E. Martinelli (Ed.)

CIME Summer Schools

11

Teoria delle funzioni di più variabili complesse e delle funzioni automorfe

Varenna, Italy 1956

Springer

Fondazione CIME Roberto Conti

E. Martinelli (Ed.)

Teoria delle funzioni di più variabili complesse e delle funzioni automorfe

Lectures given at the
Centro Internazionale Matematico Estivo (C.I.M.E.),
held in Varenna (Como), Italy,
September 3-12, 1956

Springer

FONDAZIONE
CIME
ROBERTO CONTI

C.I.M.E. Foundation
c/o Dipartimento di Matematica "U. Dini"
Viale Morgagni n. 67/a
50134 Firenze
Italy
cime@math.unifi.it

ISBN 978-3-642-10921-8 e-ISBN: 978-3-642-10922-5
DOI:10.1007/978-3-642-10922-5
Springer Heidelberg Dordrecht London New York

Reprint of the 1st Ed. C.I.M.E., Florence, 1956.
With kind permission of C.I.M.E.

Printed on acid-free paper

Springer.com

CENTRO INTERNATIONALE MATEMATICO ESTIVO
(C.I.M.E)

Reprint of the 1st ed.- Varenna, Italy, September 3-12, 1956

TEORIA DELLE FUNZIONI DI PIÙ VARIABILI COMPLESSE E DELLE FUNZIONI AUTOMORFE

COURS SUR LES VARIETES COMPLEXES

par B. ECKMANN

§ o

INTRODUCTION

Cette introduction ne contient ni de définitions ni d'énoncés précis. Elle sert simplement à donner une idée préalable des notions et problèmes traités dans ce cours.

o.1. La notions de "variété à structure analytique complexe"- variété complexe tout court - est une des généralisations naturelles de celle de surface de Riemann (au sens abstrait). On sait que par cette dernière la théorie des fonctions analytiques d'une variable complexe est étroitement liée à des raisonnements et propriétés géométriques. La théorie des fonctions de plusieurs variables complexes réserve aux variétés complexes un rôle analogue; cela exige une étude approfondie des propriétés géométriques de la structure analytique complexe, étude qui n'a été abordée que depuis quelques ans et qui a conduit à des concepts et resultats d'un intérêt géométrique considérable, aussi bien pour la géométrie différentielle et la topologie des variétés que pour la géométrie algébrique complexe. Ce cours sert comme introduction à certains aspects de cette nature.

o.2. Rappelons qu'une surface de Riemann est une surface (au sens habituel de la géomètrie différentielle) douée d'une structure conforme; c.à.d. décrite localement par une variable complexe $z = x + iy$ telle que x, y soient des paramètres réels locaux de la surface, de telle façon que dans toute intersection de deux de ces voisinages complexes la relation entre les variables complexes soit donnée par une fonction analytique (à dérivée

$\neq 0$). La notion de fonction analytique $f(z)$ sur la surface a alors un sens bien définie, ainsi que celle de différentielle analytique $f(z)dz$ etc. La structure conforme donnée sur la surface y définit une orientation déterminée (sens de rotation qui amène l'axe réel de z sur l'axe imaginaire). On sait que toute surface orientée peut être douée d'une structure conforme (paramètres isothermes!) qui en fait une surface de Riemann, et que toute surface de Riemann compacte est équivalente à une courbe algébrique dans un espace projectif complexe.

o.3. De façon analogue une <u>variété complexe</u> V à n dimensions complexes est une variété au sens habituel, à $2n$ dimensions réelles, décrite localement par n variables complexes $z^1, \ldots, z^n$ dont les parties réelles et imaginaires peuvent servir de paramètres réels locaux, de telle façon que dans l'intersection de deux de ces systèmes de coordonnées complexes $z^1, \ldots, z^n$ et $w^1, \ldots w^n$ la relation entre les z^η et les w^ι soit donnée par des fonctions analytiques $w^\iota (z^1, \ldots, z^n)$; le Jacobien $\dfrac{\partial(w^1, \ldots, w^n)}{\partial(z^1, \ldots, z^n)}$ est alors nécessairement $\neq 0$. On peut alors parler sans ambiguité de fonctions analytiques sur V, de différentielles analytiques, de transformations analytiques etc. On verra plus loin que la variété réelle sousjacante est toujours orientée par la structure complexe d'une façon déterminée. - Malgré l'analogie des définitions, la situation est bien différente pour $n > 1$ de celle pour les surfaces de Riemann. En effet, il existent des variétés orientées (et des variétés orientables dans les deux orientations possibles) n'admettant pas de structure complexe; et il existent des variétés complexes compactes non algébriques, c.à.d. qui ne sont pas équivalentes à des variétés définies par un idéal de polynômes dans un espace projectif complexe. En examinant de près les raisonnements qui permettent d'établir de tels résultats, on constate qu'ils se rapportent au fonds à des classes de variétés "intermédiaires" telles que variétés presque-complexes et variétés Kaehleriennes; les premières étant intermédiaires entre les variétés orientables et les variétés complexes, les secondes entre les variétés complexes et les variétés algébriques. Ces types des variétés ainsi que d'autres, présentent un grand intérêt en eux-mêmes pour la géométrie locale et globale.

La notion de structure presque-complexe est une "approximation linéaire" à celle de structure complexe: on se borne à étudier l'effet de celle-ci sur les espaces tangents aux divers points de la variété. De même, la structure Kaehlerienne n'exprime qu'une partie relativement faible des particularités des variétés algébriques, provenant d'une métrique Hermitienne spéçiale induite par l'espace projectif complexe ambiant.

o.4. On est ainsi amené à étudier des variétés munies de diverses structures locales liées à la structure analytique complexe. Cette étude comporte tout naturellement deux parties: a) une partie locale, qui fait un usage abondant des méthodes de la géométrie différentielle (champs tensoriels, formes différentielles, connexions etc.) b) une partie globale due au fait que la structure locale en question est donnée partout sur la variété; les conséquences globales qu'on essaie d'en tirer s'expriment en grande partie par des propriétés topologiques (homologiques) de la variété, ou encore par des propriétés analytiques (telles qu'existence de différentielles analytiques etc.).

