C. Ferrari (Ed.)

CIME Summer Schools

Teoria della turbolenza

14

Varenna, Italy 1957

Springer

FONDAZIONE CIME ROBERTO CONTI

C. Ferrari (Ed.)

Teoria della turbolenza

Lectures given at the
Centro Internazionale Matematico Estivo (C.I.M.E.),
held in Varenna (Como), Italy,
September 1-9, 1957

Springer

FONDAZIONE
CIME
ROBERTO CONTI

C.I.M.E. Foundation
c/o Dipartimento di Matematica "U. Dini"
Viale Morgagni n. 67/a
50134 Firenze
Italy
cime@math.unifi.it

ISBN 978-3-642-10908-9 e-ISBN: 978-3-642-10910-2
DOI:10.1007/978-3-642-10910-2
Springer Heidelberg Dordrecht London New York

Reprint of the 1st ed. C.I.M.E., Libreria Ed. Universitaria Levrotto & Bella, Torino 1957
With kind permission of C.I.M.E.

Printed on acid-free paper

Springer.com

CENTRO INTERNAZIONALE DI MATEMATICA ESTIVO
C.I.M.E.

CORSO SULLA

TEORIA DELLA TURBOLENZA

VARENNA 1 - 10 Settembre 1957

LIBRERIA EDITRICE UNIVERSITARIA LEVROTTO & BELLA - TORINO

INDICE

SEZIONE A

PROBLÈMES MATHÉMATIQUES DE LA THÉORIE DE LA TURBULENCE HOMOGÈNE

JOSEPH KAMPÉ DE FÉRIET

SEZIONE B

CONFERENZE

S E Z I O N E   C

T U R B O L E N Z A   D I   P A R E T E

CARLO FERRARI

CAPITOLO I

CAPITOLO II

CAPITOLO III

SEZIONE A

PROBLÈMES MATHÉMATIQUES DE LA THÉORIE DE LA TURBULENCE HOMOGÈNE

JOSEPH KAMPÉ DE FÉRIET

INTRODUCTION

Les équations de la Mécanique des fluides visqueux incompressibles sont connues depuis plus d'un siècle; découvertes d'abord par NAVIER en 1822, elles ont été retrouvées par Sir Gabriel STOKES en 1845; elles s'écrivent:

$$(N_j) \qquad \frac{\partial u_j}{\partial t} + \sum_k \frac{\partial}{\partial x_k}(u_j u_k) = \nu \Delta u_j - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_j} + X_j \qquad j = 1,2,3$$

$$(N_4) \qquad \sum_k \frac{\partial u_k}{\partial x_k} = 0$$

(Les coordonnées d'un point x sont désignées par x_1, x_2, x_3, les composantes du vecteur vitesse u par u_1, u_2, u_3; la pression par p; X_1, X_2, X_3 désignent les composantes de la force extérieure; ρ et ν sont deux constantes caractéristiques du fluide, supposé incompressible, a température constante ed doué d'une conductibilité thermique infinie: ρ = masse spécifique, ν = viscosité cinematique).

Le problème de la turbulence est né le jour, où l'on a constaté que pour l'écoulement d'un fluide dans un tube cylindrique, l'intégrale élémentaire (mouvement permanent par droites parallèles) des équations de NAVIER donnait des résultats numériques en désaccord complet avec les mesures expérimentales des ingénieurs hydrauliciens: pour un débit donné dans le tuyau, la perte de charge mesurée pouvait etre 10 ou 100 fois plus grande que la perte de charge théorique. La situation se compliqua encore lorsque H. POISEUILLE en 1842, opérant sur des tubes capillaires (dont le diamètre était compris entre 0,01 et 0,1 mm) obtint au contraire pour le même écoulement, un accord excellent, avec une précision de l'ordre du millième, entre les resultats expérimentaux et théoriques.

