CIME Summer Schools

65

L. Salvadori (Ed.)

Stability Problems

Bressanone, Italy 1974

Springer

FONDAZIONE
CIME
ROBERTO CONTI

L. Salvadori (Ed.)

Stability Problems

Lectures given at a Summer School of the
Centro Internazionale Matematico Estivo (C.I.M.E.),
held in Bressanone (Bolzano), Italy,
June 2-11, 1974

Springer

FONDAZIONE CIME ROBERTO CONTI

C.I.M.E. Foundation
c/o Dipartimento di Matematica “U. Dini”
Viale Morgagni n. 67/a
50134 Firenze
Italy
cime@math.unifi.it

ISBN 978-3-642-10948-5 e-ISBN: 978-3-642-10949-2
DOI:10.1007/978-3-642-10949-2
Springer Heidelberg Dordrecht London New York

Reprint of the 1st ed. C.I.M.E., Ed. Cremonese, Roma 1974
With kind permission of C.I.M.E.

Printed on acid-free paper

Springer.com

CENTRO INTERNAZIONALE MATEMATICO ESTIVO
(C. I. M. E.)

I° Ciclo - Bressanone dal 2 all'11 giugno 1974

STABILITY PROBLEMS

Coordinatore: Prof. L. SALVADORI

CENTRO INTERNAZIONALE MATEMATICO ESTIVO

(C.I.M.E.)

STABILITE ASYMPTOTIQUE POUR DES PROBLEMES DE PERTURBATIONS SINGULIERES

P. HABETS

Corso tenuto a Bressanone dal 2 all'11 giugno 1974

STABILITE ASYMPTOTIQUE POUR DES PROBLEMES
DE PERTURBATIONS SINGULIERES.

P. Habets(+)

1. INTRODUCTION.

Considérons le problème de la stabilité de l'origine pour une équation

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(t,x,y,\varepsilon) \\ \varepsilon\dot{y} &= g(t,x,y,\varepsilon) \end{aligned} \qquad (1.1)$$

où $\varepsilon > 0$ est un petit paramètre. Pour ce type d'équation il est usuel de considérer le système réduit obtenu en posant formellement $\varepsilon = 0$ dans (1.1).

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(t,x,y,0) \\ 0 &= g(t,x,y,0) \end{aligned} \qquad (1.2)$$

et l'équation des couches limites

$$\frac{dy}{ds} = g(t,x,y,0), \qquad (1.3)$$

où t et x sont des paramètres.

L'idée fondamentale de ce travail consiste à établir la stabilité asymptotique uniforme de l'origine pour (1.1) à partir de propriétés similaires relatives aux équations (1.2) et (1.3). Cette méthode a été exploitée pour les systèmes linéaires par B.S. Razumikhin [10], A.I. Klimushev [6], puis par R.R. Wilde et P.V. Kokotovic [11]. Pour des systèmes plus généraux, ces résultats ont été complétés par A.I. Klimushev et N.N. Krasovskii [7], en utilisant l'approximation linéaire, et par F.C. Hoppensteadt [5], en utilisant directement les propriétés des solutions des équations (1.2) et (1.3).

(+) Chargé de recherches du Fonds National de la Recherche Scientifique (Belgique).

Comme nous le verrons ci-dessous, ces résultats font usage d'hypothèses assez fortes dont la nécessité peut être illustrée par des contre-exemples. Ainsi *si les fonctions* f *et* g *dépendent de* ε, *l'origine solution de* (1.1) *peut être instable bien que les solutions correspondantes de* (1.2) *et* (1.3) *soient asymptotiquement stables.* Soit le système

$$\dot{x} = -x(x^2-\varepsilon^2)$$
$$\varepsilon\dot{y} = -y$$

dont la solution nulle est instable bien que les solutions nulles du système réduit

$$\dot{x} = -x^3$$

et de l'équation des couches limites

$$\frac{dy}{ds} = -y$$

soient asymptotiquement stables. Ce type de résultat n'est pas propre aux perturbations singulières mais plutôt aux systèmes dépendant d'un paramètre et motive l'introduction d'une définition de stabilité totale ou plus précisément de consistance [2]. Par ailleurs, il faut imposer des conditions de stabilité asymptotique sur le système réduit (1.2) et l'équation des couches limites (1.3). En effet *l'origine solution de* (1.1) *peut être instable bien que l'origine du système reduit* (1.2) *soit stable et que la solution correspondante de* (1.3) *soit asymptotiquement stable.*
Soit le système complet

