E. Magenes · G. Stampacchia (Eds.)

CIME Summer Schools

Teoria delle distribuzioni

24

Saltino, Italy 1961

Springer

FONDAZIONE CIME ROBERTO CONTI

E. Magenes • G. Stampacchia (Eds.)

Teoria delle distribuzioni

Lectures given at the
Centro Internazionale Matematico Estivo (C.I.M.E.),
held in Saltino (Firenze), Italy
September 1-9, 1961

Springer

FONDAZIONE
CIME
ROBERTO CONTI

C.I.M.E. Foundation
c/o Dipartimento di Matematica "U. Dini"
Viale Morgagni n. 67/a
50134 Firenze
Italy
cime@math.unifi.it

ISBN 978-3-642-10966-9 e-ISBN: 978-3-642-10967-6
DOI:10.1007/978-3-642-10967-6
Springer Heidelberg Dordrecht London New York

Reprint of the 1st ed. C.I.M.E., Ed. Cremonese, Roma, 1961
With kind permission of C.I.M.E.

Printed on acid-free paper

Springer.com

CENTRO INTERNATIONALE MATEMATICO ESTIVO
(C.I.M.E)

Reprint of the 1st ed.- Saltino, Italy, September 1-9, 1961

TEORIA DELLE DISTRIBUZIONI

CENTRO INTERNAZIONALE MATEMATICO ESTIVO

(C.I.M.E.)

B. MALGRANGE

OPERATORI DIFFERENZIALI

Lezioni raccolte e redatte da G.Geymonat, M.Miranda, S.Zaidman

ROMA - Istituto Matematico dell'Università

OPERATORI DIFFERENZIALI

di B. Malgrange

I N D I C E

B.Malgrange

Cap.IV - P-convessità

1) Definizione di P-convessità

2) Un teorema di esistenza in $\mathcal{D}'(\Omega)$

3) Caratterizzazione geometrica degli aperti P-convessi

4) Proprietà geometriche della frontiera degli aperti P-convessi

B. Malgrange

INTRODUZIONE

Notazioni

$\mathbb{R}^n$: $x = (x_1, \ldots, x_n)$

$k = (k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{N}^n$ ($\mathbb{N}$ interi non negativi)

$|k| = \sum_{j=1}^{n} k_j$, $\quad k! = \prod_{j=1}^{n} k_j!$

$x^k = \prod_{j=1}^{n} x_j^{k_j}$

$P(x) = \sum_{|k| \leq p} a_k x^k$, $\quad a_k \in \mathbb{C}$, $p \in \mathbb{N}$

$D = (\partial_1, \ldots, \partial_n)$, $\quad \partial_j = \frac{1}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial x_j}$

$P(D) = \sum_{|k| \leq p} a_k D^k$

$P(D)\delta \xrightarrow{\mathcal{F}} P(\xi)$, $\mathcal{F}$ trasformata di Fourier

$P^*(D)$ aggiunto di $P(D)$, cioè :

$\forall\ \varphi, \psi \in \mathcal{D}$: $(P(D)\varphi \mid \psi) = (\varphi \mid P^*(D)\psi)$, dove $(\mid)$ è il prodotto scalare in L^2, e $\mathcal{D}$ indica l'insieme delle funzioni definite su $\mathbb{R}^n$, indefinitamente differenziabili e a supporto compatto.

$P^*(D) = \bar{P}(D) = \sum_{|k| \leq p} \bar{a}_k D^k$

$$P^{(k)}(x) = \frac{\partial^{|k|} P(x)}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}} = (2i\pi)^{|k|} D^k P(x)$$

$\| \quad \|$ = norma in L^2

$(g \mid \varphi) = g(\bar{\varphi})$, per $g \in \mathcal{D}'$, $\varphi \in \mathcal{D}$, dove $\mathcal{D}'$ è il duale di $\mathcal{D}$.

$P(x,D) = \sum_{|k| \leq p} a_k(x)\, D^k$, operatore differenziale a coefficienti variabili che per semplicità supporremo indefinitamente differenziabili.

$P^*(x,D)$ = aggiunto di $P(x,D)$

p è il grado di $P(D)$ o $P(x,D)$, cioè non è $a_k = 0$, $\forall\ |k| = p$; o $a_k(x) \equiv 0$, $\forall\ |k| = p$.

$p(D) = \sum_{|k|=p} a_k\, D^k$, parte principale di $P(D)$

$p(x,D) = \sum_{|k|=p} a_k(x)\, D^k$, parte principale di $P(x,D)$.