Devant de telles contradictions, on comprend l'opinion exprimée en 1865, par d'excellents spécialistes comme DARCY et BAZIN "La question se complique et s'obscurcit donc davantage à mesure que des expériences plus nombreuses et plus précises paraîtraient devoir y jeter une plus grande lumière". BARRÉ DE SAINT VENANT écrivait en 1872 : "L'hydraulique est une désespérante énigme".

C'est le grand ouvrage de J. BOUSSINESQ (1872) "Essai sur la théorie des Eaux courantes" [9] et les deux mémoires d'Osborne REYNOLDS [89], [90] qui projetèrent, les premiers, quelques lueurs sur ce chaos.

BOUSSINESQ, reconnaissant nettement le caractère d'extrême complexité de la vitesse d'un écoulement turbulent, en dégage la conclusion essentielle, point de départ de la Mécanique statistique de la turbulence: "Les équations des mouvements de fluides parfaits régissent les mouvements tourbillonnaires et tumultueux des fluides, pourvu qu'on y introduise, au lieu des vitesses vraies et de la pression vraie a chaque instant, leurs valeurs moyennes locales".

Après BOUSSINESQ, REYNOLDS (1895) redecouvrit cette idée fondamentale: dans le mouvement turbulent d'un fluide, il convient de distinguer deux parts: un mouvement moyen et un mouvement d'agitation. Une propriété mesurable quelconque f du fluide (composante de la vitesse u_1, u_2, u_3, pression p, température T ...) doit se décomposer sous la forme:

$$f = \bar{f} + f' ;$$

la composante moyenne $\bar{f}$ est seule accessible aux instruments de mesure ordinaires (par exemple tube de PITOT pour la mesure de la vitesse, thermomètre à mercure pour la mesure de la température), le but de la théorie est d'écrire les équations du mouvement moyen (liant les composantes moyennes $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3, \bar{p}, \ldots$ etc...); les composantes d'agitation qui traduisent l'influence de la turbulence sur le mouvement moyen ne doivent y figurer que par des moyennes (par exemple, $\overline{u'_j, u'_k}$).

BOUSSINESQ s'efforce de conserver aux équations du mouvement moyen la même forme qu'aux équations de NAVIER, mais en substituant au coefficient ν de viscosité moléculaire, un coefficient ε de viscosité turbulente; malgré l'extrême ingéniosité dont il fit preuve au cours de recherches qui occupèrent une large partie de sa carrière (écoulements dans des tuyaux et des canaux de sections variées, fleuves, torrents, etc...) tout le monde est d'accord pour constater que son unique ε n'est pas suffisant pour rendre compte de l'effet de l'agitation turbulente sur le mouvement moyen. Osborne REYNOLDS, au contraire, ouvre des horizons nouveaux, en montrant que l'action des fluctuations turbulentes sur le mouvement moyen se traduit par des forces de frottement, dont il donne l'expression

$$F_{j,k} = -\rho\,\overline{u'_j u'_k} \qquad j,k = 1,2,3\ ;$$

il met l'accent sur le bilan énergétique, évaluant les échanges d'énergie entre le mouvement moyen et le mouvement d'agitation.

Il fallut attendre près d'un demi-siècle, pour que le renouveau de la Mécanique des fluides, dû au développement de l'Aéronautique, amène, entre 1920 et 1940, avec un flot d'idées neuves, des progrès considérables. Mais, pour répondre aux nécessités de la pratique, les efforts se dispersèrent vers les aspects les plus divers de la turbulence: écoulement dans un tuyau, écoulement autour d'une aile d'avion, diffusion d'un jet, structure du vent dans l'atmosphère, etc...; tous ces problèmes sont abordés simultanément et seuls des fragments de théories, mêlées d'une foule d'hypothèses empiriques, reliées entre elles parfois par un fil bien tenu, s'élaborent autour de chacun de ces problèmes.