En conséquent, ce cours sera divisé en deux chapitres, dont le premier, de caractère local, est consacré à la géométrie différentielle des structures presque-complexes et complexes; on s'y borne à un voisinage de la variété qui est homéomorphe à un ensemble ouvert d'un espace Euclidien E^m , et on peut, à la condition d'observer toujours l'invariance par rapport aux changements du système de coordonnées, placer toutes les considérations directement dans l'espace E^n. Au <u>second chapitre on étudie quelques propriétés globales des variétés munies d'une de ces structures</u>, avec des applications aux problèmes d'existence, aux variétés algébriques, homogènes etc., et on construit des exemples illustrant les possibilités qui se présentent dans le cas de $n > 1$ dimensions et qui le distinguent du cas classique $n = 1$.

B. Eckmann

CHAPITRE I.

§ I

STRUCTURE COMPLEXE DANS E^{2n}.

1.1. E^{2n} désignera l'espace Euclidien à $2n$ dimensions, décrit par un système de coordonnées réelles $x^1, \dots, x^{2n}$, et D un voisinage de l'origine O. Par "fonction différentiable" dans D nous entendons une fonction $f(x)$, $x \in D$, à valeurs réelles ou complexes, qui est d'une classe de différentiablilité C^k, $k \geqslant 1$, par rapport aux variables réelles $x^1, \dots, x^{2n}$; la valeur de k ne sera précisée que lorsque les circonstances l'exigent. Une fonction de classe C^ω est une fonction analytique au sens réel, c.à.d. donnée par des série de puissances en $x^1, \dots, x^{2n}$.

Un système de coordonnées complexes dans D consiste en la donnée de n fonctions complexes différentiables $z^\mu(x) = z^\mu(x^1, \dots, x^{2n})$, $\mu = 1, \dots, n$ telles que le Jacobien

$$\Delta = \frac{\partial(z^1, \dots, z^n, \bar{z}^1, \dots, \bar{z}^n)}{\partial(x^1, \dots, \dots, \dots, x^{2n})} \quad \text{soit} \neq 0 .$$

Posons $z^\mu = u^\mu + i\, v^\mu$, u^μ, v^μ réels; alors un calcul élémentaire montre que Δ ne differt que d'un facteur constant $\neq 0$ du Jacobien

$$\Delta_1 = \frac{\partial(u^1, v^1, \dots, u^n, v^n)}{\partial(x^1, \dots, \dots, x^{2n})} .$$ La condition $\Delta \neq 0$ est donc équivalente au fait que les parties réelles et imaginaires des z^μ peuvent servir de coordonnées admissibles dans E^{2n}.

De plus, la condition $\Delta \neq 0$ entraîne que les différentielles totales

$$dz^\mu = \frac{\partial z^\mu}{\partial x^i} dx^i \qquad \mu = 1, \dots, n$$

$$d\bar{z}^{\mu} = \frac{\partial \bar{z}^{\mu}}{\partial x^{j}}\, dx^{j} \qquad \mu = 1, \dots, n$$

(convention de sommation habituelle, $j = 1, \dots, 2n$) peuvent se résoudre par rapport aux dx^j :

$$(1) \quad dx^{j} = U^{j}_{\mu}\, dz^{\mu} + V^{j}_{\mu}\, d\bar{z}^{\mu}, \quad j = 1, \dots, 2n; \quad V^{j}_{\mu} = \bar{U}^{j}_{\mu}.$$

1.2. **Soit** f. une fonction(complexe) différentiable dans E^{2n}; en vertu de (1) sa différentielle ~~totale~~ s'exprime linéairement par celles des z^μ et des $\bar{z}^\mu$.

Proposition 1.1. Si on écrit $df = A_\nu\, dz^\nu + B_\nu\, d\bar{z}^\nu$, la condition $B_\nu = 0$ ($\nu = 1, \dots, n$) est nécessaire et suffisante pour que f soit une fonction holomorphe des $z^1, \dots, z^n$.

Démonstration. De $df = A_\nu\, (du^\nu + i\, dv^\nu) + B_\nu (du^\nu - i\, dv^\nu)$ on tire $A_\nu + B_\nu = \frac{\partial f}{\partial u^\nu}$ et $i(A_\nu - B_\nu) = \frac{\partial f}{\partial v^\nu}$

d'où $B_\nu = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial u^\nu} + i\, \frac{\partial f}{\partial v^\nu}\right)$, $\nu = 1, \dots, n$, et $B_\nu = 0$ exprime simplement les équations de Cauchy-Riemann des parties réelle et imaginaire de f par rapport à u^ν et v^ν .-

Considérons alors deux systèmes σ et σ' de coordonnées complexes dans E^{2n}, donnés respectivement par des fonctions z^μ et w^μ. Les w^μ peuvent s'exprimer comme des fonctions des z^μ, et vice versa. Les deux systèmes sont dits équivalents ($\sigma \sim \sigma'$), si les w^μ sont des fonctions holomorphes des $z^1, \dots, z^n$ dans D ; cette relation est symétrique et transitive.

Proposition 1.2. Pour que σ et σ' soient équivalents, il faut et il suffit que dans $dw^\mu = A^\mu_\nu\, dz^\nu + B^\mu_\nu\, dz^\nu$, $\mu = 1, \dots, n$, les B^μ_ν soient tous $= 0$.

Si deux systèmes de coordonnées complexes σ et σ' sont équivalents, toute fonction (différentielle, application,...)