$$\dot{x}_1 = 2x_2$$
$$\dot{x}_2 = -x_1 - y$$
$$\varepsilon\dot{y} = x_1 - y$$

dont l'origine est instable bien que pour le ~~problème~~ réduit

$$\dot{x}_1 = 2x_2,\ \dot{x}_2 = -2x_1$$
$$y = x_1$$

l'origine soit stable et qu'à l'équation des couches limites

$$\frac{dy}{ds} = x_1 - y$$

corresponde la solution $y = x_1$ qui est asymptotiquement stable. Finalement, *l'origine peut être instable pour* (1.1) *alors qu'elle est asymptotiquement* *stable pour* (1.2) *et que la solution correspondante de* (1.3) *est stable.* Il suffit par exemple de considérer le système

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -x^3 + (y_1^2+y_2^2)x \\ \varepsilon\dot{y}_1 &= y_2 \\ \varepsilon\dot{y}_2 &= -y_1 \end{aligned}$$

2. NOTATIONS. HYPOTHESES GENERALES.

Considérons le *système complet*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(t,x,y) \\ \varepsilon\dot{y} &= g(t,x,y) \end{aligned} \tag{2.1}$$

où $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$, $t \in]0,\infty[$ et $\varepsilon \in]0,E[$. On y associe le *système réduit*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(t,x,y) \\ 0 &= g(t,x,y) \end{aligned} \tag{2.2}$$

et l'*équation des couches limites*

$$\frac{dy}{ds} = g(t,x,y) \tag{2.3}$$

où s est la variable indépendante et où t et x sont des paramètres.

Dans la suite, nous supposerons qu'il existe une fonction $y = h(t,x)$ telle que

$$g(t,x,h(t,x)) = 0$$

et pour tout $y \neq h(t,x)$

$$g(t,x,y) \neq 0.$$

Dès lors le système réduit (2.2) peut s'écrire

$$\dot{x} = f(t,x,h(t,x)) \tag{2.4}$$

Finalement nous ferons l'hypothèse $f(t,0,0) = 0$ et $g(t,0,0) = 0$ (ce qui implique $h(t,0) = 0$), et nous supposerons les fonctions f,g et h assez régulières pour qu'il existe une solution unique aux problèmes de conditions initiales relatifs aux équations (2.1), (2.3) et (2.4).

Nous utiliserons dans ce qui suit des fonctions auxiliaires $V(t,x,y)$ dont nous calculerons les dérivées le long des solutions des équations (2.1), (2.4) ou (2.3). Par exemple

$$D_{(2.1)}V(t,x(t),\, y(t)) = \lim_{\ell\to 0+} \frac{1}{\ell}[V(t+\ell,\, x(t+\ell),\, y(t+\ell)) - V(t,\, x(t),\, y(t))]$$

où $x(t)$, $y(t)$ est une solution du système (2.1).

Introduisons encore les notations

$$B^n_\rho = \{x \in \mathbb{R}^n \;:\; \|x\| < \rho\}$$

$$B_\rho = \{(x,y) \in \mathbb{R}^{n+m} \;:\; \|(x,y)\| < \rho\}$$

où $\|(x,y)\| = \max\,(\|x\|,\|y\|)$. Finalement, une fonction réelle, de variable réelle, $a(r)$ sera dite *de classe* K si elle est continue, strictement croissante et nulle à l'origine. On notera alors $a \in K$. D'autre part une fonction réelle, de variable réelle, $\sigma(r)$ sera dite *de classe* $\mathcal{L}$ si elle est continue, strictement décroissante et telle que $\sigma(r) \to 0$ si $r \to \infty$. On notera $\sigma \in \mathcal{L}$.

B. RESULTATS PRINCIPAUX.

Nous introduirons tout d'abord un théorème dont l'intérêt et la difficulté résident plus dans l'agencement d'hypothèses raisonnables que dans sa démonstration qui est fort simple. De plus, ce théorème est fondamental en ce sens que la plus part des résultats que nous présenterons s'en déduiront.