Depuis l'introduction par L PRANDTL, en 1904, de la notion de *couche limite* (dont les travaux expérimentaux de J.M. BÜRGERS ne devaient révéler la structure complexe qu'en 1924), on pouvait prévoir qu'un des facteurs discriminants de toute classification des problèmes, serait la présence ou l'absence de parois solides; pour saisir la turbulence dans un de ses états purs, il fallait se placer aussi loin que possible de toute paroi solide; c'est pourquoi, vers 1930, l'attention commence à se concentrer autour d'un problème assez schématique pour donner prise à una élaboration logique plus approfondie: *l'étude de la turbulence dans* *un fluide incompressible sans frontières et par conséquent emplissant tout l'espace.* Pour commencer, on introduit des considérations de symétrie (d'ailleurs plausibles et souvent vérifiées avec une bonne approximation dans les mesures) et on ne considère que la *turbulence homogène et isotrope,* c'est à dire que les propriétés statistiques du champ des vitesses turbulentes sont supposées invariantes pour toute translation des axes et pour toute rotation autour d'un point.

Dans l'étude de la turbulence homogène et isotrope, c'est à Sir Geoffrey TAYLOR et à Th. VON KÁRMÁN que sont dues, au départ, toutes les idées essentielles: *le spectre d'énergie de la vitesse* et le *coefficient de corrélation* qui lui correspond, ont été introduits par TAYLOR; l'extension à l'espace de cette dernière notion fut faite sous la forme du *tenseur de corrélation* par KÁRMÁN-HOWARTH.

Un progrés ultérieur fut l'introduction du *tenseur spectral,* en 1948, par G.K. BATCHELOR et J. KAMPÉ DE FÉRIET; le tenseur spectral est susceptible de remplacer (dans l'étude de la turbulence homogène, mais non nécessairement isotrope) le tenseur de corrélation et présente sur celui-ci des avantages décisifs dans les recherches théoriques.

Une série de travaux, qui ne fut connue de l'ensemble du monde scientifique qu'à la fin de la guerre mondiale, concentra l'attention sur l'étude du spectre d'énergie: comment dans une turbulence homogène et isotrope, *le spectre évolue-t-il en fonction du temps?* Evolue-t-il toujours vers *une loi limite universelle?* Les réponses a ces questions dépendent essentiellement des hypotèses sur la maniere dont, dans un écoulement les tourbillons de dimensions différentes, (dira-t-on, pour faire bref) échangent leur énergie, purement cinétique d'ailleurs, puisqu'il s'agit d'un fluide incompressible; A. KOLMOGOROFF apporta une série d'idées neuves et fascinantes dans une suite de mémoires (1941) [74], [75], [76]; qui, dès qu'ils furent connus, firent sensation; indépendamment de lui, W. HEISENBERG et L. ONSAGER [85], [86] avaient émis des idées trés voisines. Toute une série de remarquables travaux de L. SEDOV [91]; A. OBUKHOFF [84]; C.C. LIN [79]; [80], [81]; Th. VON KÁRMÁN [72], G.K. BATCHELOR, L.S.G. KOVASZNAY [77], C. VON WEIZSÄCKER [95], S. CHANDRASEKHAR [13] fut consacrée à ce nouveau domaine.

Il ne saurait être question de retracer ici le développement de ces idées dans tous ses détails. Nous nous permettrons de renvoyer aux ouvrages de G.K. BATCHELOR [4] et de L. AGOSTINI et J. BASS [1] où l'on trouvera un excellent exposé historique.

