Giuseppe Grioli (Ed.)

CIME Summer Schools

Stereodynamics

56

Bressanone, Italy 1971

Springer

FONDAZIONE CIME ROBERTO CONTI

Giuseppe Grioli (Ed.)

Stereodynamics

Lectures given at a Summer School of the
Centro Internazionale Matematico Estivo (C.I.M.E.),
held in Bressanone (Bolzano), Italy,
June 2-12, 1971

Springer

FONDAZIONE
CIME
ROBERTO CONTI

C.I.M.E. Foundation
c/o Dipartimento di Matematica "U. Dini"
Viale Morgagni n. 67/a
50134 Firenze
Italy
cime@math.unifi.it

ISBN 978-3-642-10990-4 e-ISBN: 978-3-642-10991-1
DOI:10.1007/978-3-642-10991-1
Springer Heidelberg Dordrecht London New York

Reprint of the 1st ed. C.I.M.E., Ed. Cremonese, Roma 1972
With kind permission of C.I.M.E.

Printed on acid-free paper

Springer.com

CENTRO INTERNAZIONALE MATEMATICO ESTIVO

(C.I.M.E.)

I Ciclo - Bressanone - dal 2 al 12 Giugno 1971

"STEREODYNAMICS"

Coordinatore: Prof. G. Grioli

CENTRO INTERNAZIONALE MATEMATICO ESTIVO

(C.I.M.E.)

G. GRIOLI

PARTICULAR SOLUTIONS IN STEREODYNAMICS

Corso tenuto a Bressanone dal 2 al 12 giugno 1971

G. Grioli

CENNI INTRODUTTIVI

La dinamica del corpo rigido è uno dei capitoli della Meccanica razionale che ha destato per oltre due secoli il massimo interesse, sopratutto con riguardo al problema del solido pesante con un punto fisso.

Successivamente l'interesse si è un pò attenuato a vantaggio di altri settori della Meccanica, quali ad esempio, la teoria dei continui, la Meccanica analitica, la Relatività, ecc..

La Meccanica del corpo rigido è però tornata di grande attualità insieme all'epoca dei missili, dei grandi viaggi celesti, dato che alla base di ogni problema di movimento di un corpo esteso vi è generalmente una questione di stereodinamica.

In quanto segue io mi occuperò di Dinamica di un solo corpo rigido con un punto fisso senza attrito o del suo moto intorno al baricentro.

Mi limiterò a considerare taluni argomenti scelti nella immensa problematica che la stereodinamica presenta che sono certamente di indubbio interesse, riguardanti, in particolare, il solido pesante, il giroscopio a reazione, il moto in un campo gravitazionale nell'ordine di approssimazione abituale nella Meccanica celeste, il principio dell'effetto giroscopico, la teoria delle precessioni generalizzate.

oooooooooooooooooooo

Indicherò con G il baricentro del corpo rigido C e con $\mathcal{T}_s$ una terna solidale avente l'origine in G nel caso che non esistano per C punti fissi o in O se O è un punto fisso di C.

Denoterò con $x_1, x_2, x_3,$ le coordinate del generico punto P di C rispetto alla $\mathcal{T}_s$ che supporrò trirettangola levogira e di versori $\underline{i}_1, \underline{i}_2, \underline{i}_3$.

Denoterò inoltre con $\sigma \equiv \| \sigma_{ih} \|$ la matrice di inerzia relativa all'origine della terna solidale, cioè la matrice simmetrica

$$(1) \qquad \sigma \equiv \begin{vmatrix} A_1 & -A'_3 & -A'_2 \\ -A'_3 & A_2 & -A'_1 \\ -A'_2 & -A'_1 & A_3 \end{vmatrix}$$

ove A_1, A_2, A_3 denotano i momenti di inerzia di C rispetto agli assi della $\mathcal{T}_s$ e A'_1, A'_2, A'_3 i momenti di deviazione.

Per motivi di chiarezza avverto che con la scrittura

$$\underline{w} = \sigma v$$

intenderò riferirmi al vettore $\underline{w}$ che rispetto agli assi solidali ha le componenti $w_i = \sigma_{il} \; v_l$. Inoltre per motivo di concretezza fisica supporrò

$$(2) \qquad \sigma_{ii} > 0, \quad (i = 1, 2, 3), \quad \sigma_{11} + \sigma_{22} > \sigma_{33},$$

$$\sigma_{11} - \sigma_{22} < \sigma_{33}, \quad \text{ecc.}$$

In tal modo si intende escluso il caso di una distribuzione piana di masse, nel qual caso nelle (2) varrebbe qualche segno di uguaglianza.

