où φ est Fréchet differentiable avec $A = \partial\varphi$ lipschitzien.

Soit $v \in H$ <u>fixé</u> et soit $f = - Av$; on a

$$\varphi(u) - \varphi(v) \geqslant - (f, u-v) .$$

Posant $\tilde{\varphi}(u) = \varphi(u) - \varphi(v) + (f,u-v)$, il vient $\tilde{\varphi}(u) \geqslant 0$, $\forall u \in H$ et $\tilde{\varphi}(v) = 0$.

De plus l'équation (4) s'ecrit

$$\frac{du}{dt} + \partial\tilde{\varphi}(u) = f \tag{7}$$

<u>Première estimation</u>. On a

$$\tilde{\varphi}(v) - \tilde{\varphi}(u(t)) \geqslant (f - \frac{du(t)}{dt} , v-u(t)) \tag{8}$$

Or $\tilde{\varphi}(v) = 0$; d'où intégrant (8) sur $]0,T[$ il vient

$$\int_0^T \tilde{\varphi}(u(t))dt \leqslant |f| \int_0^T |v-u(t)|dt + \frac{1}{2} | u_0 - v|^2$$

On en déduit aisément que

$$\frac{1}{T} \int_0^T \tilde{\varphi}(u(t)dt \leqslant T |f|^2 + \frac{1}{T} |u_0 - v|^2 \tag{9}$$

<u>Seconde estimation</u>.

Multipliant (7) par $\frac{du}{dt}$ et intégrant sur $[0,T]$ on obtient sans difficultés

$$\left(\int_0^T \left|\frac{du}{dt}\right|^2 dt \right)^{1/2} \leqslant |f| \sqrt{T} + \sqrt{\tilde{\varphi}(u(0))}$$

Comme $\left|\frac{du}{dt}\right|$ est décroissant, on a

$$\left|\frac{du}{dt}(T)\right| \leqslant |f| + \frac{1}{\sqrt{T}} \sqrt{\tilde{\varphi}(u(0))} \tag{10}$$

Preuve de (6)

Soit $t > 0$ et soit $\theta \in]0,t[$. Le théorème de la moyenne et l'inéquation (9) montrent qu'il existe $t_0 \in [0,\theta]$ tel que

$$\tilde{\varphi}(u(t_0)) \leqslant \theta |f|^2 + \frac{1}{\theta} |u_0 - v|^2$$

L'estimation (10) appliquée sur l'intervalle $[t_0,t]$ au lieu de $[0,T]$ conduit à

$$\left|\frac{du(t)}{dt}\right| \leqslant |f| + \frac{1}{\sqrt{t-t_0}} \sqrt{\tilde{\varphi}(u(t_0))} \leqslant \left(1 + \frac{\sqrt{\theta}}{\sqrt{t-\theta}}\right) |f|$$

$+ \dfrac{1}{\sqrt{\theta(t-\theta)}} |u_0 - v|$. Posant $\varepsilon = \dfrac{\sqrt{\theta}}{\sqrt{t-\theta}}$, on arrive au résultat.

Utilisant des techniques assez semblables, on peut résoudre le problème avec second membre.

Théorème 2. On suppose que $f \in L^2(0,T;\, H)$ et que $u_0 \in \overline{D(A)}$. Alors il existe $u \in C(0,T;H)$ unique fonction vérifiant

(11) u est dérivable p.p. sur $]0,T[$

(12) $u(t) \in D(A)$ p.p. sur $]0,T[$

(13) $\frac{du}{dt} \in L^2(\delta,T;\ H) \quad \forall 0 < \delta < T$

(14) $\varphi(u) \in C(\delta,\ T;\ H) \quad \forall 0 < \delta < T$

(15) $\frac{du}{dt} + (Au - f)^{\circ} = 0$ p.p. sur $]0,T[$

(16) $u(0) = u_0$

Si de plus $\varphi(u_0) < +\infty$, alors on a $\frac{du}{dt} \in L^2(0,T;H)$ et $\varphi(u) \in C(0,T;H)$.