THEOREME 1. *Supposons qu'il existe des fonctions de classe* C^1

$$V_R \;:\;]0,\infty[\, \times B^n_\rho \to \mathbb{R},\ (t,x) \;\to\; V_R(t,x)$$

$$V_{CL} \;:\;]0,\infty[\, \times B_\rho \to \mathbb{R},\ (t,x,y) \to V_{CL}(t,x,y)$$

des fonctions a *et* b *de classe* K *et des constantes positives* K *et* L *telles que :*

(i) $$a(\|x\|) \leqslant V_R(t,x) \leqslant b(\|x\|) \;;$$

(ii) $$D_{(2.4)}V_R(t,x) \leqslant -\,K\|x\|^2 \;;$$

(iii) $$\left|\frac{\partial V_R}{\partial x}\right| \leqslant L\|x\| \;;$$

(iv) $$a(\|y-h(t,x)\|) \leqslant V_{CL}(t,x,y) \leqslant b(\|y-h(t,x)\|) \;;$$

(v) $$D_{(2.3)}V_{CL}(t,x,y) \leqslant -\ K\|y-h(t,x)\|^2 \;;$$

(vi) $$\left|\frac{\partial V_{CL}}{\partial t}\right| \leqslant L\|y-h(t,x)\| \ (\|y-h(t,x)\| + \|x\|),$$

$$\left|\frac{\partial V_{CL}}{\partial x}\right| \leqslant L\|y-h(t,x)\| \;;$$

(vii) $$\|f(t,x,y) - f(t,x,h(t,x))\| \leqslant L\|y-h(t,x)\| \;;$$

(viii) $$f(t,x,y)\| \leqslant L(\|x\| + \|y-h(t,x)\|) \;;$$

(ix) $$\|h(t,x)\| \leqslant b(\|x\|).$$

Alors, pour ε *assez petit, l'origine, solution de* (2.1), *est uniformément asymptotiquement stable.*

Remarquons qu'il n'y a pas de perte de généralité à utiliser les mêmes fonctions a et b ou les mêmes constantes K et L dans des hypothèses différentes. En effet si par exemple il existe des fonctions $a' \in K$ et $a'' \in K$ telles que

$$a'(\|x\|) \leqslant V_R(t,x), \quad a''(\|y-h(t,x)\|) \leqslant V_{CL}(t,x,y)$$

la fonction

$$a(r) = \min(a'(r),\ a''(r))$$

satisfait aux hypothèses (i) et (iv).

Démonstration. Considérons la fonction $V = V_R + V_{CL}$. On vérifie que

$$\begin{aligned} D_{(2.1)}V &= D_{(2.4)}V_R + \frac{\partial V_R}{\partial x}\,(f(t,x,y) - f(t,x,h(t,x))) \\ &\quad + \frac{D_{(2.3)}V_{CL}}{\varepsilon} + \frac{\partial V_{CL}}{\partial t} + \frac{\partial V_{CL}}{\partial x}\, f(t,x,y) \\ &\leqslant -\ K\|x\|^2 + L^2\|x\|\ \|y-h(t,x)\| \\ &\quad - \frac{K}{\varepsilon}\|y-h(t,x)\|^2 + (1+L)L\ \|y-h(t,x)\|\ (\|y-h(t,x)\| + \|x\|) \\ &\leqslant -\ K\|x\|^2 + (1+2L)L\ \|x\|\ \|y-h(t,x)\| - (\frac{K}{\varepsilon} - (1+L)L)\ \|y-h(t,x)\|^2 \end{aligned}$$

est définie négative pour ε assez petit. Dès lors les hypothèses du théorème de Lyapounov sont satisfaites et, pour tout ε assez petit, l'origine est uniformément asymptotiquement stable. C.Q.F.D.

Les hypothèses du théorème 1 peuvent paraître trop compliquées. Dès lors, pour mieux en comprendre la portée nous allons donner des théorèmes d'existence des fonctions V_R et V_{CL}.

LEMME 1. *Supposons que*
(i) *les fonctions* f *et* h *possèdent des dérivées partielles continues et bornées dans* $D =]0,\infty[\times B_\rho$ *et que*
(ii) *la solution* $x = 0$ *de* (2.4) *soit exponentiellement stable.*

Alors il existe une fonction $V_R(t,x)$ *satisfaisant aux hypothèses du théorème* 1.