Identità di Leibniz

$$(1) \qquad P(D)(f.g) = \sum_k \frac{1}{k!}\, P^{(k)}(D)f.D^k g$$

Verifichiamo la (1) per $f,g \in \mathcal{D}$. Essa verrà nel seguito usata anche per $f, g \notin \mathcal{D}$, ma si vedrà allora, volta per volta, che nei casi che interesseranno essa vale per estensione del caso qui considerato.

Essendo $f, g \in \mathcal{D}$ potremo allora usare, per la verifica della (1), la trasformata di Fourier classica con tutte le sue proprietà che si stabiliscono direttamente.

Avremo allora che, se

$$f \xrightarrow{\mathcal{F}} F$$

$$g \xrightarrow{\mathcal{F}} G ,$$

allora : $P(D)(f.g) \xrightarrow{\mathcal{F}} P(\xi).(F * G)(\xi)$.

$$P(\xi)(F * G)(\xi) = \int P(\xi)F(\xi-\eta)G(\eta)d\eta =$$

$$= \int P(\xi-\eta+\eta)F(\xi-\eta)G(\eta)d\eta =$$

$$= \int (\sum_k \frac{1}{k!} P^{(k)}(\xi-\eta)\ \eta^k).F(\xi-\eta)G(\eta)d\eta =$$

$$= \sum_k \frac{1}{k!} \int P^{(k)}(\xi-\eta)F(\xi-\eta)\ \eta^k G(\eta)d\eta =$$

$$= \sum_k \frac{1}{k!} \left[P^{(k)}(\xi)F(\xi)\right] * \left[\xi^k G(\xi)\right] =$$

$$= \sum_k \frac{1}{k!} \left[\mathcal{F}(P^{(k)}(D)f)\right] * \left[\mathcal{F}(D^k g)\right] =$$

$$= \sum_k \frac{1}{k!} \mathcal{F}\left[P^{(k)}(D)f.D^k g\right] = \mathcal{F}\left[\sum_k \frac{1}{k!} P^{(k)}(D)f.D^k g\right]$$

e quindi, essendo $\mathcal{F}$ iniettiva, la (1).

B. Malgrange

CAPITOLO I

CONFRONTO DI OPERATORI DIFFERENZIALI

1. Una disuguaglianza per un problema di esistenza.

Consideriamo il seguente

Problema 1.1.

"Sia Ω un aperto di R^n, $P(x,D)$ un operatore differenziale a coefficienti variabili definiti su Ω, sotto quali condizioni si ha

$$P(x,D)\, L^2(\Omega) \supset L^2(\Omega), \tag{1.1}$$

cioè sotto quali condizioni l'equazione :

$$P(x,D)f = g \tag{1.2}$$

è risolubile in $L^2(\Omega)$ per ogni $g \in L^2(\Omega)$."

Osservazione 1.1.

La uguaglianza (1.2) va intesa nel senso delle distribuzioni, e cioè

$$P(x,D)f = g \Longleftrightarrow (f \mid \overset{*}{P}(x,D)\varphi) = (g \mid \varphi), \quad \forall\ \varphi \in \mathcal{D}(\Omega). \tag{1.3}$$

Dimostreremo il seguente :

Teorema 1.1.

"La (1.1) vale se e solo se $\exists$ una costante C, per cui

$$\|\varphi\| \le C\, \|P^*(x,D)\varphi\|, \quad \forall\ \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)." \tag{1.4}$$

Dimostrazione

Cominciamo col far vedere che (1.4) $\Longrightarrow$ (1.1) :

sia infatti $g \in L^2(\Omega)$, si tratta di trovare $f \in L^2(\Omega)$ per cui si verifichi (1.3).

Ricordando la rappresentazione dei funzionali lineari continui su $L^2(\Omega)$, si tratta di far vedere che esiste un funzionale antilineare continuo in $L^2(\Omega)$ (e basta definirlo in $\mathcal{D}(\Omega)$) il quale su $P^*(x,D)\,\mathcal{D}(\Omega)$ verifichi (1.3).

Indichiamo con $(f|\ )$ il funzionale cercato. Osserviamo che (1.3) definisce $(f|\ )$ su $P^*(x,D)\,\mathcal{D}(\Omega)$, infatti se $P^*(x,D)\,\varphi = 0 \Longrightarrow \varphi = 0$ per la (1.4).

Resta quindi solo da far vedere che $(f|\ )$, così definito, è continuo su $P^*(x,D)\,\mathcal{D}(\Omega)$ (cfr. Teorema di Hahn-Banach) e questo è facile conseguenza della (1.4), infatti :

$$\left|(f\,|P^*(x,D)\varphi)\right| = \left|(g,\varphi)\right| \leq \|g\|\,\|\varphi\| \leq C\,\|g\|\cdot\|P^*(x,D)\varphi\|$$

e cioè :

$$\left|(f\,|P^*(x,D)\varphi)\right| \leq C'\,\|P^*(x,D)\varphi\|$$

da cui la continuità.