Tuttavia, molte delle cose che saranno dette mantengono validità anche nel caso piano.

Nelle notazioni stabilite, l'equazione fondamentale dei momenti si presenta nella forma

(3) $$\sigma \dot{\underline{\omega}} + \underline{\omega} \times \sigma \underline{\omega} = \underline{M}$$

ove $\underline{\omega}$ denota la velocità angolare di C, il puntino derivazione rispetto agli assi solidali e $\underline{M}$ il momento risultante delle forze esterne rispetto all'origine della $\mathcal{T}_s$.

In molti casi concreti fisicamente interessanti il vettore $\underline{M}$ è funzione della velocità angolare $\underline{\omega}$ e di un vettore costante (nello spazio ambiente) $\underline{H}$.

Vale la pena di segnalare sin d'ora che l'essere [1]

(4) $$\underline{M} = \underline{\beta} \times \underline{\omega} + \operatorname{grad}_H U \times \underline{H} ,$$

ove $\underline{\beta}$ è un arbitrario vettore funzione di $\underline{H}$ e $\underline{\omega}$ e U è un'arbitraria funzione di $\underline{H}$, è condizione necessaria e sufficiente affichè il problema caratterizzato dalla (3) e dalla costanza di $\underline{H}$ ammetta l'integrale primo (dell'energia)

(5) $$\frac{1}{2} \sigma \underline{\omega} \cdot \underline{\omega} - U = E$$

mentre, invece, l'essere

(6) $$\underline{M} = \underline{\gamma} \times \underline{H} + \underline{\omega} \times \operatorname{grad}_H L$$

ove $\underline{\gamma}$ è un'arbitraria funzione di $\underline{H}$ e $\underline{\omega}$ e L una arbitraria funzione di $\underline{H}$ è condizione necessaria e sufficiente affinchè il problema caratterizzato da (3) e dalla costanza di $\underline{H}$ ammetta l'integrale primo [1]

(7) $$\sigma \underline{\omega} \cdot \underline{H} = L(H)$$

I due integrali primi (5), (7) sussistono poi contemporaneamente ove risulti

(8) $$\underline{M} = \mathrm{grad}_H U \times \underline{H} + \underline{\omega} \times \mathrm{grad}_H L$$

La condizione (8) è ad es., verificata nel caso del solido pesante, delle forze di Coriolis o di Lorentz, nel caso di forze gravitazionali dovute a un centro di attrazione.

G. Grioli

I
SOLIDO PESANTE

1. <u>Cenni storici</u> - $\underline{H}$ indichi ora il versore della verticale discendente, m la massa del corpo, g il modulo dell'accelerazione di gravità e sia, $l = |OG|$, $\alpha = mgl$. Denotando inoltre con $\underline{k}$ il versore OG, si ha, com'è noto,

(9) $$\underline{M} = \alpha \underline{k} \times \underline{H} .$$

All'equazione (3) va ora associata l'equazione di Poisson, esprimente l'invariabilità di $\underline{H}$ nello spazio:

(10) $$\dot{\underline{H}} + \underline{\omega} \times \underline{H} = 0 .$$

Lo studio del sistema (3), (10) ha dato adito a una letteratura vastissima. La conoscenza di quattro integrali primi algebrici permette di ridurre il problema alle quadrature. In generale si conoscono, però solo tre integrali primi delle (3), (10) : quello che esprime l'invariabilità del modulo di $\underline{H}$

(11) $$\underline{H} \cdot \underline{H} = 1 ,$$

quello dell'energia

(12) $$\frac{1}{2} \sigma \underline{\omega} , \underline{\omega} - \alpha k \cdot H = E$$

e quello esprimente la costanza della componente verticale del momento delle quantità di moto

(13) $$\underline{\sigma\omega} \cdot \underline{H} = \text{cost.} = K_H$$

Gli integrali primi (12), (13) sono sostanzialmente gli integrali (5), (7) e sussistono in quanto l'espressione di $\underline{M}$ rientra nella (8) pur di supporre $U = \alpha \underline{k} \cdot \underline{H}$, $L = \text{cost.}$

La esistenza di un quarto integrale primo algebrico si può stabilire soltanto nei seguenti tre casi.