Dans l'étude de la turbulence, on peut se placer à des points de vue très différents:

Les problèmes posés par la turbulence ont souvent une grande importance pratique pour les applications à l'Aéronautique ou à l'Hydraulique. Pour les Ingénieurs, l'urgence du but à atteindre prime toute autre considération; l'explication scientifique des faits passe à l'arrière plan; ce qui importe avant tout, c'est de relier un ensemble de mesures expérimentales en un faisceau de courbes cohérentes (introduction de variables sans dimension); la valeur de ces courbes tient, à leurs yeux, dans la possibilité de s'en servir pour prévoir: en interpolant, où parfois même, en extrapolant, on veut prévoir des résultats numériques sans avoir à faire de nouvelles expériences (une heure de calcul coute moins cher, en général, qu'une heure de soufflerie)

Cette attitude est parfaitement légitime: non seulement nous devons l'approuver, mais encore nous ne pouvons qu'être reconnaissants de l'enrichissement considérable apporté par l'accumulation de mesures expérimentales faites à l'occasion des divers problèmes pratiques posés par la turbulence; beaucoup d'intuitions physiques, dont certaines sont profondes, ont certainement vu le jour de cette façon.

Mais quand on parle d'une *théorie de la turbulence*, c'est à tout autre chose que nous pensons; la Mécanique des Fluides étant un chapitre de la Mécanique, nous en évoquous d'autres chapitres: la Mécanique Céleste, la Mécanique du solide indéformable, la Mécanique du corps élastique. Là, partant d'hypothèses $A, B, C, \ldots$ on démontre par voie purement mathématique, qu'il en résulte des propriétés, $H, I, J, \ldots$; ce sont ces propriétés $H, I, J, \ldots$ que l'on confronte ultérieurement avec les mesures expérimentales, mais dans le passage des prémisses $A, B, C, \ldots$ aux conséquences $H, I, J, \ldots$ on se garde bien d'ajouter des prémisses supplémentaires $E, F, G, \ldots$ suggérées plus ou moins heureusement, en cours de route, par des observations expérimentales nouvelles. Quiconque parcourt la littérature scientifique de ces dernieres décades, se rende compte, du premier coup d'oeil, qu'aucune "théorie" de la turbulence n'a encore atteint ce stade de perfection. C'est surtout sur la nécessité d'un examen critique, où l'on tenterait d'éprouver sérieusement quelques maillons de la chaine logique, que nous voudrions attirer l'attention dans ces lecons, en conservant comme thème central: *la turbulence homogène dans un fluide incompressible remplissant tout l'espace.*

Un des grands problèmes, qui tourmentent tous les spécialistes de la turbulence, c'est de savoir *si les équations de NAVIER restent valides pour les mouvements turbulents d'un fluide.*

Cette question est fondamentale, non seulement du point de vue abstrait de l'épistémologie (l'explication scientifique de la turbulence étant évidemment liée aux équations qui en forment le cadre), mais encore au point de vue pratique le plus immédiat, puisque même dans les théories semi-empiriques, pour relier les faits entre eux, l'on utilise toujours, au moins partiellement, certaines conséquences des équations de NAVIER, à travers les équations de REYNOLDS, qui en sont dérivées.

Les arguments avancés, pour ou contre, la validité des équations de NAVIER, dans une théorie de la turbulence, ne semblent guère concluants.

Pour donner une réponse précise à cette question, il faudrait prouver qu'en partant de prémisses $A, B, N, \ldots$ (N signifiant qu'on n'admettra un champ de vitesse dans une démonstration que s'il est établi que les fonctions $u_j(x,t)$ sont des intégrales des équations de NAVIER), on peut en déduire des conséquences $H, I, J, \ldots$ qui, confrontées avec les observations expérimentales, sont en accord ou en désaccord avec elles, à la précision prés des mesures.

Or, on est bien loin de ce but. La plupart du temps, dans les "théories de la turbulence", on adjoint, en cours de route, aux prémisses $A, B, N, \ldots$ tant d'hypotheses supplementaires $E, F, G, \ldots,$ suggérées par l'examen des faits expérimentaux, que l'écheveau, ainsi tissé par ce mélange de logique et d'empirisme, devient impossible a débrouiller. En effet, on ne sait presque jamais si les hypothèses supplémentaires ne sont pas contradictoires avec les prémisses. Par exemple, supposons qu'un auteur, se basant sur l'allure de courbes expérimentales, introduise des écoulements, où le champ des vitesses est représenté par des fonctions presque périodiques dans le temps où dans l'espace. S'il n'à pas prouvé, au préalable, que les équations de NAVIER sont susceptibles d'admettre des intégrales presque périodiques, quelle est la valeur logique de ses conclusions?