Mostriamo ora che (1.1) $\Longrightarrow$ (1.4) :

Per questo indichiamo con E l'insieme degli elementi $f \in L^2(\Omega)$ tali che $P(x,D)f \in L^2(\Omega)$. Abbiamo allora che (1.1) equivale a

$$(1.5) \qquad P(x,D)E = L^2(\Omega)\ .$$

E è ovviamente spazio lineare; su di esso consideriamo la norma $|||\ \ |||$ definita da

$$(1.6)\qquad |||f|||^2 = \|f\|^2 + \|P(x,D)f\|^2 .$$

E' ovvio che con tale norma E risulta completo, cioè di Banach, e che l'applicazione

$$(1.7)\qquad \begin{aligned} P(x,D) :\ & E \longrightarrow L^2(\Omega) \\ & f \longrightarrow P(x,D)f \end{aligned}$$

è lineare, continua e surgettiva.

Essendo E ed $L^2(\Omega)$ spazi di Banach, e la (1.7) una applicazione lineare continua e surgettiva, si ha, per un teorema di Banach, che $\exists$ C tale che

$$(1.8)\qquad \exists\ f \in E \ \text{ con } \ |||f||| \leq C \ \text{ e } \ P(x,D)f = g \ ; \text{ per ogni } g \in L^2(\Omega) \ \text{ con } \ \|g\| \leq 1.$$

Dalla (1.8) segue allora facilmente la (1.4), infatti:

$$\|\varphi\| = \sup_{\|g\|\leq 1} |(g\,|\,\varphi)| \leq \sup_{|||f|||\leq C} |(P(x,D)f\,|\,\varphi)| =$$

$$= \sup_{|||f|||\leq C} |(f\,|\,P^*(x,D)\varphi)| \leq \sup_{\|f\|\leq C} |(f\,|\,P^*(x,D)\varphi)| \leq$$

$$\leq \sup_{\|f\|\leq C} \|f\| \cdot \|P^*(x,D)\varphi\| = C\,\|P^*(x,D)\varphi\| .$$

c.v.d.

2. Un teorema di esistenza per operatori a coefficienti costanti.

Dimostreremo il seguente :

Teorema 2.1.

"Sia Ω limitato e P(D) a coefficienti costanti, allora

$$P(D)\, L^2(\Omega) \supset L^2(\Omega) \text{ ."} \tag{2.1}$$

Dimostrazione

Per il Teorema 1.1. si tratta di far vedere che $\exists$ C tale che valga

$$\| \varphi \| \leq C \| \bar{P}(D) \varphi \| \quad , \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) . \tag{2.2}$$

Osserviamo che

$\| \bar{P}(D) \varphi \| = \| P(D) \varphi \|$, in quanto P(D) e $\bar{P}(D)$ commutano, e perciò la (2.2) può scriversi

$$\| \varphi \| \leq C \| P(D) \varphi \| \quad , \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) . \tag{2.3}$$

Faremo vedere che $\exists$ C per cui vale

$$\| P'_1 (D) \varphi \| \leq C \| P(D) \varphi \| , \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \tag{2.4}$$

dove $C = C(p, \Omega)$ dipende da Ω (precisamente dal diametro di Ω) e p (grado di P).

Provata la (2.4), se ne ricava, con lo stesso ragionamento

$$\| P'_i (D) \varphi \| \leq C \| P(D) \varphi \| \quad , \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \; , \quad C = C(p, \Omega)$$

($P_i'(D)$ è l'operatore associato al polinomio $\dfrac{\partial P(\xi)}{\partial \xi_i}$) e quindi (disuguaglianza di Hörmander)

$$(2.5)\qquad \left\| P^{(k)}(D)\varphi \right\| \leq C \left\| P(D)\varphi \right\| , \quad \forall\ \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

dove $C = C\ (p, \Omega,\ k)$. E la (2.5) contiene in particolare la (2.3).