Remarque. Si A est un opérateur maximal monotone quelconque, on savait précédemment résoudre le problème (15)-(16) avec des hypothèses supplémentaires i.e. $f \in C(0,T;H)$, $\frac{df}{dt} \in L^1(0,T;H)$ et $u_0 \in D(A)$. La solution obtenue est alors plus régulière i.e. $u(t) \in D(A)$ pour tout $t > 0$ et $\frac{du}{dt} \in L^{\infty}(0,T;H)$ (cf. Kato [4]).

II. Applications aux inéquations variationnelles paraboliques.

Commencons par un bref rappel sur les inéquations variationnelles elliptiques.

Soit V un espace de Hilbert de norme $\| \ \|$ et soit V' son dual (non identifié à V). Soit K un convexe fermé de V et soit $L : V \longrightarrow V'$ un opérateur lineaire continu et coer cif i.e. $(Lu,u) \geqslant \alpha \|u\|^2 \quad \forall u \in V$, $\alpha > 0$.

Pour tout $f \in V'$, il existe (d'aprés un résultat de Stampacchia) $u \in K$ unique solution de l'inéquation.

(17) $\qquad (Lu, v-u) \geqslant (f, v-u) \qquad \forall v \in K$.

On supposera dans la suite, afin de simplifier l'exposé, que $L^* = L$. Dans ce cas le problème (17) est équivalent à

$$\operatorname*{Min}_{u \in K} \frac{1}{2} (Lu, u) - (f,u) .$$

Étant donnée une fonction $\varphi : V \longrightarrow]-\infty , +\infty]$ convexe s.c.i, $\varphi \not\equiv +\infty$, on pose

$$\partial\varphi(u) = \{ f \in V' \,;\, \varphi(v) - \varphi(u) \geqslant (f, v-u) \quad \forall v \in V \}$$

Avec cette notation le problème (17) peut s'ecrire

$$Lu + \partial\Psi_K(u) \ni f$$

soit

$$\partial \left[\frac{1}{2} (Lu, u) + \Psi_K(u) \right] \ni f$$

où $\Psi_K(u) = \begin{cases} 0 , & u \in K \\ +\infty , & u \notin K . \end{cases}$

Passons maintenant aux inéquations variationnelles paraboliques. Soit H un espace de Hilbert de norme $|\ |$ tel que

$$V \subset H = H' \subset V'$$

avec injections continues et denses.

Problème. Étant donnés f et u_o , on cherche une fonction $u(t)$ telle $u(t) \in K$ p.p. et

$$(18) \begin{cases} \left(\frac{du}{dt}, v-u\right) + (Lu, v-u) \geqslant (f, v-u) \ \forall v \in K \ \text{p.p. sur }]0,T[\\ u(0) = u_o \end{cases}$$

Ce type de problème a été introduit pour la première fois dans Lions-Stampacchia [5] .

On se propose de montrer comment la théorie des semigroupes non linéaires peut s'appliquer à la résolution du problème (18) et conduire à une interprétation "concrète" de (18).

Comme l'opérateur $-(L + \partial\Psi_K)$ engendre formellement un semigroupe de contractions dans H , on est conduit à introduire dans l'espace H l'opérateur

$$Au = (Lu + \partial\Psi_K(u)) \cap H \quad \text{avec}$$

$$D(A) = \{u \in K \ ; \ (Lu + \partial\Psi_K(u)) \cap H \neq \emptyset\} ;$$

on notera que

$$\{u \in K \ ; \ Lu \in H\} \subset D(A)$$

Il est facile de voir que A est maximal monotone dans H et d'ailleurs on a $A = \partial\Phi$ (au sens du sous différentiel dans H) où

$$\Phi(u) = \begin{cases} \frac{1}{2}\,(Lu,\ u) & u \in K \\ +\infty & u \in H\ ,\ u \notin K \end{cases}$$

est une fonction convexe s.c.i. sur H .

De plus, on vérifie aisément que $\overline{D(A)} = \overline{K}$ (dans la suite, toutes les adhérences sont à prendre au sens de H).

Le point délicat est la description explicite de $D(A)$. Ici interviennent les théorèmes de régularité pour les inéquations variationnelles elliptiques prouvés dans Brezis Stampacchia [3] . Ils affirment que dans certains cas

$$D(A) = \{u \in K \quad ; \quad Lu \in H\}$$

et par suite $Au = Lu + \partial\Psi_{\overline{K}}(u)$.