La démonstration de ce lemme se déduit d'une condition nécessaire et suffisante de stabilité exponentielle [3 - p273, théorème 56.1].

LEMME 2. *Supposons que*
(i) *les fonctions* g *et* h *possèdent des dérivées partielles continues et bornées dans* D *et*

$$\left|\frac{\partial h}{\partial t}\right|, \left|\frac{\partial g}{\partial t}\right| \leqslant L(\|x\| + \|y-h(t,x)\|)$$

(ii) *la solution* $y = h(t,x)$ *de* (2.3) *est exponentiellement stable uniformément en* (t,x), *c'est-à-dire*

$$(\exists\alpha,\beta > 0)(\forall t,x)\ \|y_{(2.3)}(s;t,x,y) - h(t,x)\| \leqslant \alpha\|y-h(t,x)\|e^{-\beta s}$$

où $y_{(2.3)}(s;t,x,y)$ *est la solution de* (2.3) *telle que* $y_{(2.3)}(0;t,x,y) = y$.

Alors il existe une fonction $V_{CL}(t,x,y)$ *satisfaisant aux hypothèses du théorème* 1.

Démonstration. L'existence de $V_{CL}(t,x,y)$ se déduit d'un calque de la démonstration du lemme 1. Considérons la fonction

$$V_{CL}(t,x,y) = \int_0^S \|y_{(2.3)}(s;t,x,y) - h(t,x)\|^2 ds,$$

où S est une constante que nous déterminerons ci-dessous. Sans perdre de généralité, on peut supposer $\|y\|^2 = \Sigma\, y_i^2$. Ensuite, du caractère lipschitzien de g, on déduit que

$$(\exists\beta' > 0) \; : \; \|y_{(2.3)}(s;t,x,y)-h(t,x)\| \geqslant \|y-h(t,x)\| e^{-\beta' s}$$

et, si S est assez grand,

$$V_{CL} \geqslant \|y-h(t,x)\|^2 \int_0^S e^{-2\beta' S} dS \geqslant \|y-h(t,x)\|^2/4\beta'. \tag{3.1}$$

D'autre part, on déduit de la stabilité exponentielle

$$V_{CL} \leqslant \alpha^2 \; \|y-h(t,x)\|^2 \int_0^S e^{-2\beta s} ds \leqslant \frac{\alpha^2}{2\beta} \|y-h(t,x)\|^2.$$

Finalement, si S est assez grand,

$$D_{(2.3)}V_{CL} = \left(\frac{d}{ds} \int_0^S \|y_{(2.3)}(\sigma;t,x,y(s,t,x,y)) - h(t,x)\|^2 d\sigma\right)_{s=0}$$

$$= \left(\frac{d}{ds} \int_s^{s+S} \|y_{(2.3)}(u;t,x,y) - h(t,x)\|^2 du\right)_{s=0}$$

$$= \|y_{(2.3)}(S;t,x,y) - h(t,x)\|^2 - \|y-h(t,x)\|^2$$

$$\leqslant - \|y-h(t,x)\|^2/2. \tag{3.2}$$

Fixons maintenant S assez grand de sorte que les inégalités (3.1) et (3.2) soient satisfaites. On calcule ensuite

$$\frac{\partial V_{CL}}{\partial t} = 2 \int_0^S \left(y_{(2.3)}(s;t,x,y) - h(t,x),\; \frac{\partial y_{(2.3)}}{\partial t} - \frac{\partial h}{\partial t}\right) ds.$$

Puisque $z = \frac{\partial y_{(2.3)}}{\partial t}$ est solution du problème de Cauchy

$$\frac{dz}{ds} = \frac{\partial g}{\partial y}(t,x,y_{(2.3)})z + \frac{\partial g}{\partial t}(t,x,y_{(2.3)}), \; z(0) = 0,$$

si K est une constante générique, on a l'estimation

$$\left\|\frac{\partial y_{(2.3)}}{\partial t}\right\| \leqslant K \int_0^s \left\|\frac{\partial g}{\partial t}\right\| e^{K(s-\sigma)} d\sigma \leqslant K(\|x\| + \|y-h(t,x)\|)e^{Ks}$$

et

$$\left|\frac{\partial V_{CL}}{\partial t}\right| \leqslant \int_0^S \alpha\|y-h(t,x)\| e^{-\beta s} K(\|x\| + \|y-h(t,x)\|)e^{Ks} ds$$

$$\leqslant K\|y-h(t,x)\| (\|x\| + \|y-h(t,x)\|).$$

De même on calcule

$$\frac{\partial V_{CL}}{\partial x} = 2\int_0^S (y_{(2.3)}(s;t,x,y) - h(t,x), \frac{\partial y_{(2.3)}}{\partial x} - \frac{\partial h}{\partial x}) ds$$