Si tratta quindi di provare la (2.4). Per questo osserviamo che dalla identità di Leibniz si ha

$$(2.6)\qquad P(D)(x_1\varphi) = x_1 P(D)\varphi + \frac{1}{2i\pi} P_1'(D)\varphi \ , \ \forall\ \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Quindi :

$$P_1'(D)\varphi = 2i\pi . P(D)(x_1\varphi) - 2i\pi . x_1\ P(D)\varphi$$

$$\left\| P_1'(D)\varphi \right\|^2 = 2i\pi\left(P(D)(x_1\varphi) \mid P_1'(D)\varphi\right) - 2i\pi\left(x_1 . P(D)\varphi \mid P_1'(D)\varphi\right) =$$

$$= 2i\pi\left(\bar{P}_1'(D)(x_1\varphi) \mid \bar{P}(D)\varphi\right) - \text{id.} = 2i\pi\left(x_1\ \bar{P}_1'(D)\varphi \mid \bar{P}(D)\varphi\right) +$$

$$+ \left(\bar{P}_{11}''(D)\varphi \mid \bar{P}(D)\varphi\right) - \text{id.}$$

$$\left\| P_1'(D)\varphi \right\|^2 \leq c_1 \left\| \bar{P}_1'(D)\varphi \right\| . \left\| \bar{P}(D)\varphi \right\| + c_2 \left\| \bar{P}_{11}''(D)\varphi \right\| . \left\| \bar{P}(D)\varphi \right\| +$$

$$+ c_3 \left\| P(D)\varphi \right\| . \left\| P_1'(D)\varphi \right\| .$$

Quindi :

$$(2.7)\quad \left\| P_1'(D)\varphi \right\|^2 \leq c_1' \left\| P(D)\varphi \right\| . \left\| P_1'(D)\varphi \right\| + c_2 \left\| P_{11}''(D)\varphi \right\| . \left\| P(D)\varphi \right\| ,$$

$$\forall\ \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) ,$$

dove c_1' dipende dal diametro di Ω , e precisamente da

$$\sup_{\Omega} |x_1| .$$

La (2.7) permette di provare la (2.4) per induzione su p . Infatti la (2.4) si ha che vale certamente per operatori di grado zero. Se d'altra parte essa vale per operatori di grado p-1, allora, essendo P(D) di grado p è $P'_1(D)$ di grado p-1 e quindi si ha

$$(2.8) \qquad \| P''_{11}(D)\varphi \| \leq C_0 \| P'_1(D)\varphi \| \; , \; \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

con $\qquad C_0 = C(p-1,\Omega)$

Dalla (2.7) e (2.8) segue allora la (2.4).

c.v.d.

3. Precisazioni sulla disuguaglianza di Hörmander per gli operatori differenziali a coefficienti costanti.

Consideriamo la disugugaglianza

$$(3.1) \qquad \| P^{(k)}(D)\varphi \| \leq C \; \| P(D)\varphi \| \; , \quad \forall \; \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \; ;$$

provata nel paragrafo precedente per il caso di Ω limitato.

Abbiamo già osservato come C dipenda da p e k e da Ω. Vogliamo qui innanzitutto precisare quest'ultima dipendenza. Per questo, fissato Ω , essendo $\lambda \in R$, $\lambda > 0$, consideriamo l'aperto

$$\lambda\Omega = \{ \lambda x \; ; \; x \in \Omega \} \quad .$$

Ci proponiamo di valutare $C(\lambda\Omega, p, k)$, mediante $C(\Omega, p, k)$.

Per questo osserviamo che, se $\varphi \in \mathcal{D}(\lambda\Omega)$, allora $\psi(x) = \varphi(\lambda x) \in \mathcal{D}(\Omega)$. D'altra parte valgono le

(3.2) $$(P(D)\varphi)(\lambda x) = P\left(\frac{D}{\lambda}\right)\psi(x)$$

(3.3) $$(P^{(k)}(D)\varphi)(\lambda x) = P^{(k)}\left(\frac{D}{\lambda}\right)\psi(x),$$

inoltre, se indichiamo $Q(D) = P(\frac{D}{\lambda})$, si ha

(3.4) $$Q^{(k)}(D) = \frac{1}{\lambda^{|k|}} \cdot P^{(k)}\left(\frac{D}{\lambda}\right).$$

Quindi, scrivendo per Q(D) la disuguaglianza di Hörm.,

(3.5) $$\left\| Q^{(k)}(D)\psi \right\| \leq C(\Omega, p, k) \left\| Q(D)\psi \right\|, \qquad \psi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

ne segue :

$$\frac{1}{\lambda^{|k|}} \left\| P^{(k)}(D)\varphi \right\| \leq C(\Omega, p, k) \left\| P(D)\varphi \right\|, \ \forall \varphi \in \mathcal{D}(\lambda\Omega)$$

da cui, la disuguaglianza di Hörmander vale in $\mathcal{D}(\lambda\Omega)$ con $C(\lambda\Omega, p, k)$ verificante

(3.6) $$C(\lambda\Omega, p, k) \leq \lambda^{|k|} C(\Omega, p, k).$$

Possiamo quindi affermare che vale la seguente :

<u>Proposizione 3.1.</u>

"<u>Se</u> $C(\Omega, p, k)$ <u>è la migliore costante per cui vale la</u> (3.1), <u>allora</u> $C(\Omega, p, k)$ <u>tende a zero per diam</u> $\Omega \to 0$."

