CIME Summer Schools

64

Jaures Cecconi (Ed.)

Spectral Analysis

Varenna, Italy 1973

Springer

FONDAZIONE CIME ROBERTO CONTI

Jaures Cecconi (Ed.)

Spectral Analysis

Lectures given at a Summer School of the
Centro Internazionale Matematico Estivo (C.I.M.E.),
held in Varenna (Como), Italy,
August 24-September 2, 1973

Springer

FONDAZIONE
CIME
ROBERTO CONTI

C.I.M.E. Foundation
c/o Dipartimento di Matematica "U. Dini"
Viale Morgagni n. 67/a
50134 Firenze
Italy
cime@math.unifi.it

ISBN 978-3-642-10953-9 e-ISBN: 978-3-642-10955-3
DOI:10.1007/978-3-642-10955-3
Springer Heidelberg Dordrecht London New York

Reprint of the 1st ed. C.I.M.E., Ed. Cremonese, Roma 1974
With kind permission of C.I.M.E.

Printed on acid-free paper

Springer.com

CENTRO INTERNAZIONALE MATEMATICO ESTIVO
(C.I.M.E.)

III Ciclo - Varenna - dal 24 Agosto al 2 Settembre 1973

SPECTRAL ANALYSIS

Coordinatore: Prof. J. Cecconi

CENTRO INTERNAZIONALE MATEMATICO ESTIVO

(C.I.M.E.)

QUELQUES RÉSULTATS D'ANALYSE SPECTRALE POUR DES OPÉRATEURS DIFFÉRENTIELS À COEFFICIENTS CONSTANTS SUR DES DOMAINES NON BORNÉS

GIANFRANCO BOTTARO

Corso tenuto a Varenna dal 24 agosto al 2 settembre 1973

GIANFRANCO BOTTARO

Quelques résultats d' analyse spectrale pour des opérateurs différentiels à coefficients constants sur des domaines non bornés

1. Nous connaissons le résultat suivant

Théor. Si A est un opérateur autoadjoint de domaine contenu dans un espace de Hilbert H, il admet une diagonalisation canonique, c'est à dire qu'il existe un opérateur unitaire

$$U : H \longrightarrow \int_{\sigma(A)} H(\lambda)\, d\mu$$

où $\int_{\sigma(A)} H(\lambda)\, d\mu$ est une intégrale directe d' espaces de Hilbert séparables, μ est une mesure de Radon sur $\sigma(A)$ (spectre de A), la dimension des $H(\lambda)$ est supposée fonction mesurable Borel, U a la propriété suivante

$$U\ f(A)\ u(\lambda) = f(\lambda)\ U\, u(\lambda)\ ;$$

où f est une fonction de Baire sur $\sigma(A)$; pour tous les $u \in H$ tels que

$$\int_{\sigma(A)} \left| f(\lambda)\ U\, u(\lambda) \right|^2 d\mu < \infty\ ;$$

c'est à dire que $Uf(A)U^*$ est l'opération de multiplication par f sur $\int_{\sigma(A)} H(\lambda)\, d\mu$.

Gårding [4] a exposé une idée pour construire cette diagonalisation dans le cas d'opérateurs différentiels elliptiques à coefficients constants sur $L^2(R^n)$, c'est à dire $A = p\left(\frac{\partial}{i\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{i\partial x_n}\right)$, où , p est un polynôme réel défini positif. Nous savons que la transformée de Fourier

$$\wedge : L^2(R^n, |\ |) \longrightarrow L^2(R^n, \frac{|\ |}{(2\pi)^n})$$

est une application unitaire qui diagonalise A d'une façon non canonique. En effet, si nous prenons A ,

$$\text{dom } A = \left\{ u \in L^2(R^n) : \int_{R^n} |p(\lambda)U\ u(\lambda)|^2 d\lambda < \infty \right\}$$

on a

$$\widehat{Au}(\lambda) = p(\lambda)\ \hat{u}(\lambda) .$$

La méthode que Gårding a proposé pour construire la diagonalisation canonique est celle-ci : si $p(\lambda) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \lambda_i \lambda_j$, $a_{ij} = a_{ji}$, p défini positif, on considère $R(p) = R_+$; S_t la variété d'équation $p(\lambda) = t$, et on pose

$$H_t = L^2(S_t, \omega_t), \text{ où } dt\, d\omega_t = \frac{d\lambda}{(2\pi)^n} .$$