I) Caso di Eulero e Poinsot. [2, 3] Supposto che O coincida con G (senza che questo sia necessariamente fisso, ma purchè $\underline{M}$ sia nullo), risulta $l = \alpha = 0$ e sussiste il quarto integrale primo

(14) $$\sigma \underline{\omega} \cdot \sigma \underline{\omega} = \text{cost.} = b \ .$$

esprimente l'invariabilità del modulo del momento delle quantità di moto.

La riducibilità alle quadrature è in tal caso immediata. Supposto che la terna solidale sia terna principale d'inerzia ($\sigma_{ih} = 0$, $i \neq h$), le (12), (14) divengono

(15) $$A_i \, p_i^2 = 2E \qquad A_i^2 \, p_i^2 = b$$

ove le p_i denotano [e così pure nel seguito] le componenti di $\underline{\omega}$ rispetto alla $\mathcal{T}_s$. Da (15), supposto $A_1 \neq A_2$, si deducono p_1, p_2 in funzione di p_3. La terza equazione di Eulero, ottenuta per proiezione della (3) sul terzo asse solidale, dà di conseguenza

(16) $$\frac{dp_3}{(A_1 - A_2)\, p_1 p_2} = \frac{dt}{A_3} \quad ,$$

ecc., pur di intendere p_1, p_2 espresse mediante p_3.

Se l'ellissoide centrale è a tre assi la (16) si integra per funzioni ellittiche, altrimenti per funzioni circolari.

II) Caso di Lagrange Poisson [4] , [5] , [6] . Si suppone $A_1 = A_2$, $k_1 = k_2 = 0$, $A_i' = 0$. L'ellissoide centrale è rotondo e sussiste come conseguenza immediata della terza equazione di Eulero, l'integrale primo

(17) $$p_3 = \text{cost.} = p_3^{(0)}$$

III) Caso di S. V. Kovalevskaya [7] , [8] , [9] . Si suppone soddisfatta la condizione strutturale $A_1 = A_2 = 2A_3$, $A_i' = 0$, $k_3 = 0$.

L'ellissoide principale di centro O è pertanto rotondo (senza che lo sia quello centrale d'inerzia) e il baricentro sta sul piano equatoriale. Si può dimostrare che di conseguenza sussiste l'integrale primo

(18) $$(p_1^2 - p_2^2 - \frac{1}{A_3} k_1 H_1)^2 + (2p_1p_2 - \frac{1}{A_3} k_1 H_2)^2 = \text{cost.}$$

oooooooooooooooooooo

E' possibile dimostrare che non possono esistere casi diversi dai tre richiamati in cui sia possibile stabilire un quarto integrale primo algebrico. Studi accurati hanno permesso di stabilire che l'esistenza di un tale quarto integrale primo può aversi solo quando le p_i , H_i risultano funzioni del tempo a un sol valore nell'intero piano complesso ma un teorema della Kovalevskaya, generalizzato da Lyapunov [10], stabilisce che solo nei tre casi prima considerati ciò può accadere.

Tuttavia, in taluni casi, pur non potendosi ridurre il problema alle quadrature è possibile stabilire delle relazioni invarianti che permettono di determinare delle classi di soluzioni. Ciò può accadere sotto determinate condizioni strutturali e per opportuni atti di moto iniziali. Supponendo che il riferimento solidale sia terna principale per O mi limiterò a ricordare due tra i casi più interessanti.

a) Caso di Hess [11]. Se in relazione al punto O è soddisfatta la condizione strutturale

$$(19)\qquad (A_2 - A_3)A_1k_1^2 - (A_1 - A_2)A_3k_3^2 = 0 \qquad k_2 = 0, \qquad (A_1>A_2>A_3),$$

sussiste la relazione invariante

$$(20)\qquad \sigma\underline{\omega} \cdot \underline{k} = 0$$

per ogni moto che la soddisfi inizialmente.

b) Caso di Chaplygin [12]. Nell'ipotesi strutturale $A_1^2 = A_2 = 4A_3$, $k_3 = 0$, e che la costante che interviene nell'integrale primo (13) sia nulla (momento delle quantità di moto orizzontale), sussiste la relazione invariante

$$(21)\qquad (p_1^2 + p_2^2)\,p_3 + \lambda^2\, p_1\, H_3 = \text{cost.},$$

con λ costante per ogni moto che vi soddisfi inizialmente.

Altri casi in cui sono note delle relazioni invarianti che permettono una integrazione parziale del problema del solido pesante esistono

(Steklov [13] , Bobylev [14] , Goyacev [15] , Mercalov [16] Corliss [17] , Field [18] , [19] , Harlamova [20] , [21] , Agostinelli [22] [23] , Zeuli [24] , Colombo [25] , ecc.), ma non mi dilungherò a richiamarli.