Proveremo ora la seguente :

<u>Proposizione 3.2.</u>

"<u>Vale la</u>

(3.7) $$\left\| e^{2i\pi\langle a,x\rangle} P^{(k)}(D)\varphi \right\| \leq C(\Omega, p, k) \cdot \left\| e^{2i\pi\langle a,x\rangle} P(D)\varphi \right\|$$

$$\forall a \in \mathbb{C}, \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)."$$

Dimostrazione

Dalla identità di Leibniz si ha

$$(3.8)\qquad P(D)(e^{2i\pi\langle a,x\rangle}\varphi) = \left\{ \sum_k \frac{1}{k!}\, a^k\, P^{(k)}(D)\varphi \right\} \cdot e^{2i\pi\langle a,x\rangle} = e^{2i\pi\langle a,x\rangle}\, P(D+a)\varphi \, .$$

Applicando allora la (3.1) all'operatore $P(D-a)$ e alla funzione $e^{2i\pi\langle a,x\rangle}\,\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ (se $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$), e tenendo presente la (3.8) (che vale anche per $P^{(k)}(D)$ in luogo di $P(D)$), ne segue la (3.7).

c.v.d.

4. Supporto delle soluzioni di equazioni differenziali.

Osserviamo innanzitutto che, dalla (3.1), per continuità, vale :

$$(4.1)\qquad \left\| P^{(k)}(D)\varphi \right\| \leq C \left\| P(D)\varphi \right\| , \qquad \forall\ \varphi \in \mathcal{D}^p(\Omega) ;$$

dove $\mathcal{D}^p(\Omega)$ indica lo spazio delle funzioni continue con le loro derivate fino all'ordine p e a supporto compatto contenuto in Ω .

Dimostreremo allora il seguente :

Teorema 4.1.

"Sia $f \in C^p$ e tale che valga :

$$(4.2)\qquad \left| P(D)f(x) \right| \leq C(x) \sum_{|k|\geq 1} \left| P^{(k)}(D)f(x) \right| \quad (1)$$

---

(1) Una disuguaglianza come la (4.2) vale per le f che sono solu-

./.

<u>con</u> $C(x)$ <u>limitata su ogni compatto contenuto in</u> Ω .

<u>Sia</u> Γ <u>un insieme convesso e chiuso contenente il supporto di</u> f .

<u>Allora, per ogni</u> $a \in \Omega$, <u>punto estremale di</u> Γ , <u>esiste un intorno di</u> a <u>in cui</u> $f \equiv 0$."

<u>Dimostrazione</u>

Per comodità poniamo che $a \equiv 0$ (origine) e che sia il piano $x_1 = 0$ a separare a da Γ , cioè sia $\Gamma \cap \{x;\ x_1=0\} = \{a\}$, $\Gamma \cap \{x;\ x_1 < 0\} = \emptyset$.

Ricordiamo allora che per proprietà degli insiemi convessi si ha, posto $\Gamma_\varepsilon = \{x \in \Gamma\ ;\ x_1 < \varepsilon\}$:

$$(4.3) \qquad \Gamma_\varepsilon \twoheadrightarrow a \qquad \text{per} \quad \varepsilon \to 0 ,$$

quindi in particolare

$$(4.4) \qquad \operatorname{diam} \Gamma_\varepsilon \to 0 \qquad \text{per} \quad \varepsilon \to 0 .$$

Indichiamo, fissato $\varepsilon > 0$, con α una funzione $\in C^\infty(R)$ per cui valga :

$$(4.5) \qquad \alpha(x_1) = \begin{cases} 1 & \text{per} \quad x_1 < \varepsilon \\ 0 & \text{per} \quad x_1 > 2\varepsilon \end{cases} , \quad |\alpha| \leq 1 .$$

Per la (4.3), se ε è sufficientemente piccolo $\alpha.f \in \mathcal{D}^p(\Gamma\ )$. Allora applicando la (3.7) (anch'essa estensibile a $\mathcal{D}^p(\Gamma^{2\varepsilon}_{2\varepsilon})$) ad $a = (-\frac{\lambda}{2i\pi}, 0,.., 0)$ e $\varphi = \alpha .f$, si ha

---

zioni di una equazione
$P(D)f + \sum_{|k| \geq 1} a_k(x)P^{(k)}(D)f = 0$, con $a_k(x)$ continui (o localm. L^∞).