<u>holomorphe</u> par rapport à l'un l'est aussi par rapport à l'autre. Nous dirons que σ et σ' définissent dans $D \subset E^{2n}$ la même <u>structure analytique complexe</u> (ou <u>complexe</u> tout court).

<u>Orientation</u>. Soit $\sigma \sim \sigma'$, et posons $z^\mu = u^\mu + iv^\mu$, $w^\mu = \tilde{u}^\mu + i\tilde{v}^\mu$ ($\mu = 1,\dots, n$; u^μ, v^μ, $\tilde{u}^\mu$, $\tilde{v}^\mu$ réels); si on utilise $u^1, v^1, \dots, u^n, v^n$, et $\tilde{u}^1, \tilde{v}^1, \dots, \tilde{u}^n, \tilde{v}^n$ comme coordonnées réelles dans D, le Jacobien de la transformation de coordonnées est

$$\frac{\partial(\tilde{u}^1,\tilde{v}^1,\dots,\tilde{u}^n,\tilde{v}^n)}{\partial(u^1,v^1,\dots,u^n,v^n)} = \frac{\partial(\tilde{u}^1,\tilde{v}^1,\dots,\tilde{u}^n\tilde{v}^n)}{\partial(w^1,\dots,w^n,\bar{w}^1,\dots,\bar{w}^n)}\cdot\frac{\partial(w^1,\dots,w^n,\bar{w}^1,\dots,\bar{w}^n)}{\partial(z^1,\dots,z^n,\bar{z}^1,\dots,\bar{z}^n)}\cdot$$

$$\cdot\frac{\partial(z^1,\dots,z^n,\bar{z}^1,\dots,\bar{z}^n)}{\partial(u^1,v^1,\dots,u^n,v^n)} = \begin{vmatrix} A^\mu_\nu & 0 \\ 0 & \bar{A}^\mu_\nu \end{vmatrix} = \left|\frac{\partial(w^1,\dots,w^n)}{\partial(z^1,\dots,z^n)}\right|^2,$$

donc toujours > 0. Une structure complexe dans D y définit donc une <u>orientation déterminée</u>.

1.3. Un système σ de coordonnées complexes étant donné, soit J l'opération qui fait passer de dz^μ à $i\,dz^\mu$ ($\mu = 1, \dots, n$; $i = \sqrt{-1}$); en vertu de (1), elle peut s'exprimer dans les différentielles dx^j des coordonnées réelles x sous la forme d'un passage de dx^j à

$$U^j_\mu(i\,dz^\mu) + \bar{U}^j_\mu(-i\,d\bar{z}^\mu) = i\left[U^j_\mu dz^\mu - \bar{U}^j_\mu d\bar{z}^\mu\right] = h^j_k dx^k,\quad j = 1,\dots,2n;\ h^j_k$$

étant le champ tensoriel mixte réel défini par

$$h^j_k = i\left[U^j_\mu \frac{\partial z^\mu}{\partial x^k} - \bar{U}^j_\mu \frac{\partial \bar{z}^\mu}{\partial x^k}\right].$$

Ainsi J peut être envisagé, en tout point $x \in D$, comme transformation linéaire $dx^j \longrightarrow h^j_k\,dx^k$ de l'espace tangent T_x en x (T_x est l'espace vectoriel réel des vecteurs contravariants au point x ; leurs composantes se comportent, dans une transformation des coordonnées réelles x^j, comme les dx^j). De la définition il s'ensuit immédiatement que J^2 = -identité ($dz^\mu \longrightarrow -dz^\mu$, donc $dx^j \longrightarrow -dx^j$), c.à.d. $h^j_k h^k_l = -\delta^j_l$.

La relation entre h_k^j et les fonctions z^μ s'exprime encore sous une autre forme: $dz^\mu = \frac{\partial z^\mu}{\partial x^k} dx^k$ est transformé par J en $\frac{\partial z^\mu}{\partial x^j}\left(h_k^j\, dx^k\right)$ qui doit être $= i dz^\mu = i \frac{\partial z^\mu}{\partial x^k} dx^k$, d'où

$$(2) \qquad i\,\frac{\partial z^\mu}{\partial x^k} = h_k^j\,\frac{\partial z^\mu}{\partial x^j}, \qquad k = 1,\dots,2n;\ \mu = 1,\dots,n.$$

Ce champ J de transformations linéaires ne dépend pas des coordonnées réelles x^j dans E^{2n}, mais naturellement du système complexe σ ; nous allons montrer qu'il est le même pour deux systèmes σ, σ' équivalents, et vice-versa:

<u>Théorème I.</u> <u>Pour que deux systèmes de coordonnées complexes soient équivalents, il faut et il suffit qu'ils induisent le même champs J.</u>

<u>Démonstration</u>: Soit σ le système de coordonnées complexes z^μ, σ' le système w^μ, et J, J' les champs induits, $J : dz^\mu \longrightarrow idz^\mu$, et $J' : dw^\mu \longrightarrow idw^\mu$.

a) Si $\sigma \sim \sigma'$, on a $dw^\mu = A_\nu^\mu\, dz^\nu$; J transforme dw^μ en $A_\nu^\mu\,(idz) = i A_\nu^\mu\, dz = idw^\mu$, c.à.d. $J = J'$.

b) Si $J = J'$, on a dans $dw^\mu = A_\nu^\mu\, dz^\nu + B_\nu^\mu\, d\bar z^\nu$

$$i\,dw^\mu = i\,(A_\nu^\mu\, dz^\nu + B_\nu^\mu\, d\bar z^\nu) = A_\nu^\mu\,(i\,dz) + B_\nu^\mu\,(\overline{i\,dz^\nu}) = i\,(A_\nu^\mu\, dz^\nu - B_\nu^\mu\, d\bar z^\nu)$$

d'où $B_\nu^\mu = 0$, donc d'après la proposition 1, 2, $\sigma \sim \sigma'$.

Une structure complexe donnée par des systèmes de coordonnées complexes σ dans $D \subset E^{2n}$ est donc entièrement caractérisée par son champs J.