Casi vicini a quelli di Eulero Poinsot e Lagrange Poisson sono stati considerati da Pignedoli [26] . Vedi anche [27] , [28] . Per una più ampia bibliografia vedi [29] , [30] .

ooooooooooooooooooooo -

Nella dinamica del corpo rigido con un punto fisso come pure in quella del suo moto rispetto al baricentro presenta il massimo interesse il problema della determinazione di soluzioni semplici, cioè di soluzioni in cui è agevole comprendere come in realtà il corpo si muove.

Tra queste le più semplici sono evidentemente quelle corrispondenti alle rotazioni uniformi. Seguono le rotazioni non uniformi e i moti di precessione regolare (e non). Nei primi due casi una retta del corpo rimane fissa nello spazio, nel secondo essa forma angolo invariabile con una retta fissa dello spazio.

E' ben noto che rotazioni uniformi possono aversi per il solido pesante sempre e soltanto attorno a una qualunque retta di un certo cono di vertice O - cono di Staude - disposta verticalmente, con velocità angolare ben determinata e dipendente dalla retta che funge da asse di rotazione [31] .

Con riferimento ad assi solidali principali per O , l'equazione del cono di Staude è

$$(22) \quad (A_2 - A_3)k_1 \gamma_2 \gamma_3 + (A_3 - A_1)k_2 \gamma_3 \gamma_1 + (A_1 - A_2)k_3 \gamma_1 \gamma_2 =$$

$= 0 ,$

ove le γ_i denotano i coseni direttori della generica generatrice.

Al cono di equazione (22) appartengono evidentemente gli assi principali per O a cui corrisponde velocità di rotazione infinita e la retta baricentrale per O a cui corrisponde velocità angolare nulla.

Il cono di Staude si può caratterizzare come il luogo delle rette uscenti da O che sono assi principali per un loro punto.

Nel caso particolare che uno degli assi principali per O sia anche asse centrale, il cono di Staude degenera in due piani passanti per quell'asse.

Lo studio della stabilità delle rotazioni uniformi è stato fatto in moto completo con la distinzione degli assi di rotazione stabile da quelli di rotazione instabile [32] .

Per il solido pesante sono note anche delle rotazioni non uniformi, dette di Mlodzjejowsky [33] intorno all'asse principale di medio momento di inerzia disposto orizzontalmente. Esse possono aver luogo , subordinatamente all'atto di moto iniziale, solo se G appartiene al piano principale degli altri due assi principali. Il corpo in realtà oscilla come un pendolo composto pur consistendo il vincolo in quello di un punto fisso.

2. Qualche soluzione più recente. Per il solido pesante asimmetrico sono dinamicamente possibili dei moti di precessione regolare da me determinate qualche tempo fà [34] . Mi limiterò a richiamarle anche per potere fare in seguito qualche osservazione nel caso di forze gravitazionali.

Condizione necessaria per la loro esistenza è innanzitutto che O appartenga a una delle due rette, f, passanti per G e ortogonali ai piani delle sezioni circolari dell'ellissoide centrale d'inerzia. Prefissata la f, sia Q una delle due intersezioni di f con l'ellissoide centrale e χ l'angolo acuto di f e della normale in Q a tale ellissoide. Supposto O diverso da G, per il solido sono possibili, subordinatamente all'atto di moto iniziale ∞^2 moti di precessione regolare aventi per asse di figura la f e per asse di precessione una retta formante l'angolo χ con la verticale. Gli assi di figura e di precessione sono tra loro ortogonali, i periodi di rotazione propria e di precessione uguali e la velocità angolare ha il modulo espresso da

$$\omega = \frac{2\alpha\cos\chi}{A_3} . \tag{23}$$

E' interessante osservare che se l'ellissoide centrale è rotondo (caso giroscopico) le uniche precessioni regolari possibili sono quelle ben note in cui l'asse di precessione è verticale e quello di figura coincide con l'asse di rivoluzione dell'ellissoide centrale (asse giroscopico). D'altro canto è evidente che se si fa tendere χ a zero le due rette f tendono a sovrapporsi nell'asse giroscopico del giroscopio a cui il solido asimmetrico tende. Conseguentemente l'asse di precessio-

Si riconosce pertanto che le due rette f hanno in un certo senso per il solido asimmetrico la funzione che ha l'asse giroscopico nel caso di un giroscopio. Desidero richiamare l'attenzione su tale fatto che, a parer mio, può aprire la via a ricerche varie a qualcuna delle quali accennerò in seguito.