Si $h_j(t, \cdot)$ est une base orthonormée pour H_t on définit

$$V : L^2(R^n, \frac{|\ |}{(2\pi)^n}) \longrightarrow \int_{R(p)} H_t\, dt$$

où

$$(Vv)(t) = \sum_j \left(\int_{S_t} v(\lambda)\overline{h_j(t,\lambda)}\,d\omega_t \right) h_j(t,\lambda)$$

pour tous les $v \in L^2(R^n, \frac{|\ |}{(2\pi)^n})$.

V est sûrement unitaire et alors

$$W = V \cdot \wedge \ : L^2(R^n, |\ |) \longrightarrow \int_{R(p)} H_t\,dt$$

est aussi unitaire et on a

$$(W\,Au)(t) = \sum_j \left(\int_{S_t} p(\lambda)\hat{u}(\lambda)\overline{h_j(t,\lambda)}\,d\omega_t \right) h_j(t,\lambda) = t(V\hat{u})t = t(Wu)(t)\ .$$

Si nous connaissons une diagonalisation canonique, il est facile de construire une collection complète de fonctions propres géneralisées pour A, c'est à dire des distributions φ_j telles que

$$< Au, \varphi_j(t,.) > = t < u, \varphi_j(t,.) >$$

pour chaque $u \in \mathcal{D}(R^n)$. En effet il suffit d'exprimer $(Wu)_j(t)$ de la façon suivante

$$(Wu)_j(t) = < u, \varphi_j(t,.) >$$

pour chaque $u \in \mathcal{D}(R^n)$; et cela est possible, parce que A est elliptique et par conséquent S_t est compact. En appliquant le théorème de Fubini on a alors

$$(Wu)_j(t) = \int_{S_t} \int_{R^n} e^{-i(x,\lambda)} u(x)\overline{h_j(t,\lambda)}\,dx\,d\omega_t = \int_{R^n} u(x)\,\overline{\varphi_j(t,x)}\,dx$$

où φ_j è la fonction suivante

$$\varphi_j(t,x) = \int_{S_t} e^{i(x,\lambda)} h_j(t,\lambda)\, d\omega_t \quad .$$

2. Ceci dit, voyons comment une telle idée est réalisée pour l'opérateur classique $-\Delta$ sur $L^2(R^n)$ [2] et comment on peut laisser tomber l'hypothèse que l'opérateur à coefficients constants soit défini sur tout l'espace.

Il est clair que pour un opérateur A , ayant un domaine dense dans $L^2(\Omega)$(où Ω est un ouvert de R^n), il suffit de construire un opérateur unitaire

$$U : L^2(\Omega) \longrightarrow L^2(R^n, \frac{1\ 1}{(2\pi)^n})$$

tel que

$$(U\,Au)(\lambda) = p(\lambda)(Uu)(\lambda)$$

pour chaque $u \in$ dom A parce qu'apres cela, nous pouvons encore appliquer l'idée que nous avons décrite: c'est à dire que nous avons besoin d'une diagonalisation non canonique, qui prenne la place de la transformée de Fourier.