$$(4.6)\qquad \left\| e^{-\lambda x_1} P^{(k)}(D)(\alpha f) \right\| \leq C \left\| e^{-\lambda x_1} P(D)(\alpha f) \right\| , \quad \forall k$$

D'altra parte è :

$$\left\| e^{-\lambda x_1} P(D)(\alpha f) \right\|^2 = \int_{x_1<\varepsilon} e^{-2\lambda x_1} \cdots \int |P(D)(f)|^2 dx + \int_{x_1>\varepsilon} e^{-2\lambda x_1} \cdots \int |P(D)\alpha f|^2 dx$$

Inoltre dalla (4.2) si ricava :

$$(4.7)\qquad \int_{x_1<\varepsilon} e^{-2\lambda x_1} \cdots \int |P(D)f|^2 dx \leq C'' \int_{x_1<\varepsilon} e^{-2\lambda x_1} \cdots \int \sum_{|k|\geq 1} |P^{(k)}(D)f|^2 dx$$

Quindi, dalle (4.6) e (4.7), si ha :

$$(4.8)\qquad \sum_{|k|\geq 1} \left\| e^{-\lambda x_1} P^{(k)}(D)(\alpha f) \right\|^2 \leq$$

$$\leq C_o . C'' . C^2 \int_{x_1<\varepsilon} e^{-2\lambda x_1} \cdots \int \sum_{|k|\geq 1} |P^{(k)}(D)f|^2 dx +$$

$$+ C_o C^2 \int_{x_1>\varepsilon} e^{-2\lambda x_1} \cdots \int |P(D)(\alpha f)|^2 dx , \qquad \text{con } C_o \text{ costante.}$$

Se ε è sufficientemente piccolo può supporsi $C_o C'' . C^2 < 1$ (cfr.(4.4)). Allora, dalla (4.8) si ricava :

$$(4.9)\qquad \int_{x_1<\varepsilon} e^{-2\lambda x_1} \cdots \int \sum_{|k|\geq 1} |P^{(k)}(D)f|^2 dx \leq C''' \int_{x_1>\varepsilon} e^{-2\lambda x_1} \cdots \int |P(D)(\alpha f)|^2 dx, \forall \lambda$$

e C''' non dipende da λ. Quindi :

$$(4.10)\qquad \int_{x_1<\varepsilon} e^{-2\lambda x_1} \cdots \int \sum_{|k|\geq 1} |P^{(k)}(D)f|^2 dx \leq C'_o . C''' e^{-2\lambda\varepsilon} , \quad \forall \lambda > 0$$

dove $C'_o = \int_{x_1>\varepsilon} \cdots \int |P(D)(\alpha f)|^2 dx$, è indipendente da λ.

Dalla (4.10) segue allora :

$$\int_{x_1<\varepsilon} e^{2(\varepsilon - x_1)\lambda} \cdots \int \sum_{|k|\geq 1} |P^{(k)}(D)f|^2 dx \leq C'_o . C''' , \quad \forall \lambda > 0$$

$$(4.11) \qquad e^{\lambda\varepsilon} \int_{x_1 < \frac{\varepsilon}{2}} \cdots \int \sum_{|k| \geq 1} \left| P^{(k)}(D)f \right|^2 dx \leq C''' \cdot C'_0 \;, \; \forall \lambda > 0$$

Perciò deve essere :

$\int_{x_1 < \frac{\varepsilon}{2}} \cdots \int \sum_{|k| \geq 1} \left| P^{(k)}(D)f \right|^2 dx = 0$, da cui in particolare l'asserto.

c.v.d.

Dal teorema ora dimostrato segue facilmente il

Corollario 4.1. (Teorema dei supporti)

" $\forall\, \varphi \in \mathcal{D}^p(R^n)$ si ha

$$(4.12) \qquad \text{inv.conv.supp.}\, \varphi = \text{inv.conv.supp.}\, P(D)\varphi \text{ ."}$$

Dimostrazione

Essendo ovvia nella (4.12) la inclusione " $\supset$ " resta da provare che " $\supset$ " non è un'inclusione stretta. Per questo procediamo per assurdo, cioè supponiamo che la " $\supset$ " valga in senso stretto. Allora esiste un punto estremale a di inv.conv.supp. φ che non appartiene ad inv.conv.supp. $P(D)\varphi$ quindi neanche a supp. $P(D)\varphi$.(1)

Quindi $\exists$ una sfera di centro a , che indichiamo con Ω, in cui $P(D)\varphi \equiv 0$.

Allora, in Ω, φ verifica senz'altro la (4.2).