Lo studio della stabilità lineare delle precessioni regolari del solido pesante asimmetrico porta al seguente risultato: in generale si ha instabilità; si presenta la stabilità lineare solo in riguardo a piccole perturbazioni che lasciano invariate l'energia totale e la componente verticale del momento delle quantità di moto [35] .

Nei moti di Mlodzjejowsky prima richiamati si presenta la circostanza che in essi il momento delle quantità di moto rispetto a O , $\underline{K}_0$, ha nello spazio direzione invariabile, mantenendosi orizzontale .

Tali movimenti appartengono alla classe dei moti di Hess, risultando $\underline{K}_0 . OG = 0$ e nasce la questione se essi esauriscono la classe di tutti i moti per i quali $\underline{K}_0$ gode della proprietà di avere direzione invariabile. Ho potuto dimostrare che così non è. Precisamente, la classe dei moti durante i quali $\underline{K}_0$ mantiene direzione invariabile nello spazio comprende, oltre ai moti di Mlodzjejowsky anche quelli che si ottengono componendo questi ultimi con un ben determinato moto di rotazione propria intorno all'asse baricentrale per O . La dimostrazione è piuttosto complicata e la ometto. Mi limiterò ad affermare che trattasi di precessioni non regolari il cui asse di precessione è orizzontale e quello di figura è baricentrale. Tali precessioni sono descritte nelle seguenti righe [36] , [37] .

Si supponga innanzitutto che la terna solidale non sia terna principale ma abbia il suo terzo asse baricentrale ($k_1 = k_2 = 0$, $k_3 = 1$). La condizione strutturale di Hess si esprime allora anzichè al moto solido [vedi (19)] mediante le relazioni

$$(24) \qquad (A_1 - A_2) A_3 + A_1'^2 = 0, \qquad A_2' = A_3' = 0, \qquad A_1' \neq 0.$$

Siano b_1 e b_2 le funzioni di t di una qualunque soluzione del sistema

$$(25) \qquad \begin{cases} \dot{b}_1^2 = \dfrac{2}{A_1} \left[E - \alpha \cos(b_1 + n) \right] , \\ \dot{b}_2 = - \dfrac{A_1'}{A_3} \dot{b}_1 \cos b_2 , \end{cases}$$

ove E è la costante dell'energia ed n una seconda costante arbitraria. E' dinamicamente possibile la soluzione espressa dalle relazioni

$$(26) \qquad \underline{\omega} = - \dot{b}_1 (\operatorname{sen} b_2 \underline{i}_1 - \cos b_2 \underline{i}_2) - \dot{b}_2 \underline{i}_3 ,$$

$$(27) \qquad \underline{H} = \operatorname{sen}(b_1 + n) \left[\cos b_2 \underline{i}_1 + \operatorname{sen} b_2 \underline{i}_2 \right] - \cos (b_1 + n) \underline{i}_3 .$$

Non è difficile riconoscere che il momento delle quantità di moto ha l'espressione

$$(28) \qquad \underline{K}_0 = \sigma \underline{\omega} = - A_1 \dot{b}_1 (\operatorname{sen} b_2 \underline{i}_1 - \cos b_2 \underline{i}_2) .$$

E' facile verificare che la direzione di $\underline{K}_0$ risulta invariabile nello spazio e orizzontale ($\underline{K}_0 \cdot \underline{H} = 0$) .

Si riconosce altresì che le (25) ammettono la soluzione $\cos b_2 = 0$ alla quale corrispondono le rotazioni non uniformi di Mlodjejowsky attorno a un asse orizzontale.

G. Grioli

II

IL GIROSCOPIO A REAZIONE
(Solido autoeccitato)

Molto più recenti di quelli sul solido pesante sono gli studi che si riferiscono al problema del solido autoeccitato, detto anche giroscopio a reazione. Trattasi in effetti del problema del moto di un corpo rigido con un punto fisso o del suo moto intorno al baricentro nell'ipotesi che il momento $\underline{M}$ rispetto ad O (o a G) sia solidale a C in modo noto, o abbia in C direzione invariabile ma modulo dipendente da $\underline{\omega}$.

Tali problemi hanno interesse nella teoria dei satelliti e in genere nella teoria della propulsione a reazione.

Nei primi studi si è supposto che il momento $\underline{M}$ fosse solidale a C e il corpo un giroscopio (ellissoide centrale rotondo) [38]

In tale caso il problema si integra in modo completo sino alla determinazione di $\underline{\omega}$ e degli stessi angoli di Eulero.