1.4. Un champ de transformations linéaires J de carré -1 (un champ tensoriel mixte h_k^j avec $h_k^j h_l^k = -\delta_l^j$) donné dans $D \subset E^{2n}$ indépendamment de tout système de coordonnées complexes est dit une <u>structure presque-complexe dans D</u>. Nous la supposons toujours différentiable, c.à.d. que les $h_k^j(x)$ sont des fonctions différentiables dans D .

Nous dirons que "J <u>appartient</u> à des coordonnées complexes dans D", s'il existe dans D un système de coordonnées complexes σ tel que J soit l'opération $dz^\mu \longrightarrow i\, dz^\mu$ dans σ. En d'autres termes: s'il existent n fonctions complexes $z^\mu(x)$ satisfaisant au système d'équations aux dérivées partielles (2) et telles que
$$\frac{\partial(z^1, z^2, \dots, z^n, \bar z^1, \bar z^2, \dots, \bar z^n)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x^{2n})} \neq 0 .$$

Cela équivaut aussi à l'existence d'un système de coordonnées réelles y^j dans D pour lequel le tenseur h_k^j est, en tout point x , donné par la matrice ayant $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ sur la diagonale principale et des 0 ailleurs (ces y^j sont les parties réelles et imaginaires des z^μ).

Une structure presque-complexe J dans D sera dite <u>intégrable, si tout point de D possède un voisinage D' $\subset$ D dans lequel J appartient à des coordonnées complexes</u>. Notons que dans ce cas les deux systèmes de coordonnées complexes σ' et σ'' définis dans de tels voisinages D' et D" induisent dans D' $\cap$ D" la même structure presque-complexe et y sont par conséquent équivalents (théorème I). Appelons <u>structure complexe dans D</u> un recouvrement de D par des voisinages D' munis d'un système de coordonnées complexes de telle façon que dans toute intersection de deux de ces voisinages les systèmes de coordonnées soient équivalents; l'intégrabilité de J peut alors se définir comme ceci: La structure presque-complexe J dans D est dite intégrable, si elle est induite par une structure complexe dans D .

Une grande partie de ce chapitre est consacré à l'étude des conditions qu'une structure presque-complexe doit remplir pour être intégrable. Ces conditions se formulent dans le cadre de la géométrie différentielle rattachée au champ tensoriel h_k^j et sont d'un intérêt intrinsèque; d'autre part elles expriment beaucoup de propriétés importantes de la structure complexe en vue d'applications diverses (formes différentielles, constructions globales etc.).

1.5 Avant de passer à cette discussion, rappelons quelques propriétés linéaires de la transformation $J : dx^j \longrightarrow h_k^j dx^k$ de l'espace tangent T_x en un point x, pour une structure presque-complexe arbitraire. Le carré étant = -identité, les valeurs propres sont $\pm i$, chacune n fois. Les espaces propres de J ne sont pas réels; passons donc à l'espace tangent T_x^* complexifié (c.à.d. admettons, par rapport à une base réelle de T_x, comme composantes des vecteurs non seulement des valeurs réelles, mais aussi des valeurs complexes) qui est à $2n$ dimensions complexes. Dans T_x^*, soient E' et E'' les deux <u>espaces propres</u> de J correspondant respectivement à $+i$ et $-i$; ils sont conjugués-complexes et d'intersection 0, et de dimension complexe n. Les vecteurs $\omega' \in E'$ sont caractérisés par $J\omega' = i\omega'$, les vecteurs $\omega'' \in E''$ par $J\omega'' = -i\omega''$; tout vecteur $\omega \in T_x^*$ se décompose de façon unique en

$$\omega = \omega' + \omega'' \ , \quad \omega' \in E', \ \omega'' \in E'' ,$$

où $\omega'' = \overline{\omega'}$ pour les vecteurs réels $\omega \in T_x$.

Nous dirons qu'une base de T_x^* est <u>adaptée à J</u>, si elle consiste d'une base de E' et de la base conjuguée de E''; soient $\xi^1, \ldots, \xi^n, \eta^1, \ldots, \eta^n$ les composantes du vecteur $\omega \in T_x^*$ par rapport à une telle base (ξ^μ de $\omega' \in E'$, η^μ de $\omega'' \in E''$, où $\omega = \omega' + \omega''$).

Pour les vecetu rs réels $\in T_x$ les composantes réelles dx^j sont reliées aux ξ^μ et $\eta^\mu = \overline{\xi}^\mu$ par des équations

(3) $$\varphi^{\mu} = u^{\mu}_{j} dx^{j} ,$$

(4) $$dx^{i} = U^{j}_{\mu} \varphi^{\mu} + \overline{U}^{j}_{\mu} \overline{\varphi}^{\mu} .$$

Notons que dans le cas intégrable on peut choisir comme φ^{μ} les différentielles dz^{μ} des fonctions $z^{\mu}(x)$; (4) est alors identique à (1).

§ II

TORSION D'UNE STRUCTURE PRESQUE-COMPLEXE.