Or $z = \frac{\partial y_{(2.3)}}{\partial x}$ est solution du problème de Cauchy

$$\dot{z} = \frac{\partial g}{\partial y}(t,x,y_{(2.3)})z + \frac{\partial g}{\partial x}(t,x,y_{(2.3)}), \quad z(0) = 0$$

et, dès lors, satisfait à la relation

$$\left\|\frac{\partial y_{(2.3)}}{\partial x}\right\| \leqslant Ke^{Ks}.$$

On en déduit facilement comme ci-dessus

$$\left|\frac{\partial V_{CL}}{\partial x}\right| \leqslant K\|y-h(t,x)\|. \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

On peut particulariser ces lemmes au cas où l'approximation linéaire des systèmes correspondants est uniformément asymptotiquement stable. Introduisons tout d'abord une extension assez triviale d'un résultat classique de Liapounov [4 - Lemme 1.5 p295].

LEMME 3. *Soit* D(t) *une matrice d'ordre* m, *continue, bornée ainsi que sa dérivée. Supposons que les parties réelles des valeurs propres de* D(t) *soient inférieures à une constante* $-\mu < 0$.

Alors il existe une matrice M(t) *continue bornée ainsi que sa dérivée, telle que*

$$M(t)\, D(t) + D^T(t)\, M(t) = - I_m$$

où I_m *est la matrice unité d'ordre* m, *et il existe des constantes* $k_1 > 0$ *et* $k_2 > 0$, *indépendantes de* t *telles que*

$$k_1\|y\|^2 \leqslant y^T M(t)y \leqslant k_2\|y\|^2.$$

La démonstration consiste à vérifier que la fonction

$$M(t) = \int_0^\infty e^{D(t)^T\sigma}\, e^{D(t)\sigma}\, d\sigma$$

convient.

LEMME 4. *Supposons la fonction* $g \in C^1$ *de la forme*

$$g(t,x,y) = D(t)y + G(t,x,y),$$

où $D(t)$ *est une matrice d'ordre* m *satisfaisant aux hypothèses du lemme* 3 *et* $G(t,x,y)$ *est tel que*

$$G(t,0,0) = 0,\ \frac{\partial G}{\partial t} = O(\|(x,y)\|),\ \frac{\partial G}{\partial x} = O(1),\ \frac{\partial G}{\partial y} = o(1).$$

où les symboles d'ordre O *et* o *sont uniformes en* t.

Alors il existe une fonction $V_{CL}(t,x,y)$ *satisfaisant aux hypothèses du théorème* 1.

Démonstration. Il existe $\rho > 0$ tel que, dans un voisinage B_ρ de l'origine, la fonction $y = h(t,x)$ existe, est dérivable et

$$\frac{\partial h}{\partial x}(t,x) = -\left(D(t) + \frac{\partial G}{\partial y}(t,x,h(t,x))\right)^{-1} \frac{\partial G}{\partial x}(t,x,h(t,x)) = O(1),$$

$$h_i(t,x) = \frac{\partial h_i}{\partial x}(t,\xi_i x)x = O(\|x\|),\ i = 1,\dots,m,\ \xi_i \in [0,1],$$

$$\frac{\partial h}{\partial t}(t,x) = -\left(D(t) + \frac{\partial G}{\partial y}(t,x,h(t,x))\right)^{-1} \left(\dot{D}(t)h(t,x) + \frac{\partial G}{\partial t}(t,x,h(t,x))\right) = O(\|x\|).$$

Par ailleurs, soit $M(t)$ la matrice définie par le lemme 3. Dès lors, la démonstration s'achève en montrant que, si ρ est assez petit, la fonction

$$V_{CL} = (y-h(t,x))^T M(t)(y-h(t,x))$$

satisfait aux hypothèses du théorème 1. C.Q.F.D.