Successivamente il problema è stato considerato nell'ipotesi che M dipenda in un certo modo da $\underline{\omega}$ e che il corpo eventualmente non sia un giroscopio [39] , [40] .

Nell'ipotesi giroscopica il problema è stato studiato anche supponendo C immerso in un mezzo viscoso [39] , [41] .

Particolari sviluppi si sono avuti nel caso di un solido qualunque nell'ipotesi di $\underline{M}$ parallelo a un asse principale, con componente rispetto ad esso espressa da

$$(29) \qquad m = a + b\,|\omega|^2$$

ove a e b sono due costanti [39] , [40] .

Si supponga dunque

$$\underline{M} = (a + b\,\omega^2)\,\underline{i}_3 \tag{30}$$

Supposto principale d'inerzia il riferimento solidale, le equazioni di Eulero divengono

$$\begin{cases} \dot{p}_1 - \dfrac{A_2 - A_3}{A_1}\, p_2 p_3 = 0 \,, \qquad \dot{p}_2 - \dfrac{A_3 - A_1}{A_2}\, p_3 p_1 = 0 \,, \\[2ex] \dot{p}_3 - \dfrac{A_1 - A_2}{A_3}\, p_1 p_2 = \dfrac{1}{A_3} \left[a + b\,(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) \right] , \end{cases} \tag{31}$$

che ammettono moti rotatori espressi da

$$p_1 = p_2 \equiv 0 \,, \qquad \dot{p}_3 = \frac{1}{A_3} \left[a + b p_3^2 \right] , \tag{32}$$

contenenti in particolare, le rotazioni uniformi $p_1 = p_2 \equiv 0$, $p_3^2 = - \frac{a}{b} > 0$.

Altre rotazioni uniformi sono espresse [in base a (31)] da

$$\begin{cases} p_1 = \text{cost.}, \qquad p_2 = \text{cost.}, \qquad p_3 = 0 \,, \\[2ex] (A_2 - A_1) p_1 p_2 = a + b(p_1^2 + p_2^2) \,, \end{cases} \tag{33}$$

purchè le costanti a, b, A, B, p_1, p_2, soddisfino a un'evidente condizione di realtà.

Il sistema (31) si può integrare in generale ponendo

$$(34) \qquad \lambda = \int p_3 dt \longrightarrow p_3 = \dot{\lambda} \, , \qquad \dot{p}_3 = \ddot{\lambda} \quad .$$

Supponendo nelle prime due equazioni (31) p_1, p_2 dipendenti da t per tramite di λ e denotando con l'apice la derivazione rispetto a λ quelle equazioni si scrivono

$$(35) \qquad p_1' - \frac{A_2 - A_3}{A_1} p_2 = 0 \, , \qquad p_2' - \frac{A_3 - A_1}{A_2} p_1 = 0$$

che si integrano senza difficoltà.

Nell'ipotesi $(A_3 - A_2)(A_3 - A_1) > 0$, p_1, p_2 risultano funzioni periodiche di λ .

Introducendo in (31,3) la soluzione generale dedotta da (35) si trova un'equazione non lineare in λ di aspetto un pò complicato ma che si riesce a integrare.

Il caso b = 0 (<u>M</u> solidale) è stato studiato in modo esauriente stabilendo che per l'estremo P del vettore velocità angolare applicato in O possono aversi moti a tendenza asintotica come pure moti periodici e caratterizzando le due eventualità [42] .

Nel caso b diverso da zero si può in generale affermare che P si muove su un cilindro a sezione conica e generatrici parallele all'asse a cui è parallelo <u>M</u> : basta osservare che da (35) segue con facilità

$$(36) \qquad \frac{A_1}{A_2 - A_3} p_1^2 - \frac{A_2}{A_3 - A_1} p_2^2 = \text{cost.}$$

Nell'ipotesi di <u>M</u> solidale (b = 0) ma non necessariamente parallelo a un asse principale sono state determinate da Grammel le rotazioni uniformi e ne è stata studiata la stabilità : le uniche rotazioni uniformi stabili sono quelle intorno all'asse di minimo o massimo momento di inerzia [37] .