Etudions donc le cas de l'opérateur de Laplace: on peut considerer comme base orthonormée pour L^2 de la sphère unité une collection d' harmoniques sphériques y_{kj} (k est le degré du polynôme harmonique correspondant et $j=1........N(k,n) = \frac{n+2k-2}{n+k-2}\binom{n+k-2}{k}$ est le nombre d ' harmoniques spheriques de degré k lineairement indépendantes en dimension n. On peut prendre comme base orthonormée pour $L^2(S_t, \omega_t)$ les fonctions

$$h_{kj}(t,\lambda) = 2(2\pi)^n \; t^{\frac{1}{2}-\frac{n}{4}} \; y_{kj}(\tilde{\lambda}); \quad \text{avec } \tilde{\lambda} = \frac{\lambda}{|\lambda|} \quad .$$

Si alors nous faisons le calcul que nous avons décrit pour construire une collection complète de fonctions propres généralisées pour $(-\Delta)$ nous avons

$$\varphi_{kj}(t,x) = \left(\frac{i^k}{\sqrt{2}}\right) |x|^{1-n/2} \; J_{(n/2)+k-1} \; (|x|\sqrt{t}) \; y_{kj}(\tilde{x}) \; ;$$

cette formule est obtenue en représentant la fonction exponentielle au moyen les harmoniques spheriques et les fonctions de Bessel de première espéce. On peut aussi verifier que $\varphi_{kj} \in L^p(R^n)$ si $p > \frac{2n}{n-2}$, en connaissant l'expression asymptotique $J_\nu(r) = O(r^{-\frac{1}{2}})$; en outre $\varphi_{kj} \in C^\infty(R^n)$, parce que $|x|^k \; y_{kj}(x)$ est un polynôme harmonique et

$$(|x| \sqrt{t})^{1-k-(n/2)} \; J_{(n/2)+k-1} \; (|x| \sqrt{t})$$

est une fonction analytique en $(t|x|^2)$.

A partir de l'opérateur qui diagonalise canoniquement on peut obtenir d'une façon naturelle l'expression

$$f(x) = \lim_{s \to \infty} \int_0^s \sum_{kj} f_{kj}(t) \, \varphi_{kj}(t,x) dt, \text{ pour chaque } f \in L^2(R^n);$$

où $f_{kj}(t) = \lim_{s \to \infty} \int_{S(0,s)} f(x)\, \overline{\varphi_{kj}(t,x)}\,dx$;

$$P(s)f = \int_0^s \sum_{kj} f_{kj}(t)\, \varphi_{kj}(t,x)\,dt$$

est une résolution de l'identité pour $(-\Delta)$.

Nous avons ainsi demontré le

<u>Theor.</u> L'opérateur $(-\Delta)$ avec domain $H^2\ (R^n)$ admet une diagonalisation canonique

$$W : L^2(R^n, |\ |) \longrightarrow \int_{R_+} L^2(S_t, \omega_t)\,dt$$

definie par $(Wf)_{kj}(t) = \lim_{s \to \infty} \int_{S(0,s)} f(x)\, \overline{\varphi_{kj}(t,x)}\,dx$

où

$$\varphi_{kj}(t,x) = \frac{i^k}{\sqrt{2}} |x|^{1-(n/2)} J_{(n/2)+k-1}(|x|\sqrt{t})\, y_{kj}(\tilde{x})$$

sont des fonctions propres géneralisées pour $(-\Delta)$ qui sont fonctions $C^\infty(R^n) \cap L^p(R^n)$ $(p > \frac{2n}{n-2})$ et pour chaque $f \in L^2(R^n, |\ |)$ nous avons la synthèse suivante

$$f(x) = \lim_{s \to \infty} \int_0^s \sum_{kj} (Wf)_{kj}(t)\, \varphi_{kj}(t,x)\,dt\ .$$