S'il était démontre que les prémisses $A, B, N, \ldots$ conduisent par voie purement logique, - sans l'adjonction d'aucune hypothèse supplémentaire dont la non-contradiction avec les prémisses n'est pas prouvée, - à des conséquences H, I, J réellement incompatibles avec l'ensemble des observations d'écoulements turbulents, il nous faudrait bien abandonner les équations de NAVIER; mais, comme on est tres loin, semble-t-il, d'une telle démonstration, il nous parait naturel de continuer à les utiliser.

Les équations de NAVIER se recommandent par la solidité et la simplicité de la base que leur ont données Sir G. STOKES en 1845 et A. BARRÉ DE SAINT VENANT et 1846: *elles expriment, en effet, que la tenseur des forces de viscosité* $F_{j,k}$ *dépend seulement du tenseur des vitesses de déformation* $V_{j,k} = \dfrac{\partial u_j}{\partial x_k} + \dfrac{\partial u_k}{\partial x_j}$.

La relation entre ces deux tenseurs traduisant une loi physique indépendante des repères, les composantes $F_{j,k}$ doivent être fonctions linéaires des $V_{j,k}$

$$F_{j,k} = a_{j,k} V_{j,k} + b_{j,k}$$

les coefficients $a_{j,k}$ et $b_{j,k}$ étant fonctions des invariants du tenseur $V_{j,k}$ Dans les équations de NAVIER (pour un fluide incompressible), on admet que ces coefficients sont des constantes.

Peut-être cette hypothèse restrictive supplémentaire n'est-elle qu'une approximation, suffisamment exacte pour les petites valeurs des $V_{j,k}$, mais insuffisante lorsque les $V_{j,k}$ deviennent très grands, ce qui serait précisèment le cas dans les écoulements turbulents

Si, logiquement, la position des équations de NAVIER était, un jour, rendue intenable, il y aurait là une intéressante possibilité de retouche qui devrait, semble-t-il, précéder un rejet complet de l'hypothèse générale de G. STOKES et de A. BARRÉ DE SAINT VENANT.

CHAPITRE I

Les équations de NAVIER et l'équation de la chaleur.

1 - Sur la définition d'intégrale d'une équation différentielle.

Nous voudrions tout d'abord attirer l'attention sur la remarque suivante: on ne peut faire oeuvre utile, tant que l'on se contente de parler, en termes vagues, d' "intégrales" des équations de **NAVIER**; ce mot est susceptible de bien des sens différents; selon le sens choisi, les propriétés essentielles de la théorie se modifient, spécialement les *théorèmes d'existence et d'unicité* qui, vrais avec une définition des "intégrales", deviennent faux avec une autre.

Pour s'en convaincre, il suffit de se souvenir de deux exemples élémentaires:

a) Pour une équation différentielle aussi simple que:

[1] $$dy/dx = f(x)$$

le mot "intégrale" a reçu toute une gamme de sens différents; rappelons en au moins deux. Si $f(x) \in C[o,a]$ il existe dans $[o,a]$ une et une seule "intégrale" $y(x)$ telle que $y(0) = 0$, donnée par l'intégrale de **RIEMANN**:

$$y(x) = \int_0^x f(\xi)\,d\xi \quad ;$$

mais, si $f \in L[o,a]$, la même intégrale, prise au sens de **LEBESGUE**, pourra encore s'appeler "intégrale" de l'équation [1] si on consent à ce que [1] ne soit plus vérifiée, en tout point $x \in [o,a]$, comme dans le premier cas, mais seulement presque partout.