Tale constatazione è sembrata in un primo tempo strana , in quanto la medesima rotazione uniforme del corpo si presenta come instabile se dovuta a un momento solidale di autoeccitazione mentre è stabile se dovuta al peso proprio. Intendo dire che nel caso delle rotazioni uniformi del solido pesante ci sono, com'è ben noto; infiniti assi di rotazioni stabili e inoltre si può osservare che in ognuna di tali rotazioni il momento del peso rispetto ad O si mantiene solidale al corpo e si potrebbe pensare di realizzarla con un momento solidale di autoeccitazione. Per quale motivo in tale secondo caso si ha instabilità? La curiosa apparente contraddizione cade non appena si osservi che i due casi sono profondamente diversi in quanto nel caso del solido pesante $\underline{M}$ cessa di essere solidale non appena si perturbi la rotazione uniforme che si considera mentre ciò non accade nel caso del solido autoeccitato.

Vale la pena inoltre di osservare che comunque si fissi una rotazione uniforme esiste sempre un momento solidale capace di renderla dinamicamente possibile ma non viceversa: non ogni momento solidale può dar luogo a un moto rotatorio uniforme. La proprietà è di immediata verifica. Basta osservare che le rotazioni uniformi sono caratterizzate dalle relazioni tra costanti

$$(37) \qquad \frac{(A_2 - A_3)}{A_1} p_2 p_3 = - M_1, \qquad \frac{(A_3 - A_1)}{A_2} p_3 p_1 = - M_2$$

$$\frac{A_1 - A_2}{A_3} p_1 p_2 = - M_3 .$$

Supposto il solido del tutto generico (non giroscopico) da (37) appare chiaro che mentre le p_i determinano le M_i invece l'esistenza di tre quantità reali costanti p_i soddisfacenti alle (37) richiede come condizione necessaria e sufficiente [supposto che almeno p_3 sia non nullo] .

$$\frac{A_1 A_2 (A_2 - A_1) M_1 M_2}{A_3 (A_3 - A_2)(A_1 - A_3) M_3} > 0 \quad . \tag{38}$$

oooooooooooooooooooooooooooo

Si generalizzi il problema del solido autoeccitato, supponendo $\underline{M}$ funzione generica di $\underline{\omega}$. Sussiste il seguente teorema : Condizione necessaria e sufficiente affinchè il moto di C sia sempre un moto di precessione qualunque sia l'atto di moto iniziale è che esista un vettore unitario $\underline{u}$ solidale e una costante ϑ tale che risulti

$$\underline{M} = \frac{\underline{\omega} \times \sigma\underline{\omega} \cdot \sigma^{-1}(\underline{u} \times \underline{\omega}) + |\underline{\omega} \times \underline{u}|^2 [|\underline{\omega} \times \underline{u}| \operatorname{ctg} \vartheta - \underline{\omega} \cdot \underline{u}]}{[\sigma^{-1}(\underline{u} \times \underline{\omega})]^2} \sigma^{-1}(\underline{u} \times \underline{\omega}) + \tag{39}$$

$$+ \underline{\tau} \times \sigma^{-1}(\underline{u} \times \underline{\omega}) ,$$

ove $\underline{\tau}$ è un vettore arbitrario funzione di $\underline{\omega}$ e σ^{-1} denota l'inversa della matrice d'inerzia. In tale moto di precessione il versore dell'asse di precessione , c , è definito dalla relazione

$$\underline{c} = \operatorname{sen} \vartheta \frac{\underline{u} \times (\underline{\omega} \times \underline{u})}{\underline{\omega} \times \underline{u}} + \cos \vartheta \, \underline{u} . \tag{40}$$

Inoltre, ϑ è l'angolo di $\underline{c}$ e $\underline{u}$. La giustificazione del teorema verrà data più avanti.

Se, in particolare, si identifica $\underline{u}$ con $\underline{i}_3$ si riconosce che le componenti di $\underline{M}$ rispetto alla τ_s sono espresse da

$$\begin{cases} M_1 = \left[(A_3 - A_2 + A_1)p_3 - \operatorname{ctg} \vartheta \, A_1 \sqrt{p_1^2 + p_2^2}\right] p_2 + l(p) \dfrac{p_1}{A_2} , \\[2ex] M_2 = \left[(A_1 - A_3 - A_2)p_3 + \operatorname{ctg} \vartheta \, A_2 \sqrt{p_1^2 + p_2^2}\right] p_1 + l(p) \dfrac{p_2}{A_1} , \\[2ex] M_3 = M_3 (p) , \end{cases} \tag{41}$$

ove $l(p)$ e $M_3(p)$ sono funzioni arbitrarie delle p_i .