Exemple. Soit Ω un ouvert borné de frontière Γ regulière. On prend $V = H_0^1(\Omega)$, $H = L^2(\Omega), L = -\Delta$ et

$$K = \{u \in H_0^1(\Omega) \ ; \ u \geq \psi \ \text{ p.p. sur } \Omega\}$$

avec $\psi \in H^2(\Omega)$, $\psi \leq 0$ p.p. sur Γ .

Alors $D(A) = \{u \in K\ ,\ Lu \in H\} = K \cap H^2(\Omega)$.

Appliquant à A le théorème 2 , il vient

Théorème 3. Soit $f \in L^2(0,T;H)$ et soit $u_0 \in \overline{K}$. Alors il existe une fonction $u \in C(0,T;H)$ unique vérifiant

(19) u est derivable p.p. et $\frac{du}{dt} \in L^2(\delta,T;H)$

pour tout $0 < \delta < T$.

(20) $u \in C(\delta, T; V)$ pour tout $0 < \delta < T$

(21) $u(t) \in D(A)$ p.p. sur $]0,T[$

(22) $\left(\frac{du}{dt} + Lu, v-u\right) \geq (f,v-u)$ p.p. sur $]0,T[$, $\forall v \in K$

(23) $u(0) = u_o$

Si de plus $u_o \in K$, alors $\frac{du}{dt} \in L^2(0,T;H)$ et $u \in C(0,T;V)$.

Remarque. Moyennant des hypothèses supplémentaires sur f et u_o , on obtient une solution plus régulière. Supposons par exemple $f \in C(0,T;H)$, $\frac{df}{dt} \in L^1(0,T;H)$ et $u_o \in \bar{K}$, alors on a au lieu de (19) et (21)

$\frac{du}{dt} \in L^{\infty}(\delta,T,H) \cap L^2(\delta,T;V)$ pour tout $0 < \delta < T$

et $u(t) \in D(A)$ pour tout $t > 0$.

Si l'on suppose de plus que $u_o \in D(A)$ alors on a

$\frac{du}{dt} \in L^{\infty}(0,T;H) \cap L^2(0,T;V)$ et $u(t) \in D(A)$ pour tout $t \in [0,T]$

Interprétation de (18).

Commençons par le cas des équations différentielles ordinaires i.e. $V = H = \mathbb{R}^n$ et supposons que $L = 0$.

On a grâce à (15)

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} + (\partial\psi_K(u) - f)^\circ = 0 & \text{p.p. sur }]0,T[\\ u(0) = u_0 & \end{cases}$$

Or pour tout convexe fermé C , il est immédiat que $(C-f)^\circ =$ $= \mathrm{Proj}_C\, f - f$. Par ailleurs $\partial\psi_K(u)$ est un cône, soit $\Pi_K(u)$ le cône polaire i.e. $\Pi_K(u) = \overline{\bigcup_{\lambda \geq 0} \lambda(K-u)}$.

On a alors $\mathrm{Proj}_{\partial\psi_{K(u)}} f - f = - \mathrm{Proj}_{\Pi_K(u)} f$

D'où $\dfrac{du}{dt} = \mathrm{Proj}_{\Pi_K(u)} f$ p.p. sur $]0,T[$.

Autrement dit, on a résolu le problème

$$\frac{du}{dt} = f \qquad \text{si } u \in \text{Int } K$$

$$\frac{du}{dt} = \mathrm{Proj}_{\Pi_K(u)} f \qquad \text{si } u \in \text{Frontière de } K$$

Dans le second cas on notera que si K est un convexe fermé régulier d'interieur non vide, alors $\Pi_K(u)$ est le demi espace contenant K et déterminé par l'hyperplan tangent à K en u (fig. 1)

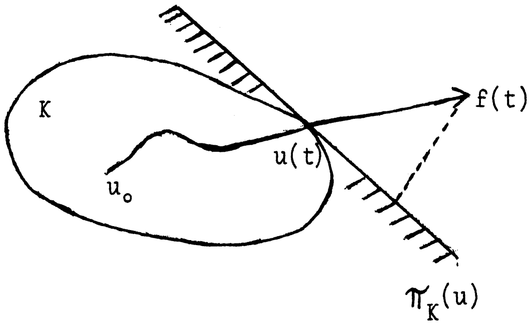

fig. 1

Remarquons que ce problème peut s'ecrire $\frac{du}{dt}(t) = F(t,u(t))$; toutefois F est discontinue et donc les résultats classiques ne peuvent pas être appliqués.