L'ensemble des lemmes 1, 2 et 4 permet de reformuler plus simplement le théorème 1.

THEOREME 2. *Supposons que :*

(i) *les fonctions* f, g *et* h *possèdent des dérivées partielles continues et bornées dans* $D =]0,\infty[\times B_\rho$;

(ii) *la solution* $x = 0$ *de* (2.4) *est exponentiellement stable ;*

(iii) *ou bien*

$$\left|\frac{\partial h}{\partial t}\right|, \left|\frac{\partial g}{\partial t}\right| \leqslant L(\|x\| + \|y-h(t,x)\|)$$

et la solution $y = h(t,x)$ *de* (2.3) *est exponentiellement stable uniformément en* (t,x),

ou bien g *est de la forme*

$$g(t,x,y) = D(t)y + G(t,x,y)$$

où $D(t)$ *et* $G(t,x,y)$ *satisfont aux hypothèses du lemme 4.*

Alors, pour ε *assez petit, l'origine solution de* (2.1) *est uniformément asymptotiquement stable.*

Pour un système linéaire

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(t)x + B(t)y \\ \varepsilon\dot{y} &= C(t)x + D(t)y \end{aligned} \qquad (3.3)$$

ce théorème se simplifie encore.

COROLLAIRE 1. (A.I. Klimushev et N.N. Krasovskii [7]). *Supposons que :*

(i) *les fonctions matricielles* $A(\cdot)$, $B(\cdot)$, $C(\cdot)$, $D(\cdot)$ *sont continues, bornées, ainsi que leurs dérivées ;*

(ii) *les parties réelles des valeurs propres de* $D(t)$ *sont inférieures à une constante strictement négative ;*

(iii) *la solution* $x = 0$ *du problème réduit*

$$x = (A-BD^{-1}C)(t)x$$

est uniformément asymptotiquement stable.

Alors, pour ε *assez petit, la solution* $x = 0$, $y = 0$ *de* (3.3) *est uniformément asymptotiquement stable.*

4. APPLICATION. - VOL LONGITUDINAL DU PLANEUR

Les équations d'un planeur qui se meut dans un plan vertical fixe, s'écrivent

$$
\begin{aligned}
m\dot{V} &= -\rho\frac{S}{2}\, C_D(\theta-\gamma)V^2 - mg\sin\gamma \\
mV\dot{\gamma} &= \rho\frac{S}{2}\, C_L(\theta-\gamma)V^2 - mg\cos\gamma \\
\varepsilon\dot{\theta} &= q \\
\varepsilon I\dot{q} &= \rho\frac{Sb}{2}\, C_{mo}(\theta-\gamma)V^2 + \rho\frac{Sb}{2}\, C_{mq}(\theta-\gamma)Vq
\end{aligned}
\qquad (4.1)
$$

où les coefficients aérodynamiques C_D, C_L, C_{mo} et C_{mq} sont des fonctions analytiques de l'angle d'attaque $\alpha = \theta - \gamma$. Dans ces équations, ε est un paramètre proportionnel aux dimensions du planeur. En $\varepsilon = 0$, on obtiendra donc un modèle ponctuel du planeur.

Soit α_o tel que $C_{mo}(\alpha_o) = 0$. Alors les équations (4.1) possèdent la solution constante

$$
\gamma = \gamma_o = \text{arc tg}\left(\frac{C_D(\alpha_o)}{C_L(\alpha_o)}\right),\quad V^2 = V_o^2 = \frac{2mg\cos\gamma_o}{\rho S\, C_L(\alpha_o)} \qquad (4.2)
$$

$$
\rho = 0,\quad \theta = \gamma_o + \alpha_o
$$

qui correspond à un vol rectiligne et dont on étudiera les propriétés de stabilité. Remarquons que le changement de variables

$$
x = \begin{pmatrix} V - V_o \\ \gamma - \gamma_o \end{pmatrix},\quad y = \begin{pmatrix} \theta - \gamma_o - \alpha_o \\ q \end{pmatrix}
$$

ramène le système (4.1) à la forme (2.1). Nous n'effectuerons pas cette transformation de façon à garder des variables usuelles, mais les théorèmes du § 3 seront appliqués implicitement au système transformé.