3. Le problème que nous étudions maintenant est celui de construire l'opérateur qui diagonalise $-\Delta$ dans le cas où le domain de l'opérateur n'est pas constitué de fonctions définies sur tout l'espace R^n, mais seulement sur une partie [2]. Nous étudierons dans un premier temps quelques cas particuliers :

a) Pour le laplacien ayant comme domain

$$\left\{f \in H^2(\Omega): \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1, \ldots\ldots, x_{n-1}, 0)=0\right\} \text{ où } \Omega = \left\{(x_1, \ldots x_n) \in R^n : x_n > 0\right\}$$

la transformée de Fourier est bien remplacée par l'opérateur unitaire suivante

$$U : L^2(\Omega) \longrightarrow L^2(R^n)$$

où

$$(Uf)(\lambda) = \int_\Omega f(x)\,\overline{F(x,\lambda)}\,dx$$

si $f \in C_0^\infty(\bar{\Omega})$ où $F(x,\lambda) = e^{-i\sum_{j=1}^{n-1} x_j \lambda_j} \cos x_n \lambda_n$.

b) D'une façon analogue, si le laplacien a comme ensemble de définition

$$\left\{f \in H^2(\Omega): f(x, \ldots x_{n-1}, 0) = f(x_1, \ldots x_{n-1}, \ell) = 0\right\}$$

où $\Omega = \left\{(x_1, \ldots x_n) \in R^n : 0 < x_n < \ell\right\}$ on pose $M = \left\{\frac{m\,\Pi}{\ell}, m \in N\right\}$

remplaçons l'opérateur de Fourier par

$$U : L^2(\Omega) \longrightarrow L^2(R^{n-1} \times M)$$

où

$$(Uf)(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}, \frac{m\pi}{\ell}) = \int_\Omega f(x)\, \overline{F(x,\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}, \frac{m\pi}{\ell})}\, dx$$

si $f \in C_0^\infty(\bar\Omega)$ et

$$F(x, \lambda_1, \ldots \lambda_{n-1}, \frac{m\pi}{\ell}) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\; e^{-i \sum_{j=1}^{n-1} x_j \lambda_j} \sin \frac{m\pi}{\ell} x_n$$

c) Enfin nous signalons l'exemple suivant : le laplacien ayant comme domaine $\left\{ f \in H^2(\Omega) \;:\; f = 0 \text{ sur } S_{a^2} = \{x \in R^n : |x| = a\} \right\}$ où

$$\Omega = R^n \setminus \left\{ (x_1, \ldots x_n) \in R^n \;:\; |x| \leq a \right\}.$$

Nous définissons

$$U : L^2(\Omega) \longrightarrow L^2(R^n)$$

en posant pour $f \in C_0^\infty(\bar\Omega)$

$$(Uf)(\lambda) = \int_\Omega f(x)\, \overline{F(x, \lambda)}\, dx$$

où $F(x, \lambda) = e^{i(x,\lambda)} + v(x, \lambda, \ell)$; $v(x, \lambda, \ell) =$

$$= -\sum_{kj} (2\pi)^{\frac{n}{2}}\, i^k\, \frac{y_{kj}(\tilde{x})\, y_{kj}(\tilde{\lambda})}{(|x|\,|\lambda|)^{(n/2)-1}}\, J_{\frac{n}{2}+k-1}(a\,\ell) \times$$

$$\times\, H^{-1}_{\frac{n}{2}+k-1}(a\,\ell)\, H_{\frac{n}{2}+k-1}(|x|\,\ell) \quad (\text{où } x \in \Omega,\ \lambda \in R^n,\ \ell \in \mathbb{C})$$

J_ν et H_ν étant des fonctions de Bessel de première et troisième espèce. Il est interessant de noter les conditions qui sont verifiées par $v(x, \lambda, \ell)$ parce qu'elles seront caracteristiques du problème général. Elles sont:

$$(-\Delta)\, v(x, \lambda, \ell) = \ell^2\, v(x, \lambda, \ell)$$

$$v(x, \lambda, |\lambda|) = -e^{i(x, \lambda)} \qquad \text{si} \quad x \in S_2$$

$$\frac{\partial v(x, \lambda, |\lambda|)}{\partial |x|} - i|\lambda|\, v(x, \lambda, |\lambda|) = o(|x|^{(1-n)/2})$$