Revenons maintenant au cas général et faisons l'hypothèse de régularité

$$D(A) = \{u \in K \;\; ; \;\; Lu \in H\} .$$

On a alors grâce à (15)

$$\frac{du}{dt} + (\partial\psi_{\bar{K}}(u) + Lu - f)^{\circ} = 0 \quad \text{p.p. sur }]0,T[$$

Autrement dit, on a $\frac{du}{dt} = \mathrm{Proj}_{\Pi_{\bar{K}}(u)}(f - Lu)$ où

$\Pi_{\bar{K}}(u) = \overline{\bigcup_{\lambda \geq 0} \lambda(\bar{K}-u)}$ (les projections et adhérences sont au sens de H).

<u>Exemple</u>. Reprenant les mêmes notations et hypothèses qu'à l'exemple précédent il vient

$$\bar{K} = \left\{u \in L^2(\Omega) \ ; \ u \geqslant \psi \ \text{ p.p. sur } \Omega\right\}$$

$$\Pi_{\bar{K}}(u) = \left\{v \in L^2(\Omega) \ ; \ v \geqslant 0 \ \text{ p.p. sur } [u = \psi]\right\}$$

$$\text{Proj}_{\Pi_{\bar{K}}(u)}\, g = \begin{cases} g & \text{sur } [u > \psi] \\ \text{Max}\{g, 0\} & \text{sur } [u = \psi] \end{cases}$$

L'interprétation de l'inequation (18) est donc $u(x,t) \geqslant \psi(x)$

$$\frac{du}{dt} = \begin{cases} \Delta u + f & \text{sur } [u > \psi] \\ \text{Max}\left\{\Delta u + f, 0\right\} = \text{Max}\left\{\Delta\psi + f, 0\right\} & \text{sur } [u = \psi] \end{cases}$$

$u(x,0) = u_o(x)$.

Par ailleurs le théorème 3 montre que si $f \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$ et $u_o \in L^2(\Omega)$ avec $u_o \geqslant \psi$ p.p. sur Ω , alors

$$u \in C(0,T;\ L^2(\Omega)) \cap C(\delta,T;H_o^1(\Omega)) \cap L^2(\delta,T;H^2(\Omega))$$

$$\frac{du}{dt} \in L^2(\delta,T \ ; \ L^2(\Omega)) \quad \text{pour tout } 0 < \delta < T \ .$$

On trouvera dans [1] d'autres résultats de régularité (en particulier dans les espaces L^p) pour ce problème.

RÉFERENCES

[1] H. Brezis. Problèmes unilatéraux (Thèse), Paris 1970 (à paraitre).

[2] H. Brezis. Proprietés régularisantes de certains semi-groupes non linéaires(à paraitre).

[3] H. Brezis-G. Stampacchia. Sur la régularité de la solution d'inéquations elliptiques. Bull. Soc. Math. Fr. 96 (1958) p. 153-180.

[4] T. Kato. Accretive operators and non linear evolution equations in Banach spaces , Proc. Symp. Non linear Funct. Anal. Chicago A.M.S. 1968 .

[5] J.L. Lions-G. Stampacchia. Variational inequalities, Comm. pure and appl. Math. 20 (1967) p. 493-519.

CENTRO INTERNAZIONALE MATEMATICO ESTIVO

(C.I.M.E.)

F. E. BROWDER

NORMAL SOLVABILITY AND EXISTENCE THEOREMS FOR NONLINEAR MAPPINGS IN BANACH SPACES

Corso tenuto a Varenna dal 20 al 29 Agosto 1970

NORMAL SOLVABILITY AND EXISTENCE THEOREMS FOR NONLINEAR MAPPINGS IN BANACH SPACES

by

Felix E. Browder

(University of Chicago)

Introduction: Let X be a topological space, Y a Banach space, f a mapping of X into Y. The mapping f is said to be normally solvable if $f(X)$ is closed in Y. In the preceding paper (Browder [6]), we have described how the theory of normal solvability combines this hypothesis with infinitesimal assumptions upon the mapping f to obtain sufficient conditions for a given element y of Y to lie in $f(X)$.