Dalle equazioni di Eulero, tenuto conto di (41), si trae

$$(42)\quad \begin{cases} \dot{p}_1 = (p_3 - \mathrm{ctg}\,\vartheta \sqrt{p_1^2 + p_2^2}\,)p_2 + \dfrac{l(p)\,p_1}{A_1A_2} , \\ \dot{p}_2 = -\,(p_3 - \mathrm{ctg}\,\vartheta \sqrt{p_1^2 + p_2^2}\,)p_1 + \dfrac{l(p)\,p_2}{A_1A_2} \end{cases}$$

da cui segue

$$(43)\qquad \frac{d}{dt}(p_1^2 + p_2^2) = \frac{2l(p)}{A_1A_2}(p_1^2 + p_2^2) .$$

Se in particolare $l(p)$ è funzione delle p_i per tramite di $p_1^2 + p_2^2$ o è addirittura una costante, la (43) dà, con una quadratura,

$$(44)\qquad p_1^2 + p_2^2 = f(t)$$

Da (42, 1), (44) segue

$$(45)\qquad p_2 = \pm\sqrt{f(t) - p_1^2} , \qquad p_3 = F\left[f(t), p_1, \dot{p}_1\right] .$$

Le prime due equazioni di Eulero restano ormai soddisfatte, mentre la terza in base a (45) dà luogo a un'equazione nella sola $p_1(t)$ e il problema delle equazioni di Eulero è rinviato all'integrazione di quest'ultima equazione.

E' facile riconoscere che nel caso giroscopico con $M_3 = 0$, nell'ipotesi $l(p) = 0$, risulta $p_1^2 + p_2^2 = \text{cost.}$, $p_3 = \text{cost.}$ e il moto è una precessione regolare

G. Grioli

III

SULLA DINAMICA DI UN CORPO RIGIDO IN UN CAMPO NEWTONIANO CENTRALE

1. Generalità - Si supponga che il punto O di un corpo rigido C descriva con legge assegnata una curva Γ. Detto Q un punto fisso dello spazio ambiente, sia $\underline{H} = \text{vers}QO$, $r = r(t) = |QO|$.

Supporrò che la curva Γ sia piana e che Q appartenga al suo piano. Il moto di O sarà evidentemente caratterizzato dalla conoscenza di $r(t)$ e del vettore unitario $\underline{H}(t)$. Detto $\underline{e}$ il versore della normale orientata al piano del moto di O e ν un opportuno scalare, si ha, inoltre,

$$\frac{d\underline{H}}{dt} = \nu\, \underline{e} \times \frac{QO}{r} = \nu\, \underline{e} \times \underline{H} \quad . \tag{46}$$

Considererò il problema del moto di C intorno ad O nell'ipotesi che il corpo sia soggetto all'attrazione newtoniana dovuta a un centro di attrazione posto in Q, di massa m' supponendo che la distanza dei punti di C da Q sia tanto grande rispetto alle dimensioni di C da ritenersi valido un certo ordine di approssimazione abituale nella meccanica celeste, secondo quanto subito preciserò.

Facendo capo al solito riferimento solidale $\mathcal{T}_s$ di origine O si ha, per il generico P di C,

$$\begin{cases} QP = QO + OP = r\underline{H} + x_j \underline{i}_j \\ |QP|^2 = r^2 + 2rH_j x_j + x_j x_j \end{cases} \tag{47}$$

ove evidentemente le H_j denotano le componenti di $\underline{H}$ rispetto alla τ_s .

Posto

$$\eta_j = \frac{x_j}{r} \quad , \tag{48}$$

da (47) segue

$$\rho = |QP| = r\sqrt{1 + 2\,\eta_j H_j + \eta_j\,\eta_j} \quad . \tag{49}$$

Il momento risultante rispetto ad O delle attrazioni esplicate da Q su C è espresso da

$$\underline{M} = m'h \int_C 0P \times \gamma \frac{PQ}{\rho^3}\, dC \quad , \tag{50}$$

ove h è la costante di Gauss, m' la massa attraente e γ la densità di C .

Tenendo presenti le (47), (48) e sviluppando la (49) in serie di potenze delle η_j , dopo qualche calcolo si deduce

$$\underline{M} = -g(mOG) + \frac{3}{r}\,\sigma\,\underline{H}) \times \underline{H} + \ldots\ldots \tag{51}$$

con

$$g = \frac{m'h}{r^2} \quad . \tag{52}$$

Nella (51) i puntini indicano termini proporzionali a potenze di r^{-1} almeno del quarto ordine e ritenute trascurabili .