La dernière est connue comme "condition de Sommerfeld", où de radiation. Ces relations peuvent être prouvées par l'utilisation de techniques élémentaires de fonctions holomorphes et de l' expression asymptotique suivante des fonctions de Bessel de troisième éspece

$$H_\nu(z) = \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{\frac{1}{2}} e^{i(z-\frac{1}{2}\nu\pi - 1/4\,\pi)}\left(1 + O\left(\frac{1}{|z|}\right)\right).$$

Il serait intéressant de donner une idée du

<u>**Théor.**</u> U est une diagonalisation pour $(-\Delta)$ sur le domaine donné.

Si l'on suppose pour un moment que U est unitaire on a pour chaque $f \in C_0^\infty(\bar\Omega)$, $f = 0$ sur S_{a^2}:

$$(U(-\Delta)f)(\lambda) = \int_\Omega (-\Delta) f(x)\, \overline{F(x,\lambda)}\, dx = \int_\Omega f(x)\overline{(-\Delta)F(x,\lambda)}\, dx =$$

$$= |\lambda|^2 \int_\Omega f(x)\overline{F(x,\lambda)}\, dx = |\lambda|^2\, (Uf)(\lambda) \quad (\text{car } F(x,\lambda) = 0 \text{ sur } S_{a^2}).$$

Pour démontrer que U est une isométrie(la démonstration est prise en partie dans [6])on note que si $g \in C_o^\infty(\bar{\Omega})$

$$(-\Delta - \ell^2)(2\pi)^{n/2} \int_{R^n} \hat{g}(\lambda) \frac{e^{i(x,\lambda)} + v(x,\lambda,\ell)}{|\lambda|^2 - \ell^2} d\lambda = g(x)$$

alors (si $\ell^2 = \mu + i\varepsilon$, $\varepsilon > 0$)

$$R_{\ell^2} g(x) = (2\pi)^{n/2} \int_{R^n} \hat{g}(\lambda) \frac{e^{i(x,\lambda)} + v(x,\lambda,\ell)}{|\lambda|^2 - \ell^2} d\lambda$$

On déduit que si $f \in C_o^\infty(\bar{\Omega})$

$$\int_\Omega R_{\ell^2} f(x) \overline{g(x)} dx = \int_{R^n} \frac{1}{|\lambda|^2 - \ell^2} \phi(\lambda,\ell) \hat{g}(\lambda) d\lambda \text{ où}$$

$$\phi(\lambda,\ell) = (2\pi)^{-n/2} \int f(x) \overline{[e^{i(x,\lambda)} + v(x,\lambda,\ell)]} dx, \text{ donc}$$

$$(\widehat{R_{\ell^2} f})(\lambda) = \frac{\phi(\lambda,\ell)}{|\lambda|^2 - \bar{\ell}^2} .$$

Nous utilisons alors l'identité de Parceval et la premiére identité de la résolvante si $0 < \alpha < \mu < \beta < \infty$ et si E est une résolution de l'identité on a

$$\frac{1}{2}\left[((E_\beta + E_{\beta-0})f,f) - ((E_\alpha + E_{\alpha-0})f,f)\right] = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_\alpha^\beta ((R_{\mu+i\varepsilon} - R_{\mu-i\varepsilon})f,f)d\mu =$$

$$= \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_\alpha^\beta \|R_{\mu-i\varepsilon} f\|^2 d\mu = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{\varepsilon}{\pi} \int_\alpha^\beta \int_{R^n} \frac{1}{(|\lambda|^2 - \mu)^2 + \varepsilon^2} |\phi(\lambda, \sqrt{\mu + i\varepsilon})|^2 d\lambda d\mu$$

Si nous faisons le passage à la limite, par des techniques d' intégrales singulières on a :

$$\frac{1}{2}\left[((E_{\beta}+E_{\beta-0})f,f)-((E_{\alpha}+E_{\alpha-0})f,f)\right] = \int_{\alpha\leq|\lambda|^2\leq\beta} |Uf(\lambda)|^2 d\lambda .$$

Le résultat suit alors en faisant $\alpha \longrightarrow \beta$ et après $\alpha \longrightarrow 0$ et $\beta \longrightarrow \infty$. La surjectivité de l'opérateur est prouvée par des techniques semblables et que nous exposerons dans le cas général.