In our present discussion, we shall sharpen the results obtained in [6] and apply them to obtain some new existence theorems for a general family of φ - accretive mappings in the sense of Browder [2]. The chief point of the sharpening lies in abandoning the imposition of hypotheses upon the asymptotic direction set $D_x(f)$ as in [6] and using direct hypotheses upon the local structure of the mapping f. Though the symptotic direction set $D_x(f)$ can be defined for mappings f which are continuous rather than differentiable in any sense (or have no continuity properties at all), it still carries too much of the natural structure of the closure of the range of the differential df_x when the latter exists to make it useful in the most general case.

Let us begin with the simplest result in this direction, which is an extremely simple reformulation of Theorem 1 of [5]:

Theorem 1: *Let* X *be a topological space,* Y *a Banach space,* f *a mapping of* X *into* Y *with* $f(X)$ *closed in* Y. *Let* y *be a given point in* Y, *and suppose that there exist* $r > 0$ *and* $p < 1$ *such that the following conditions hold:*

(1) $f^{-1}(B_r(y)) \neq \emptyset$.

(2) *For each* x *in* $f^{-1}(B_r(y))$, *there exist sequences* $\{u_j\}$ *in* X *and* $\{\xi_j\}$ *in the non-negative reals such that* $f(u_j) \longrightarrow f(x)$ *in* Y, *while*

$$\| \xi_j^{-1}(f(u_j)-f(x)) - (y-f(x))\| \leq p \| y - f(x)\|$$

for each j.

Then: y *lies in* $f(X)$.

The result of the present Theorem 1 differs from that of Theorem 1 of [6] in that we make no assumption that an infinite subsequence of the sequence

$$(\|f(u_j) - f(x)\|)^{-1}(f(u_j) - f(x))$$

converges to an element w of $D_x(f)$ as in the result given in [6].

We obtain results under weaker hypotheses upon the local behaviour of the mapping f by strengthening our assumptions on the Banach space Y.

Theorem 2: *Let* X *be a topological space*, Y *a Banach space whose conjugate space* Y^* *is uniformly convex*. *Let* f *be a mapping of* X *into* Y *such that* $f(X)$ *is closed in* Y. *Suppose that there exist* $\delta > 0$ *such that for each* x *in* X, *there exists a dense subset* R_x *of the unit sphere in* Y^* *such that the following property holds*:

(P) *For each* y^* *in* R_x *and for the given* x *in* X, there exists an infinite sequence $\{u_j\}$ in X with $f(u_j) \longrightarrow f(x)$, $f(u_j) \neq f(x)$ for any j, such that

$$(y^*, f(u_j) - f(x)) \geq \delta \, \|f(u_j) - f(x)\|$$

for each $j \geq 1$.

Then: $f(X) = Y$.

As an application of Theorem 2, we derive the following new result on a general class of φ - accretive mappings ([2]):

Theorem 3: Let X and Y be Banach spaces with Y^* uniformly convex f a mapping of X into Y with f satisfying a Lipschitz condition on each bounded subset of X. Suppose that there exists a mapping φ of X into Y^* such that $\|\varphi(v)\|_{Y^*} \leq \|v\|$, $\varphi(\xi v) = \xi\varphi(v)$ for each $\xi \geq 0$, v in X, and with the image of φ dense in Y^*. Suppose that for each x and u in X, and for a fixed constant $c > 0$, we have

$$(\varphi(x-u), f(x)-f(u)) \geq c \, \|x - u\|^2 .$$

Then: $f(X) = Y$.

Theorem 3 provides the beginning of a connecting theory of φ - accretive mappings which would link the theory of strongly monotone mappings for which $Y = X^*$ with the theory of accretiv mappings for which $Y = X$. Since the basic methods for the theories of monotone and accretive mappings are fundamentally different (as opposed to the results which are very similar in character), it is of fundamental importance in linking these two theories to obtain a new methodology from which results on φ- accretive mappings can be derived. It is our hope that the further development of the ideas of the theory of normally solvable mappings using refinements of the geometrical arguments in Banach spaces which we have been discussing may lead to the creation of such a methodology.