Le système réduit correspondant à (4.1) s'écrit

$$
\begin{aligned}
m\dot{V} &= -\rho\frac{S}{2}\, C_D(\alpha_o)V^2 - mg\sin\gamma \\
mV\dot{\gamma} &= \rho\frac{S}{2}\, C_L(\alpha_o)V^2 - mg\cos\gamma
\end{aligned}
\qquad (4.3)
$$

et n'est autre que le modèle étudié par F.W. Lanchester [8]. D'autre part l'équation des couches limites

$$
\frac{d\theta}{ds} = q \qquad (4.4a)
$$

$$I\frac{dq}{ds} = \rho\frac{Sb}{2} C_{mo}(\theta-\gamma)V^2 + \rho\frac{Sb}{2} C_{mq}(\theta-\gamma)Vq \tag{4.4b}$$

admet la solution constante

$$\theta = \gamma + \alpha_o \ , \ q = 0$$

qui définit la fonction h(t,x)

$$y = \begin{pmatrix} \theta - \gamma_o - \alpha_o \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma - \gamma_o \\ 0 \end{pmatrix} = h(t,x)$$

La stabilité exponentielle de la solution $V = V_o$, $\gamma = \gamma_o$ de (4.3) se déduit de la même propriété pour le système linéarisé (cfr. [3 - p273, théorème 56.2])

$$m\dot{x}_1 = -\rho SC_D(\alpha_o)V_o x_1 - mg\cos\gamma_o\, x_2$$

$$mV_o\dot{x}_2 = \rho SC_L(\alpha_o)V_o x_1 + mg\sin\gamma_o\, x_2,$$

qui est exponentiellement stable si

$$\begin{gathered} \sin\gamma_o > 0 \\ C_L(\alpha_o)\cos\gamma_o - C_D(\alpha_o)\sin\gamma_o > 0 \end{gathered} \tag{4.5}$$

D'autre part on étudie facilement l'équation des couches limites à partir du lemme 4. En particulier

$$D(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{\rho SbC'_{mo}(\alpha_o)V_o^2}{2I} & \frac{\rho SbC_{mq}(\alpha_o)V_o}{2I} \end{pmatrix},$$

dont les valeurs propres sont négatives si

$$C_{m\dot{q}}(\alpha_o) < 0 \quad \text{et} \quad C'_{mo}(\alpha_o) < 0 \tag{4.6}$$

Finalement, si les conditions (4.5) et (4.6) sont satisfaites, le théorème 2 est applicable et, pour ε assez petit, la solution (4.2) est uniformément asymptotiquement stable.

5. UN RESULTAT COMPLEMENTAIRE.

L'idée fondamentale du théorème 1 consiste à utiliser une bonne "combinaison" des fonctions auxiliaires naturelles V_R et V_{CL} qui permette l'utilisation du théorème de stabilité asymptotique uniforme de Liapounov. Dans cette section nous introduirons d'autres résultats en modifiant la "combinaison" de ces fonctions auxiliaires. On pourrait aussi songer à baser la démonstration sur d'autres théorèmes de stabilité.

THEOREME 3. *Supposons qu'il existe une constante* $L > 0$ *et des fonctions de classe* C^1

$$V_R :]0,\infty[\times B^n_\rho \to \mathbb{R},\ (t,x) \to V_R(t,x)$$

$$V_{CL} :]0,\infty[\times B_\rho \to \mathbb{R},\ (t,x,y) \to V_{CL}(t,x,y)$$

telles que

(i) $$a(\|x\|) \leqslant V_R(t,x) \leqslant b(\|x\|),\quad a \in K,\ b \in K\ ;$$

(ii) $$D_{(2.4)}V_R(t,x) \leqslant -\ c(\|x\|),\quad c \in K\ ;$$

(iii) $$\left|\frac{\partial V_R}{\partial x}\right| \leqslant L\ ;$$

(iv) $$a(\|y-h(t,x)\|) \leqslant V_{CL}(t,x,y) \leqslant b(\|y-h(t,x)\|)\ ;$$

(v) $$D_{(2.3)}V_{CL}(t,x,y) \leqslant -\ c'(\|y-h(t,x)\|),\quad c' \in K$$

(vi) $$\left|\frac{\partial V_{CL}}{\partial t}\right|,\ \left|\frac{\partial V_{CL}}{\partial x}\right| \leqslant L\ c'(\|y-h(t,x)\|)\ ;$$