4. Etendons ce que nous avons dit pour le laplacien à l'extérieur de la sphère au cas d'un opérateur quelconque autoadjoint elliptique à coefficients constants pour ce qui regarde le problème exterieur [3] . On peut démontrer le

<u>Théor.</u> Si Ω est un domaine extérieur de frontière S une fois différentiable, compacte et M est l'opérateur

$$M = -\sum a_{ij}\frac{\partial^2}{\partial x_j\,\partial x_j}, \quad (a_{ij} = a_{ji})$$ et si on appelle v la solution du problème suivant

$$(M - \ell^2)\, v(x,\lambda,\ell) = 0 \quad \text{dans } \Omega$$

$$v(x,\lambda,\sqrt{p(\lambda)}) = -e^{i(x,\lambda)} \quad \text{si } x \in S$$

$$\frac{\partial}{\partial|x|}v(x,\lambda,\sqrt{\mu}) - i\,\mu(x)v(x,\lambda,\sqrt{\mu}) = o(x^{(1-n)/2})$$

alors un opérateur diagonalisant

$$U : L^2(\Omega, | \ |) \to L^2(R^n, \frac{| \ |}{(2\pi)^n})$$

est défini pour les $f \in C_0^\infty(\bar{\Omega})$ par

$$(Uf)(\lambda) = \int_\Omega f(x)\overline{F(x,\lambda)}\, dx \quad \text{où} \quad F(x,\lambda) = e^{i(x,\lambda)} + v(x,\lambda, \sqrt{p(\lambda)})$$

On a ainsi l'extension naturelle de ce que nous avons dit pour le laplacien à l'extérieur de la sphère; la condition de radiation peut s'écrire en utilisant la derivée conormale indiquée par $\frac{\partial}{\partial |x|}$ et la fonction $\mu(x)$ qui est le produit scalaire $(\frac{x}{|x|}, y)$ où y est le point de la varieté d'équation $p(\lambda) = \mu$, où la normale extérieure a la même direction et orientation que x. Vu que dans la démonstration du caractère isométrique du diagonalisant du laplacien nous avons utilisé seulement les propriétés qui sont satisfaites par v la démonstration peut être généralisée sans aucune difficulté.

Nous donnons maintenant quelques idées pour la démonstration de la surjectivité de U, c'est à dire du fait que pour chaque $g \in L^2(R^n)$ $g(\lambda) = U U^* g(\lambda)$. Si l'on pose $r(\lambda) = g(\lambda) - U U^* g(\lambda)$ on peut définir les deux fonctions

$$s_m(x) = \int_{p(\lambda) \leq m^2} r(\lambda) F(x,\lambda)\, d\lambda$$

et

$$S_m(x,\ell) = \int_{p(\lambda) \leq m^2} \frac{r(\lambda) F(x,\lambda)}{p(\lambda) - \ell^2}\, d\lambda$$

qui verifient les équations

$$(M-\ell^2)\, S_m(x,\ell) = s_m(x) \text{ dans } \Omega \;;\quad S_m(x,\ell) = 0 \quad \text{si} \quad x \in S .$$

On a $S_m(x,\ell) \longrightarrow 0$ en L^2, parce que $s_m \longrightarrow U^* r = 0$.