b) Le théorème d'unicité de **CAUCHY** pour le mouvement à una dimension d'un point matériel:

[2] $$d^2x/dt^2 = X(x)$$

suppose essentiellement que les forces X sont analytiques en x. Si l'on considère une fonction non-analytique pour $x = 0$, aussi simple que:

$$X = +\sqrt{|x|}$$

les deux mouvements, définis pour $t \geq 0$ par

$$x(t) = 0$$

$$x(t) = \frac{t^4}{144}$$

correspondent tous deux aux memês conditions initiales:

$$x(0) = x'(0) = 0 .$$

L'introduction de forces non-analytiques suffit pour détruire le déterminisme dans la Mécanique du point.

2 - Les équations de NAVIER et l'équation de la chaleur.

On sait depuis longtemps, que toute intégrale $u(x,t)$ de l'équation de la chaleur:

[3] $$u_t = u_{xx}$$

fournit une intégrale des équations de NAVIER, en posant:

[4] $$u_1 = u(x_2, t) \ , \ u_2 = u_3 = 0 \ , \ p = p_0 \ ;$$

cette intégrale définit un mouvement du fluide, en l'absence de force extérieure $X_j = 0$; les plans parallèles à Ox_1x_3 glissent les uns sur les autres se déplaçant en bloc, les trajectoires des particules étant des droites parallèles à Ox_1 (shear flow).

On peut tirer de cette remarque élémentaire un critère [49] qui met au service de l'étude des équations de NAVIER, la somme, considérable aujourd'hui, des connaissances acquises sur l'équation de la chaleur.

Chaque fois que l'on se propose, en effet, de démontrer un théorème affirmant que toute intégrale des équations de NAVIER possédant les propriétés $A, B, C, \ldots$ possède nécessairement la propriété P, il suffit de vérifier si, pour une intégrale de l'équation de la chaleur, les propriétés $A, B, C, \ldots$ impliquent toujours la propriété P; si ce n'est pas le cas, on est certain que le théorème est faux et il est inutile de s'acharner à sa démonstration.

Bien entendu, le critère ne fonctionne pas en sens inverse:

Si l'on a prouvé que pour toute intégrale de l'équation de la chaleur les propriétés $A, B, C, \dots$ impliquent une propriété P, il n'en résulte nullement que la même implication soit vraie pour toute intégrale des équations de NAVIER; on peut soupçonner que la présence des termes non-linéaires, disparus dans l'équation de la chaleur et présents dans les équations de NAVIER, bouleverse complètement les rapports logiques entre les propriétés $A, B, C, \dots$ et P; tout ce que l'on peut tirer du critère dans ce sens, c'est que si le théorème $A \cap B \cap \dots \Rightarrow P$ est vrai pour les intégrales de l'équation de la chaleur, la voie reste ouverte pour en chercher la démonstration pour les équations de NAVIER.

Du point de vue de la logique formelle, il est intéressant de noter que *des deux termes de l'alternative:*

Pour l'équation de la chaleur

$$A \cap B \cap C \dots \Rightarrow P$$
$$A \cap B \cap C \quad \not\Rightarrow P ,$$

c'est le second seul, qui fait progresser définitivement nos connaissances sur les intégrales des équations de NAVIER, le premier ouvrant la porte à una simple possibilité, tres éloignée de la certitude.

Rappelons, à titre d'illustration, quelques théorèmes de la théorie de l'équation de la chaleur:

(a) P. HARTMAN et A. WINTNER [24] ont établi:

Etant donné un domaine ouvert D dans le plan (x,t), si:

(A) $u(x,t) \in C(D)$

(B) u_t et u_{xx} *existent en tout point de* D

(C) $u_t = u_{xx}$ *en tout point de* D

alors

(P) $u(x,t) \in C^{\infty}(D)$

(b) E. HOLMGREN [32] a démontré:

Etant donné un domaine ouvert D dans le plan (x,t), si:

(A) $u(x,t) \in C(D)$

(B) $u_t(x,t)$, $u_x(x,t)$, $u_{xx}(x,t) \in C(D)$

(C) $u_t = u_{xx}$ *en tout point de* D

alors

(P) $u(x,t)$ *est analytique en* x *sur tout segment parallèle à* Ox *contenu dans* D.