Let us complete the introductory discussion by stating one further Theorem which constitutes the appropriate form of Theorem 2 when we are concerned only with the question of whether a given element y of Y lies in $f(X)$.

<u>Theorem</u> 4: <u>Let</u> X <u>be a topological space</u>, Y <u>a Banach space whose conjugate space</u> Y^* <u>is uniformly convex. Let</u> f <u>be a mapping of</u> X <u>into</u> Y <u>such that</u> $f(X)$ <u>is closed in</u> Y. <u>Let</u> y <u>be a given point of</u> Y, <u>and suppose that there exist</u>

$r > 0$ _and_ $\delta > 0$ _such that the following conditions hold_:

(1) $f^{-1}(B_r(y))$ _is non-empty_

(2) _For each_ x _in_ $f^{-1}(B_r(y))$, _there exists a sequence_ $\{u_j\}$ _in_ X _such that_ $f(u_j) \neq f(x)$ _for each_ j , _while_ $f(u_j) \to f(x)$, _and_

$$(J(y-f(x)), f(u_j) - f(x)) \geq \delta \|y-f(x)\| \cdot \| f(u_j)-f(x)\|$$

(_where_ J _is the duality mapping of_ Y _into_ Y^*).

Then: y _lies in_ $f(X)$.

We recall that by the (normalized) duality mapping J of Y into Y^* , we mean the uniquely defined mapping J such that for each y in Y , $J(y)$ is the unique element of Y^* satisfying the two conditions:

$$(J(y),y) = \|y\|_Y^2 \; ; \; \|J(y)\|_{Y^*} = \|y\|_Y \, .$$

Since Y^* is uniformly convex, J is continuous from Y to Y^* and indeed uniformly continuous on bounded subsets of Y . Indeed, this latter property is equivalent to Y^* being uniformly convex. (See [2] for the appropriate discussion).

Section 1: We now begin the proof of the results stated above:

Proof of Theorem 1: This is almost identical with the proc of Theorem 1 of [6] , except for the concluding argument leadin to a contradiction. Let $S = f(X)$. We proceed as in the proof of Theorem 1 of [6] and find and element s_0 of the set $S \cap (s + C)$ such that for a given $\delta_1 > 0$, we have

$$(s_0 + C) \cap S \cap B_{\delta_1}(s_0) = \{s_0\} .$$

We now derive a contradiction (which is based ultimately upon the original assumption that $d_0 = \mathrm{dist}(y, f(X)) > 0$). By the present hypothesis, we have the sequence $s_j = f(u_j)$ in S which are all distinct from $s_0 = f(x)$, where as in the original prood

$$\|y - f(x)\| \leq r .$$

For each term of this sequence, we have

$$\| \xi_j^{-1}(f(u_j) - f(x)) - (y-f(x))\| \leq p \| y-f(x) \| ,$$

while $f(u_j) \longrightarrow f(w)$ as $j \longrightarrow \infty$. It follows that $\xi_j \longrightarrow 0$. Since $p < q$, it follows that for $\varepsilon > 0$, sufficiently small,

$$s + \xi_j^{-1}(f(u_j) - f(x)) \in B ,$$

and hence

$$\xi_j^{-1}(f(u_j) - f(x)) \in C .$$

Since C is a cone,

$$f(u_j) - f(x) \in C$$

for each j , i.e. $s_j = f(u_j)$ lies for all sufficiently large j in the intersection

$$(s_o + C) \cap S \cap B_{\delta_1}(s_o)$$

while each of the s_j is distinct from s_o . This contradicts the basic choice of s_o , and this contradiction yields the conclusion of the Theorem.

q.e.d.

For the proofs of Theorems 2, 3, and 4 , we shall show first that Theorem 3 follows from Theorem 2 , and then that Theorem 2 follows from Theorem 4 . We complete the discussion by then giving the detailed proof of Theorem 4 .

Proof of Theorem 3 from Theorem 2: For each x and u in X , we have the inequality

$$(\varphi(x-u), f(x) - f(u)) \geq c \| x-u \|^2 .$$