En utilisant encore des techniques d' intégrales singulières on prouve que pour chaque $0 < \alpha < \beta$: $\displaystyle\int_{\alpha \leq p(\lambda) \leq \beta} r(\lambda)\, F(x,\lambda)\, d\lambda = 0$, donc

$$\int_{p(\lambda) = k^2} r(\lambda)\, F(x,\lambda)\, d\lambda = 0 \quad \text{p.p. en } k.$$

La fonction $u(x,k) = \dfrac{1}{(2\pi)^n} \displaystyle\int_{p(\lambda) = k^2} e^{i(x,\lambda)}\, r(\lambda)\, d\lambda$

verifie l'équation $(M - k^2)u = 0$ et la condition de radiation. Pour le laplacien en dimension 3 il existe un théorème bien connu de Rellich [5] qui assure, maintenant, que u est nulle, et alors la transformée de Fourier de r, et donc r, est nulle. Le théorème de Rellich a été généralisé par Vainberg [7], qui utilise pour la démonstration une solution fondamentale particulière de l'opérateur.

5. Nous en avons donné [3] une nouvelle démonstration, un peu plus élémentaire, qui nous a permis de prouver non seulement que l'équation $Mu - k^2 u = 0$, quand u verifie la condition de Sommerfeld, a seulement

la solution zero en tout l'espace, mais aussi, plus . généralement le

<u>Théor.</u> La solution du problème exterieur $(M - k^2)u = 0$ dans Ω est unique, si elle satisfait la condition de radiation et si ses valeurs ou les valeurs de sa dérivée conormale sont données à la frontière.

Dans un premier temps on peut démontrer

<u>Théor.</u> Si u est une solution de l'équation $Mu - k^2 u = 0$ dans Ω alors

$$\max_{R \to \infty} \lim \int_{\partial I(y,R)} |u|^2 \, d\sigma \neq 0, \quad \text{si} \quad u \neq 0;$$

où $I(y,R)$ est une famille convenable d'ellipsoides centrés en

Une telle relation est démontrée en utilisant la formule de Green par des techniques semblables à celle que l'on utilise en général pour démontrer le théorème de Stokes et par l'utilisation de deux solutions fondamentales de $M - k^2$:

$$v_1(x) = \left(\frac{k \sqrt{A}}{\rho} \right)^{(n/2)-1} J_{(n/2)-1} \left(\frac{k \rho}{\sqrt{A}} \right)$$

$$v_2(x) = - \left(\frac{k \sqrt{A}}{\rho} \right)^{(n/2)-1} N_{(n/2)-1} \left(\frac{k \rho}{\sqrt{A}} \right) ;$$

J_ν et N_ν étant des fonctions de Bessel de première et seconde espèce, A le déterminant des a_{ij}, et ρ la distance de y (point du domain exterieur) à x dans une métrique particulière liée à l'opérateur differentiel. Si S est la frontière du domaine prouve les deux égalités

$$u(y)=c\left\{\int_S a(x)\left(v_2\frac{\partial u}{\partial |x|}-u\frac{\partial v_2}{\partial |x|}\right)d\sigma+\int_{\partial I(y,R)} a(x)\left(v_2\frac{\partial u}{\partial |x|}-u\frac{\partial v_2}{\partial |x|}\right)d\sigma\right\}$$

$$0=c\left\{\int_S a(x)\left(v_1\frac{\partial u}{\partial |x|}-u\frac{\partial v_1}{\partial |x|}\right)d\sigma+\int_{\partial I(y,R)} a(x)\left(v_1\frac{\partial u}{\partial |x|}-u\frac{\partial v_1}{\partial |x|}\right)d\sigma\right\}.$$

D'après une formule qui donne le Wronskien des fonctions de Bessel, on obtient les faits suivants:

$$\text{ou } \max\lim_{R\to\infty}\int_{\partial I(y,R)} |u|^2\, d\sigma \neq 0$$

ou les seconds membres des formules que nous avons écrites sont nuls pour tout y.