Dal Teorema 4.1., applicato a φ , Ω , al punto a ed al convesso

(1) Ricordiamo che due insiemi convessi compatti coincidono se e solo se hanno gli stessi punti estremali.

Γ = inv.conv.supp. φ , si ricava che φ è nulla in un intorno di a ; ma questo è assurdo essendo a punto estremale di invil.con. supp. φ , quindi di supp. φ , quindi a $\in$ supp.φ .

Ne segue l'asserto.

c.v.d.[1]

Sempre come conseguenza del Teorema 4.1. diamo il

Corollario 4.2.

"Se f $\in C^2$ e verifica

$$(4.13) \quad \left|\Delta f(x)\right| \leq C' \left\{ \sum_{j=1}^{n} \left|\frac{\partial f}{\partial x_j}(x)\right| + \left|f(x)\right| \right\}, \quad \forall\, x \in \Omega$$

dove Ω è un aperto connesso di R^n, ed è, in un intorno di un punto di Ω , f $\equiv$ 0 , allora f $\equiv$ 0 su Ω ."

Dimostrazione

Supponendo, per comodità, che f sia nulla intorno all'origine, consideriamo la trasformazione

$$x \longrightarrow \frac{x}{r^2} \quad , \quad r = |x|$$

e la nuova funzione

$$\tilde{f}(x) = \frac{1}{r^{n-2}} f(x/r^2) \quad .$$

Poichè è $\Delta\tilde{f} = \frac{1}{r^4}\, \widetilde{\Delta f}$, $\tilde{f} \in C^2$, anzi $\tilde{f} \in \mathcal{D}^2(\tilde{\Omega})$ dove $\tilde{\Omega}$ è il trasformato di Ω , e poichè anche f verifica una disuguaglianza del tipo (4.13), si può vedere, applicando ad essa il Teorema 4.1., che f è nulla in insieme aperto e chiuso, al

---

(1) Per regolarizzazione si mostra facilmente che il risultato precedente è ancora vero per $\varphi \in \mathcal{E}'(R^n)$.

tempo stesso, di $\tilde{\Omega}$ (ovviamente non vuoto), d'altra parte, essendo $\tilde{\Omega}$, come Ω, connesso, ne segue $\tilde{f} \equiv 0$ su $\tilde{\Omega}$ e quindi $f \equiv 0$ su Ω.

c.v.d.

<u>Osservazione 4.1.</u>

Il <u>Corollario 4.2.</u> è banale per le funzioni armoniche (poichè esse sono analitiche). Esso si applica più in generale alle soluzioni dell'equazione

$$\Delta f = \sum_i a_i(x) \frac{\partial f}{\partial x_i} + b(x) f \,.$$

Con gli $a_i(x)$, $b(x)$ continui (o anche localmente L^∞).

5. Confronto di operatori differenziali.

A) Operatori differenziali a coefficienti costanti.

Cominciamo col dimostrare la seguente

<u>Proposizione 5.1.</u>

"<u>Dati</u> $Q(D)$ <u>e</u> $P(D)$ <u>per i quali valga</u>

$$|Q(\xi)|^2 \leq C' \sum_k |P^{(k)}(\xi)|^2 \,, \quad \forall \; \xi \in R^n \,, \tag{5.1}$$

<u>allora, per ogni aperto limitato</u> $\Omega \subset R^n$, $\exists$ C <u>tale che</u>

$$\| Q(D)\varphi \| \leq C \, \| P(D)\varphi \| \quad , \quad \forall \; \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)." \tag{5.2}$$

<u>Dimostrazione</u>

Essendo $Q(D)\varphi \xrightarrow{\mathcal{F}} Q(\xi)\,\phi(\xi)$, dove $\varphi \xrightarrow{\mathcal{F}} \phi$, si ha per la formula di Plancherel

$$(5.3) \qquad \| Q(D)\varphi \|^2 = \int |Q(\xi)|^2 \, |\phi(\xi)|^2 \, d\xi \, .$$

D'altra parte, dalla (5.1), segue :

$$(5.4) \qquad \int |Q(\xi)|^2 \, |\phi(\xi)|^2 d\xi \leq C' \sum_k \int |P^{(k)}(\xi)|^2 |\phi(\xi)|^2 d\xi =$$

$$= C' \sum_k \| P^{(k)}(D)\varphi \|^2 .$$

D'altra parte, essendo Ω limitato, esiste C per cui

$$(5.5) \qquad \sum_k \| P^{(k)}(D)\varphi \|^2 \leq C \, \| P(D)\varphi \|^2 , \quad \forall \quad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) .$$

Allora dalle (5.3), (5.4), (5.5) segue l'asserto.

c.v.d.