(c) E. HOLMGREN [32] a démontré que:

Etant donné un domaine ouvert D *dans le plan* (x,t), *les propositions:*

(A) $u(x,t) \in C(D)$

(B) $u_t(x,t)$, $u_x(x,t)$, $u_{xx}(x,t) \in C(D)$

(C) $u_t = u_{xx}$ *en tout point de* D

n'impliquent pas:

(P) $u(x,t)$ *est une fonction analytique de* t *sur tout segment parallèle à* Ot *contenu dans* D.

Les théorèmes (a) et (b) appartiennent au type: $A \cap B \cap \ldots \Longrightarrow P$; on n'en peut donc conclure rien de certain concernant les équations de NAVIER; le théorème (b) montre seulement que l'on pourrait chercher à démontrer la proposition suivante (dont l'importance n'a pas besoin d'être soulignée).

Etant donné un domaine ouvert D *dans l'espace* (x_1, x_2, x_3, t) *si*

(A) $u_j(x,t)$, $p(x,t) \in C(D)$

(B) $\dfrac{\partial u_j}{\partial t}$, $\dfrac{\partial u_j}{\partial x_k}$, $\dfrac{\partial^2 u_j}{\partial x_k^2}$, $\dfrac{\partial p}{\partial x_j} \in C(D)$

(C) $u_j(x,t)$ et $p(x,t)$ *satisfont les équations de NAVIER* (N_j) *en tout point de* D

alors

(P) $u_j(x,t)$ *et* $p(x,t)$ *sont analytiques en* (x_1, x_2, x_3) *en tout point du domaine* D *continu dans un plan* $t =$ Constante.

Par contre le théorème (c) est du type $A \cap B \cap \ldots \not\Rightarrow P$; il en découle immédiatement ce résultat fondamental pour les équations de NAVIER:

Etant donné un domaine ouvert D dans l'espace (x_1, x_2, x_3, t) les propositions:

(A) $u_j(x,t)$, $p(x,t) \in C(D)$

(B) $\dfrac{\partial u_j}{\partial t}$, $\dfrac{\partial u_j}{\partial x_k}$, $\dfrac{\partial^2 u_j}{\partial x_k^2}$, $\dfrac{\partial p}{\partial x_j} \in C(D)$

(C) *$u_j(x,t)$ et $p(x,t)$ satisfont les équations de NAVIER (N_j) en tout point de D*

n'impliquent pas:

(P) *$u_j(x,t)$ et $p(x,t)$ sont analytiques en t en tout point du domaine D contenu dans un plan $x_1 = C^{te}$, $x_2 = C^{te}$, $x_3 = C^{te}$.*

G. DOETSCH [15] a donné de nombreux exemples d'intégrales de l'équation de la chaleur non analytiques en t ; M. GEVREY, - dont les recherches dans ce domaine restent fondamentales encore aujourd'hui [21], [22] - a démontré que les intégrales non analytiques en t peuvent même ne pas être quasi-analytiques, au sens de CARLEMAN; les recherches précédentes concernent surtout le cas d'une demi-bande $B = \{(x,t) : a < x < b, 0 < t < +\infty\}$; A. TYCHONOFF [94] a donné un exemple d'intégrales non-analytiques en t dans le demi-plan $D = \{(x,t) : -\infty < x < +\infty , 0 < t < +\infty\}$.

Voici un exemple, dû à G. DOETSCH, don la traduction dans le langage de la Mécanique des fluides, rend intuitives les raisons d'existence d'intégrales non analytiques en t des équations de NAVIER.