2.1. Considérons une strucutre presque-complexe J dans $D \subset E^{2n}$, donnée par le champ h^j_k. Soit $D_\ell \, h^j_k$ la dérivée covariante de h^j_k prise par rapport à une connexion affine $\Gamma^j_{\ell k}$ symétrique arbitrairement choisie dans D, et calculons l'expression

$$(5) \qquad T^j_{\ell p} = \frac{1}{2}(D_\ell \, h^j_k - D_k \, h^j_\ell)\, h^k_p - (D_p \, h^j_k - D_k \, h^j_p) h^k_\ell ,$$

antisymétrique en ℓ et p. Posons comme abbréviations

$$h^j_{\ell k} = \frac{\partial h^j_k}{\partial x^\ell} - \frac{\partial h^j_\ell}{\partial x^k} \quad , \qquad j, \ell, k = 1, \ldots, 2n$$

(ne constituant pas les composantes d'un tenseur!). Il vient

$$T^j_{\ell p} = \frac{1}{2}\left\{ h^j_{\ell k} \, h^k_p - h^j_{pk} \, h^k_\ell \right\} + Q^j_{\ell p} \quad ,$$

où $Q^j_{\ell p}$ est la partie antisymétrique en ℓ, p de

$$\left[(\Gamma^j_{r\ell} h^r_k - \Gamma^s_{k\ell} h^j_s) - (\Gamma^j_{rk} h^r_\ell - \Gamma^s_{\ell k} h^j_s) \right] h^k_p =$$

$$= -\Gamma^j_{p\ell} - \Gamma^s_{k\ell} h^j_s h^k_p - \Gamma^j_{rk} h^r_\ell h^k_p + \Gamma^s_{\ell k} h^j_s h^k_p = -\Gamma^j_{p\ell} - \Gamma^j_{rk} h^r_\ell h^k_p \, ;$$

cette dernière expression étant symétrique en ℓ, p, $Q^j_{\ell p} = 0$, donc

$$(6) \qquad T^j_{\ell p} = h^j_{\ell k} \, h^k_p - h^j_{pk} \, h^k_\ell \, .$$

$T^j_{\ell p}$ ne dépend donc pas de la connexion $\Gamma^j_{\ell k}$, et peut être défini par le second membre de (6) qui est un tenseur rattaché à J ; pour des raisons qui apparaîtront plus loin, nous l'appelons la <u>torsion de J</u>. C'est une expression linéaire homogène par rapport aux dérivées partielles des $h^j_k(x)$ relatives aux x^j.

2.2. Si J est intégrable, il existe dans tout voisinage D' $\subset$ D suffisamment petit un système de coordonnées réelles y^j (cf. 1.3.) dans lequel les composantes de h^j_k sont constantes; dans ce cas, le tenseur $T^j_{\ell p}$ est donc 0 dans D.

<u>Théorème II.</u> <u>Si la structure presque-complexe J est intégrable dans D (= induite par une structure complexe), son tenseur de torsion $T^j_{\ell p}$ est = 0 en tout point de D.</u>

On a ainsi une condition d'intégrabilité nécessaire. On ne sait pas si elle est suffisante (excepte moyennant l'hypothèse supplèmentaire que les h(x) sont de classe C^ω ; cf. 2.3.).

Exemples. 1. n = 1 (D $\subset$ E^2). Un calcul simple montre que $T^j_{\ell p} = 0$ pout toute structure presque-complexe.- Si on se donne une métrique Riemannienne, et si on y définit J par la rotation de $\frac{\pi}{2}$, la construction d'une structure complexe induisant J n'est autre chose que l'introduction locale de paramètres <u>isothermes</u>. Cela suggère que le problème d'intégration de J n'est en général pas simple, excepté dans le cas C^ω.

2. n = 2 (D $\subset$ E^4). Dans le système de coordonnées x^1, x^2, x^3, x^4, soit h^j_k donné par $\begin{pmatrix} 0 & 1 & x^1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -x^1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. On a $h^j_k h^k_\ell = -\delta^j_\ell$.

$h^1_{32} = 1 = -h^1_{23}$, $h^2_{42} = -1 = -h^2_{24}$, tous les autres $h^j_{k\ell}$ sont 0. D'où $T^1_{24} = h^1_{4k} h^k_2 - h^1_{2k} h^k_4 = -h^1_{23} h^3_4 \neq 0$. Cette structure n'est pas intégrable.

De façon analoque il serait facile de construire des structures non intégrable dans E^{2n} pour tout n.

3. Sur la sphère S^6 à 6 dimensions il existe une structure presque-complexe bien connue (cf. [15] , [17] , [11]), définie à l'aide des octaves de Cayley purement imaginaires qui constituent l'espace E^7. Si on se borne à un voisinage sur S^6, on obtient une structure J dans E^6, et un calcul explicite ([10], [11] pp.61-65) montre qu'elle n'est pas intégrable.

2.3. Théorème III. Une structure presque-complexe J dans $D \subset E^{2n}$ de classe C^{ω} (analytique au sens réel) et de torsion nulle est intégrable; c.à.d. tout point de D possède un voisinage $D' \subset D$ tel qu'existe dans D' un système de coordonnées complexes qui induit J.

Démonstration. a) Il s'agit d'après 1. , de trouver n fonctions complexes $z^{\mu}(x)$ de Jacobien $\dfrac{\partial(z^1,\dots,z^n,\bar z^1,\dots,\bar z^n)}{\partial(x^1,\dots\dots,x^{2n})} \neq 0$

satisfaisant à (2), autrement dit à

$$(2) \qquad \frac{\partial z^{\mu}}{\partial x^j}\left(h^j_k - i\delta^j_k\right) = 0 \qquad k = 1,\dots,2n;\ \mu = 1,\dots,n .$$

Le système linéaire

$$\frac{\partial z^{\mu}}{\partial x^j}\, dx^j = 0 \quad , \ \mu = 1,\dots,n$$

aux inconnues dx^j est alors de rang n et a les solutions $dx^j_{(k)} = h^j_k - i\delta^j_k$, $j = 1,\dots, 2n$ (où k est une des valeurs $1,\dots, 2n$), ainsi que leurs combinaisons linéaires, mais pas d'autres car le rang de ces $2n$ solutions est égal au rang de la matrice $(h^j_k - i\delta^j_k)$, donc $= n$, i étant une valeur propre n-tuple de h. Notons que le système linéaire

$$(7) \qquad (h^l_j + i\delta^l_j)\, dx^j = 0\,, \qquad l = 1,\dots, 2n$$

a exactement les mêmes solutions $dx^j_{(k)} = h^j_k - i\delta^j_k$ et leurs combinaisons linéaires (le rang étant également n).