Dans ce dernier cas on doit prouver que $u = 0$, ce qui est obtenu en tenant compte de l'expression asymptotique des fonctions de Bessel, ce la nous permet de montrer, lorsque on a complexifié la variable radiale qui est dans les expressions écrites, le caractère holomorphe au voisinage de l'∞ des deux fonctions $\dfrac{u(y)}{|y|^{1-(n/2)}\, e^{\pm (k|y|)}}$, ce qui est absurde si $u \neq 0$. L'analyse est rendue plus difficile, si la dimension de l'espace est pair, car dans ce cas les fonctions de Bessel sont multivoques. Alors nous devons prouver que, même dans ce cas, l'expression de u est univoque. Le théorème est enfin démontré si l'on prouve par un calcul facile, le

<u>Lemme.</u> Si la fonction u, telle que $(M - k^2)u = 0$ dans Ω, ou sa derivée conormale sont nulles sur la frontière et si la condition de radiation est verifiée on a

$$\lim_{R \to \infty} \int_{\partial I(y,R)} |u|^2 \, d\sigma = 0 .$$

Comme on a dit plusieures fois la diagonalisation non canonique est rendue canonique par l'idée de Gårding.

6. Il ne semble pas inutile remarquer que, de cela, on peut déduire pour un opérateur $A = p \left(\frac{\partial}{i \partial x_1}, \dots \frac{\partial}{i \partial x_n} \right)$ (où p est un polynôme réel elliptique) le théorème bien connu de Balslev [1] , qui dit que $\sigma(A) = R(p)$.

On a vû que l'intégrale directe , image de la diagonalisation canonique, a comme domain l'image du polynôme caractéristique.

Alors il n'est pas difficile de prouver le

<u>Théor.</u> Etant donné un opérateur autoadjoint A , avec domaine dense dans un espace de Hilbert H, et

$$U : H \longrightarrow \int_\Lambda H(\lambda) \, d\mu$$

étant la diagonalisation canonique (Λ fermé de $\mathbb{C}$) de Von Neumann, alors $\Lambda = \sigma(A)$.

Cette remarque permet aussi de trouver $\sigma(A)$ dans tous les cas que nous avons étudié.

G. Bottaro

BIBLIOGRAPHIE

1 E. Balslev. The essential spectrum of the elliptic differential operators in $L^p(R^n)$. - Trans. Amer. Math. Soc. - 116(1965).

2 G.F. Bottaro. Alcuni risultati di analisi spettrale per l'operatore di Laplace su insiemi non limitati (in corso di pubblicazione).

3 G.F. Bottaro. Alcuni risultati di analisi spettrale per operatori differenziali a coefficienti costanti su insiemi non limitati. (In corso di pubblicazione).

4 L. Gårding. Eigenfunction expansion. - Pg. 303-352 de Bers John Schechter"Partial differential equations"Interscience New York (1964).

5 F.Rellich. Uber der asymptotichen Verhalten der honningen von $\Delta u + \lambda u = 0$. In - Unendlichen Gebalten Jahr Deutsche Math. Verein. 53. (1943) pag. 57.

6 N.A. Shenk Eigenfunction expansion and scattering theory for the wave equation in an exterior region. - Arch. Rat. Mech Anal. 21 (1966) pg. 120-160.

7 B.R. Vainberg. Principles of radiation, limit absorption and limit amplitude in the general theory of partial differential equations. - Russian Math. Surveys, 21 n.3 (1966) pg.115-193.

CENTRO INTERNAZIONALE MATEMATICO ESTIVO

(C.I.M.E.)

EIGENFUNCTION EXPANSIONS

LARS GÅRDING

Corso tenuto a Varenna dal 24 agosto al 2 settembre 1973

Preface.

The title of these lectures cover an awful lot of ground. They could include everything in the convex hull of classical Fourier series, spectral theory in Hilbert space and the series expansions of classical physics, group representations and quantum mechanics. I have chosen to give a general introduction and then treat the Schrödinger operator and the summation theory of eigenfunction expansions of selfadjoint elliptic operators in more detail.

Lars Gårding