Come applicazione della <u>Prop. 5.1.</u> mostriamo i seguenti:

<u>Corollario 5.1.</u>

"<u>L'operatore di Laplace</u>, Δ , <u>maggiora, nel senso che vale la (5.2) per ogni</u> Ω <u>aperto limitato di</u> R^n, <u>tutti gli operatori di ordine</u> ≤ 2."

<u>Dimostrazione</u>

Si tratta di far vedere che, essendo Q un $\forall$ operatore di ordine ≤ 2, vale per Q e $P(D) = \Delta$ la (5.1), cioè esiste C' per cui

$$(5.6) \qquad |Q(\xi)|^2 \leq C' \left\{ \left(\sum_{j=1}^{n} \xi_j^2\right)^2 + \sum_{j=1}^{n} \xi_j^2 + 1 \right\} .$$

Questo fatto è ovvio, se $Q(\xi)$ è un $\forall$ polinomio di grado ≤ 2 , quindi si ha, per la <u>Prop.5.1.</u> l'asserto.

c.v.d.

Osservazione 5.1.

Poichè nella maggiorazione (5.6) quello che conta, al secondo membro, è il termine $\left\{ \left(\sum_{j=1}^{n} \xi_j^2 \right)^2 + 1 \right\}$, possiamo affermare che il Corollario 5.1. vale per ogni operatore ellittico, in luogo di Δ. Più precisamente si ha :

Corollario 5.2.

"Se P(D) è operatore ellittico di grado 2m, allora esso maggiora, nel senso della (5.2), tutti gli operatori differenziali di grado $\leq$ 2m".

Si ha ancora un altro interessante

Corollario 5.3.

"L'operatore del calore, cioè l'operatore associato al polinomio

$$P(\xi, \tau) = |\xi|^2 + i\tau$$

maggiora tutti gli operatori differenziali di secondo grado nelle variabili spaziali, e di primo nella variabile temporale. In particolare esso maggiora tutti gli operatori di grado 1."

Dimostrazione

Si riduce a verificare la

$$|Q(\xi, \tau)|^2 \leq C' \left\{ \left| \sum_{j=1}^{n} \xi_j^2 + i\tau \right|^2 + \sum_{j=1}^{n} \xi_j^2 + 1 \right\},$$

ovvia per i $Q(\xi, \tau)$ precisati nell'enunciato.

c.v.d.

Dimostriamo ora il seguente :

Teorema 5.1.

"Dati P e Q, sono condizioni equivalenti le :

1) $\exists\; C' : \; |Q(\xi)|^2 \leq C' \sum_k |P^{(k)}(\xi)|^2 , \quad \forall\; \xi \in R^n$

2) $\exists\; \Omega \subset R^n$ e $C : \; \|Q(D)\varphi\| \leq C\, \|P(D)\varphi\|, \; \forall\; \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$

3) $\forall\, \Omega$ limitato, $\exists\; C : \|Q(D)\varphi\| \leq C\, \|P(D)\varphi\| , \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$."

Dimostrazione

Che 1) $\Rightarrow$ 3) è stato visto nella Prop.5.1. E' ovvio d'altra parte che 3) $\Rightarrow$ 2).

Resta da verificare che 2) $\Rightarrow$ 1).

Sia Ω l'aperto per cui vale 2) e sia $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$ fissata e $\psi \not\equiv 0$.

Si ha che

$$\varphi(x) = e^{2i\pi<\xi,x>}\psi(x) \in \mathcal{D}(\Omega) , \quad \forall\; \xi \in R^n .$$

Applicando l'identità di Leibniz si ha :

$$Q(D)\left[e^{2i\pi<\xi,x>}\psi(x)\right] = e^{2i\pi<\xi,x>}\sum_k \frac{1}{k!}\, Q^{(k)}(\xi)D^k\psi(x)$$

Quindi :

$$\left\| Q(D)\left[e^{2i\pi<\xi,x>}\psi(x)\right]\right\|^2 = \tag{5.7}$$

$$= \sum_{k,l} \frac{1}{k!}\,\frac{1}{l!}\, Q^{(k)}(\xi)\, \overline{Q^{(l)}(\xi)}\, (D^k\psi \,|\, D^l\psi).$$

Dalla (5.7) e da una analoga per P(D), e dalla 2) segue:

$$\sum_{k,l} \frac{1}{k!l!}\, Q^{(k)}(\xi)\, \overline{Q^{(l)}(\xi)}(D^k\psi|D^l\psi) \leq \tag{5.8}$$

$$\leq C^2 \sum_{k,l} \frac{1}{k!l!} P^{(k)}(\xi)\, \overline{P^{(l)}(\xi)}(D^k\psi|D^l\psi) .$$