Réciproquement tout système de n fonctions $z^\mu(x)$ telles que le système $\frac{\partial z^\mu}{\partial x^j} dx^j = 0$ ($\mu = 1,\dots, n$) soit "équivalent" à $(h^l_j + i\delta^l_j)\, dx^j = 0$ (c.à.d. ait les mêmes solutions) satisfait à (2)' ; de plus le système $\frac{\partial z^\mu}{\partial x^j} dx^j = 0$, $\frac{\partial \bar{z}^\mu}{\partial x^j} dx^j = 0$ ($\mu = 1,\dots, n$), équivalent à un système réel, n'aura alors aucune solution réelle $\neq 0$, ce qui implique que son déterminant $\frac{\partial(z^1,\dots,z^n,\bar{z}^1,\dots,\bar{z}^n)}{\partial(x^1,\dots,x^{2n})} \neq 0$.

b) On a donc ramené le problème à celui de construire n fonctions $z^\mu(x)$ telles que $\frac{\partial z^\mu}{\partial x^j} dx^j = 0$ soit équivalent à (7) $(h^l_j + i\delta^l_j)\, dx^j = 0$. Or on sait que dans un voisinage suffisamment petit une solution existe, si la condition d'intégrabilité est satisfaite (théorème de Frobenius).

Cette condition exige que

$$(8) \qquad \left(\frac{\partial(h^l_j + i\delta^l_j)}{\partial x^p} - \frac{\partial(h^l_p + i\delta^l_p)}{\partial x^j} \right) dx^j \delta x^p = 0$$

pour deux solutions dx^j et δx^j arbitraires de (7); il suffit de pendre $dx^j = h^j_k - i\delta^j_k$ et $\delta x^j = h^j_m - i\delta^j_m$. avec k et m pris dans 1,..., 2n. Le calcul donne pour le premier membre de (6)

$$h^l_{pj}(h^j_k - i\delta^j_k)(h^p_m - i\delta^p_m) = h^l_{pj} h^j_k h^p_m - h^l_{mk} - i\,(h^l_{pk} h^p_m + h^l_{mj} h^j_k) = (h^l_{pj} h^j_k - h^l_{kj} h^j_p)\, h^p_m + i\,(h^l_{kp} h^p_m - h^l_{mp} h^p_k) =$$

$$T^l_{pk}\,(h^p_m - i\delta^p_m)\,,$$

donc = 0 sous l'hypothèse du théorème que la torsion $T^j_{lp} = 0$. La condition étant satisfaite, on trouve donc localement un système de coordonnées complexes induisant J .

L'hypothèse d'analycité réelle est nécessaire dans cette démonstration, pour la raison suivante: Pour construire les fonctions $z^\mu(x)$, on fait usage des courbes intégrales de (5) considéré comme système d'équations différentielles. Aucune solution n'étant réelle, cela a seulement un sens si on étend la définition des $h^j_k(x)$ à des valeurs complexes de x^j , et cela de telle façon que $T^j_{kl} = 0$ reste valable; si $h^j_k(x)$ est de classe C^ω , cette extension se fait de façon évidente par les séries de puissances, sinon on serait en face d'un problème aux dérivées partielles qui paraît plus compliqué que le problème initial.

2.4. Pour une structure presque-complexe de classe C^k , $k < \omega$ et de torsion 0 le problème d'intégration n'est pas résolu; mais une grande partie des raisonnements faits sur les structures complexes peut se faire sans utiliser les coordonnées complexes, en se basant simplement sur la structure presque-complexe J induite et sur le fait que $T^j_{kl} = 0$; en d'autres termes: de tels raisonnements s'appliquent à toute structure J sans torsion (appelée souvent structure pseudo-complexe) : c'est un champ tensoriel h^j_k vérifiant

$$h^j_k\, h^k_l = -\delta^j_l \quad \text{et} \quad h^j_{pk}\, h^k_l = h^j_{lk}\, h^k_p\,.$$

§ III

CONNEXIONS ET METRIQUES ASSOCIÉES À UNE STRUCTURE PRESQUE-COMPLEXE.

3.1. Une connexion affine Λ de composantes Λ^j_{kl} étant donnée dans $D \subset E^{2n}$, notons D_i ou D^{Λ}_i les dérivées covariantes correspondantes. Un champ tensoriel de dérivée D^{Λ}_i nulle sera dit "parallèle par rapport à Λ ". Si en particulier le champ h^j_k définissant une structure presque-complexe J est parallèle par rapport à Λ, le transport parallel de tout vecteur le long d'une courbe est permutable avec les transformations linéaires J aux divers points de la courbe.

Proposition 3.1. Soit J une structure presque-complexe dans $D \subset E^{2n}$. Il existent des connexions affines Λ dans D (en général non symétriques) pour lesquelles J est parallèle.

Démonstration. Soit Γ une connexion affine symétrique dans D, choisie arbitrairement. Posons $D^{\Gamma}_l h^j_k = A^j_{lk} + S^j_{lk}$, où A^j_{lk} est antisymétrique, S^j_{lk} symétrique en l, k, et

$$\Lambda^j_{kl} = \Gamma^j_{kl} - \frac{1}{2}(A^j_{pl}\ h^p_k + S^p_{kl}\ h^j_p) ;$$

ces grandeurs définissent une connexion, et on a

$$\begin{aligned}
D^{\Lambda}_l\ h^j_k = D^{\Gamma}_l\ h^j_k &- \frac{1}{2}(A^j_{pl}\ h^p_r + S^p_{rl}\ h^j_p)\ h^r_k \\
&+ \frac{1}{2}(A^s_{pl}\ h^p_k + S^p_{kl}\ h^s_p)\ h^j_s \\
= D^{\Gamma}_l\ h^j_k + \frac{1}{2}\ A^j_{kl} - \frac{1}{2}\ S^j_{kl} &+ \frac{1}{2}\ A^s_{pl}\ h^p_k\ h^j_s - \frac{1}{2}\ S^p_{rl}\ h^j_p\ h^r_k \\
= \frac{1}{2}\ D^{\Gamma}_l\ h^j_k &- \frac{1}{2}\ (D^{\Gamma}_l\ h^s_p)\ h^p_k\ h^j_s
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} D_l^{\Gamma} h_k^j + \frac{1}{2} (D_l^{\Gamma} h_k^p) h_p^s h_s^j$$

$$= \frac{1}{2} D_l^{\Gamma} h_k^j - \frac{1}{2} D_l^{\Gamma} h_k^j = 0 ,$$

ou on a fait usage de $D_l^{\Gamma} (h_p^s h_k^p) = 0 = (D_l^{\Gamma} h_p^s) h_k^p + (D_l^{\Gamma} h_k^p) h_p^s$.