(vii) $$\|f(t,x,y) - f(t,x,h(t,x))\| \leqslant b(\|y-h(t,x)\|)\ ;$$

(viii) $$\|f(t,x,y)\| \leqslant L\ ;$$

(ix) $$\|h(t,x)\| \leqslant b(\|x\|)$$

Alors pour tout ε *assez petit, l'origine, solution de* (2.1), *est uniformément asymptotiquement stable.*

Démonstration. Définissons une fonction dérivable $k : [0,L\rho] \to \mathbb{R}$, de classe K, telle que

(α) $k(r) \leqslant a(b^{-1}(\frac{1}{2L}\ c(b^{-1}(r))))$;

(β) $k'(r) = \frac{dk}{dr}(r) \in K$.

Considérons ensuite la fonction

$$V = \max(k(V_R),\ V_{CL}).$$

On vérifie tout de suite qu'il existe des fonctions $\bar{a}$ et $\bar{b}$ de classe K telles que

$$\bar{a}(\|(x,y)\|) \leqslant V(t,x,y) \leqslant \bar{b}(\|(x,y)\|). \tag{5.1}$$

Par ailleurs, on évalue la dérivée à droite $D^{+}_{(2.1)}V$ en considérant les cas suivants :

1° Si $V = k(V_R) \geqslant V_{CL} \geqslant a(\|y-h(t,x)\|)$, alors par ($\alpha$)

$$\frac{1}{2L} c(b^{-1}(V_R)) \geqslant b(\|y-h(t,x)\|)$$

et

$$\begin{aligned} D_{(2.1)}k(V_R) &= k'(V_R)\ [D_{(2.4)}V_R + \frac{\partial V_R}{\partial x}(f(t,x,y) - f(t,x,h(t,x)))] \\ &\leqslant - k'(V_R)[c(b^{-1}(V_R)) - L\ b(\|y-h(t,x)\|)] \\ &\leqslant - k'(k^{-1}(V))\ c(b^{-1}(k^{-1}(V)))/2. \end{aligned}$$

2° Si $k(V_R) \leqslant V_{CL} = V$

$$\begin{aligned} D_{(2.1)}V_{CL} &\leqslant \frac{D_{(2.3)}V_{CL}}{\varepsilon} + \frac{\partial V_{CL}}{\partial t} + \frac{\partial V_{CL}}{\partial x} f(t,x,y) \\ &\leqslant - (\frac{1}{\varepsilon} - L(1+L))\ c'(b^{-1}(V)). \end{aligned}$$

Ensuite on en déduit aisément qu'il existe $\bar{c} \in K$ tel que pour ε assez petit

$$D^{+}_{(2.1)}V \leqslant - \bar{c}(V)$$

ce qui joint à (5.1) démontre la stabilité asymptotique uniforme de l'origine. C.Q.F.D.

Remarque 1. On peut démontrer dans les mêmes hypothèses la stabilité équi-asymptotique en utilisant la fonction

$$V = V_R + V_{CL}.$$

Il faut cependant utiliser un théorème d'attractivité plus élaboré [1 - théorème 11] et un lemme de stabilité asymptotique partielle en y [5].

2. Bien que l'hypothèse VI soit satisfaite dans des exemples particuliers, il semble qu'elle restreigne fortement le champ des applications possibles.

Le corollaire suivant est relatif au cas $h(t,x) \equiv 0$.

COROLLAIRE 2. (F.C. Hoppensteadt [5]) *Supposons que*

(i) *f et g sont de classe* C^1 ;

(ii) *la solution* $x = 0$ *de* (2.4) *est uniformément asymptotiquement stable;*

(iii) *la solution* $y = 0$ *de* (2.3) *est uniformément asymptotiquement stable dans le sens suivant :*

$$|y_{(2.3)}(s;t_0,x_0,y_0)| \leqslant K\|y_0\|^{\lambda}\ \rho(s),\ s > 0,\ 0 < \lambda \leqslant 1,\ \rho \in \mathcal{L}\ ;$$