La connexion Λ a donc la propriété requise $D_l^{\Lambda} h_k^j = 0$.

La "torsion" de cette connexion au sens habituel est $= \Lambda_{kl}^{j} - \Lambda_{lk}^{j} = -\frac{1}{2} (A_{pl}^j h_k^p - A_{pk}^j h_l^p) = T_{kl}^j$ (torsion de la structure presque-complexe, d'après la définition dans 2.1.); nous avons vu que T_{kl}^j est indépendant de la connexion auxiliaire Γ et peut être donné par $\frac{1}{2} (h_{kp}^j h_l^p - h_{lp}^j h_k^p)$.

Proposition 3.2. La connexion Λ pour laquelle J est parallèle peut être choisie telle que sa "torsion" soit égale à la torsion de la structure presque-complexe J .

Proposition 3.3. Pour qu'il existe des connexions symétriques dans lesquelles J soit parallèle, il faut et il suffit que J soit sans torsion (ce qui est le cas si J est intégrable).

3.2. Une métrique Riemannienne $ds^2 = g_{jk} \, dx^j \, dx^k$ dans $D \subset E^{2n}$ est dite Hermitienne par rapport à la structure presque-complexe J , si la transformation linéaire J conserve la longueur $|\omega| = (g_{jk} \, dx^j \, dx^k)^{1/2}$ des vecetuRs tangents $\omega \in T_x$ $(x \in D)$ de composantes dx^j : $|J\omega| = |\omega|$.

Remarque: Si une métrique g_{jk} n'a pas cette propriété, on peut en dériver une métrique Hermitienne g'_{jk} en posant la nouvelle longueur $|\omega|'^2 = \frac{1}{2}(|\omega|^2 + |J\omega|^2)$, c.à.d.

$$g'_{jk} = \frac{1}{2} (g_{jk} + g_{rs} h_j^r h_k^s) .$$

La condition Hermitienne $|J\omega| = |\omega|$ signifie, en composantes,

$$g_{jk} = g_{rs} \; h^r_j \; h^s_k \; ,$$

ou encore $g_{jk} \; h^k_l = - g_{rl} \; h^r_j$ ou $g_{jk} \; h^k_l + g_{lk} \; h^k_j = 0$,

en d'autres termes: Le tenseur covariant $h_{lj} = g_{jk} \; h^k_l$ est antisymétrique. On lui associe la 2-forme (forme différentielle extérieure de degré 2)

$$\Omega = h_{lj} \; dx^l \wedge dx^j = g_{jk} \; h^k_l \, dx^l \wedge dx^j \; .$$

Si la différentielle extérieure $d\Omega = 0$, la métrique est dite <u>Kaehlerienne</u>. La condition signifie

$$(10) \qquad \frac{\partial h_{lj}}{\partial x^k} + \frac{\partial h_{jk}}{\partial x^l} + \frac{\partial h_{kl}}{\partial x^j} = 0 \; ;$$

en place des dérivées partielles on peut aussi bien mettre les dérivées covariantes relatives à une connexion symétrique Γ arbitraire, p. ex. la connexion de la métrique g_{jk} . Dans ce dernier cas , elle s'exprime sous la forme

$$(11) \qquad g_{jp} \; D_k \; h^p_l \; + \; g_{kp} \; D_l \; h^p_j \; + \; g_{lp} \; D_j \; h^p_k = 0 \; .$$

3.3. Faisons usage d'une base, dans l'espace tangent T^*_x complexifié, adaptée à J (cf. 1.5.) , et soient $\xi^\mu, \bar{\xi}^\mu$, $\mu = 1,\dots,n$ les composantes d'un vecteur réel $\omega \in T_x$ par rapport à cette base. Pour une métrique Riemannienne quelconque $ds^2 = g_{jk} \; dx^j \; dx^k$ on a alors

$$g_{jk} \; dx^j \; dx^k = G_{\mu\nu}\xi^\mu\xi^\nu + H_{\mu\nu}\xi^\mu\bar{\xi}^\nu + \bar{G}_{\mu\nu}\bar{\xi}^\mu\bar{\xi}^\nu$$

avec $H_{\mu\nu} = \bar{H}_{\nu\mu}$

<u>Proposition 3.4. Pour que la métrique g_{jk} soit Her-</u>

mitienne, il faut et il suffit que $G_{\mu\nu} = 0$.

En effet, si $G_{\mu\nu} = 0$ $|J\omega|^2 = H_{\mu\nu}(i\varphi^\mu)(-i\bar{\varphi}^\nu) = H_{\mu\nu}\varphi^\mu\bar{\varphi}^\nu = |\omega|^2$; réciproquement $|J\omega| = |\omega|$ pour tout vecteur ω entraîne $G_{\mu\nu}\varphi^\mu\varphi^\nu + \bar{G}_{\mu\nu}\bar{\varphi}^\mu\bar{\varphi}^\nu = 0$ pour toutes les valeurs des φ^μ, donc $G_{\mu\nu} = 0$.

La forme différentielle Ω associées à une métrique Hermitienne $ds^2 = H_{\mu\nu}\varphi^\mu\bar{\varphi}^\nu$ est alors donnée par

$$\Omega = g_{jk}\, h^k_l\, dx^l \wedge dx^j = H_{\mu\nu}\, i\varphi^\mu \wedge \bar{\varphi}^\nu,$$

donc

$$\Omega = i\, H_{\mu\nu}\varphi^\mu \wedge \bar{\varphi}^\nu .$$

Notons que sa puissance extérieure n-ième

$$\Omega^n = i^n n!\, |H_{\mu\nu}|\, \varphi^1 \wedge \bar{\varphi}^1 \wedge \ldots \wedge \varphi^n \wedge \bar{\varphi}^n .$$

Le déterminant $|H_{\mu\nu}|$ étant $\neq 0$, Ω^n est donc toujours $\neq 0$.

Dans le cas d'une structure presque-complexe J intégrable, c.à.d. si J dérive d'une structure complexe donnée par des coordonnées complexes z^μ, la base complexe adaptée à J peut être choisie telle que les composantes φ^μ se comportent comme les dz^μ, et la forme Ω est donnée par $i H_{\mu\nu}\, dz^\mu \wedge d\bar{z}^\nu$.

3.4. Nous reprennons la discussion des métriques Hermitiennes et Kaehleriennes sous la forme réelle (3.2.)

Soit g_{jk} une métrique Riemannienne, et supposons que la structure presque-complexe J soit parallèle dans cette métrique (c.à.d., dans la connexion symétrique qu'on associe à cette métrique). Alors la torsion de J est nulle (prop. 3.3.). De plus on peut, d'après 3.2., déduire de g_{jk} une métrique g'_{jk} Hermitienne par rapport à J :

$$g'_{jk} = \frac{1}{2}\left(g_{jk} + g_{pl}\, h^p_j\, h^l_k\right).$$

La dérivée covariante D_j relative à g_{jk} du tenseur g'_{jk} est nulle; cela signifie que D_j est aussi la dérivée covariante relative à g'_{jk}. Pour la forme Ω associée à la métrique Hermitienne g'_{jk}, on a d'après (11) $d\Omega = o$; c'est donc une métrique Kaehlerienne.- Nous allons établir la réciproque:

Proposition 3.5. Si J est sans torsion, et si la métrique g_{jk} est Kaehlerienne par rapport à J, alors J est parallèle dans cette métrique.

Démonstration. Notons D_j les dérivées covariantes par rapport à la métrique. La condition $T^j_{kl} = 0$ peut s'écrire

$$(D_p \; h^j_k - D_k \; h^j_p) \; h^p_l \quad = \text{symétrique en } k \; , \; l \; ;$$

la condition $d\Omega = 0$ s'exprime par (11) , ou bien, en tenant compte de $g_{jk} \; h^k_l = - g_{lk} \; h^k_j$

$$g_{jp} \; (D_k \; h^p_l - D_l \; h^p_k) + g_{lp} \; D_j \; h^p_k = 0 \; ;$$

ou en tire que

$$g_{lp} \; (D_j \; h^p_k) \; h^k_r = - g_{jp} \; (D_k \; h^p_l - D_l \; h^p_k) \; h^k_r$$

est symétrique en l , r , donc que

$$g_{lp} \; (D_j \; h^p_k) \; h^k_r = g_{rp} \; (D_j \; h^p_k) \; h^k_l = - g_{kp} \; (D_j \; h^p_r) \; h^k_l =$$

$$= g_{kl} \; (D_j \; h^p_r) \; h^k_p = g_{lp} \; (D_j \; h^k_r) \; h^p_k$$

(on a remplacé k par p et v.v.)

d'où $(D_j \; h^k_r) \; h^p_k = (D_j \; h^p_k) \; h^k_r$; mais $h^p_k \; h^k_r = - \delta^p_r$ entraîne

$$(D_j\, h^k_r)\, h^p_k = -(D_j\, h^p_k)\, h^k_r \,, \quad \text{donc} \quad (D_j\, h^k_r)\, h^p_k = 0 \,,$$

et finalement $D_j\, h^k_r = 0$.

Nous résumons une partie des nos résultats :

Théorème IV. a) Soit J une structure presque-complexe dans $D \subset E^{2n}$. Il existent toujours des connexions affines pour lesquelles J est parallèle ; pour qu'il y en ait une qui soit symétrique, il faut et il suffit que J soit sans torsion; pour qu'il y ait une qui soit Riemannienne, que J soit sans torsion et admette une métrique Kaehlerienne.

b) Soit J une structure presque-complexe sans torsion (p. ex. induite par une structure complexe). Pour qu'une métrique Hermitienne par rapport à J (c.à.d. telle que J soit une isométrie de l'espace tangent) soit Kaehlerienne, il faut et il suffit que J soit parallèle dans cette métrique.

3.5. Notons, pour terminer ce paragraphe, quelques propriétés de "symétrie relative à J" de la torsion et courbure des connexions affines considérées.

Proposition 3.6. Soit T^j_{kl} la torsion de J (donnée par h^j_k). On a

$$T^j_{kl}\, h^l_p + T^j_{pl}\, h^l_k = 0 \quad \text{et} \quad T^j_{pk}\, h^l_j + T^l_{jk}\, h^j_p = 0$$

Proposition 3.7. Soit Λ une connexion affine dans laquelle J est parallèle, $R^l_{k,ij}$ son tenseur de courbure. On a

$$R^l_{k,ij}\, h^p_l = R^p_{l,ij}\, h^l_k$$

Proposition 3.8. Soit g_{jk} une métrique Kaehlerienne par rapport à J sans torsion. On a

$$R_{pl,ij}\, h^l_k = R_{kl,ij}\, h^l_p$$

Les démonstrations se font par le calcul direct, cf. [11] pp. 74-75.