Prenons comme domaine la demi-bande:

$$B = \{(x,t) : 0 < x < a , 0 < t < +\infty\}$$

En désignant par τ un nombre positif arbitraire, la fonction:

$$[5] \qquad \begin{aligned} u(x,t) &= 0 && 0 < t \leq \tau \\ &= x(t-\tau)^{-\frac{3}{2}} \exp\left[-\frac{x^2}{4(t-\tau)}\right] && \tau < t < +\infty \end{aligned}$$

satisfait (A), (B), (C) et n'est analytique en t sur aucune des droites $x = x_0$, $0 < x_0 < a$. La traduction de cet exemple dans le langage de la Mécanique des fluides est immédiate: le fluide (qui, par hypothèse, se meut par plans parallèles à Ox_1x_3), est contenut entre deux plaques planes $x_2 = 0$, $x_2 = a$; la plaque $x_2 = 0$ est maintenue constamment fixe; la plaque $x_2 = a$, restée immobile pendant l'intervalle $0 < t \leq \tau$, prend pour $t > \tau$ une vitesse égale à $a(t-\tau)^{-\frac{3}{2}} \exp\left[-\frac{a^2}{4(t-\tau)}\right]$; le fluide n'a aucun moyen de *prévoir* le mouvement que nous appliquerons à cette plaque; cette impossibilité de prévision implique que la vitesse du fluide $u_2(x,t)$ dans un intervalle $0 < t < \theta$ ne prédétermine nullement le prolongement de cette vitesse dans l'intervalle $\theta \leq t < +\infty$; la fonction de t , qui définit $u_2(x,t)$ ne saurait donc être analytique en t .

Contentons-nous pour le moment de noter que *l'existence d'intégrales des équations de NAVIER, non analytiques en* t (qui ne sont même pas quasi-analytiques en t, au sens de CARLEMAN) *est peut-être grosse de conséquences, jusqu'ici malheureusement inexploitées, dans l'étude des circonstances qui président aux mouvements turbulents d'un fluide.*

3 - Propriétés des solutions de l'equation de la chaleur.

Les liens que nous venons de souligner entre l equation de la chaleur et les équations de NAVIER, nous préparent à mieux comprendre l'urgence de fixer avec précision la définition des integrales; en effet, pour l'équation de la chaleur, on dispose à l'heure actuelle, d'un matériel mathématique d'une telle richesse, que l'on possède non seulement une, mais même plusieurs théories complètes: elles diffèrent l'une de l'autre, précisément, par la définition d'une "intégrale" La comparaison de ces théories entre elles nous fournit, en quelque sorte, une illustration expérimentale de l'influence du choix de cette définition En réfléchissant à cette multiplicité des théories de l équation de la chaleur, nous touchons du doigt la différence essentielle entre les Mathématiques et la Physique théorique; pour le Mathématicien les théories (A), (B), (C) .

de l'équation de la chaleur, puisqu'elles sont logiquement cohérentes, sont aussi valables l'une que l'autre; le Physicien au contraire, sera conduit à en choisir une; celle dont les théorèmes (T_1), (T_2) ... (T_n) conduisent à un accord d'ensemble avec les faits expérimentaux; seul cet accord, en bloc, de la théorie avec l'expérience, est discriminant; on ne peut admettre ou rejeter a priori telle prémisse, comme des dames qui choisiraient des chapeaux chez la modiste: l'une déteste le rose, l'autre n'aime que le bleu... Ainsi entend-t-on dire, parfois, qu'il faut exclure les fonctions non bornées, ou n'admettre que des fonctions analytiques, etc... L'expression de ces "gouts" mathématiques n'est-elle pas un peu futile? Seule la comparaison de l'ensemble des conséquences logiques d'une théorie avec l'expérience nous convaincrait en dernier ressort de la supériorité de l'un des choix.

Ayant souligné leur valeur analogique pour la Mécanique des fluides, esquissons maintenant quelques unes des théories de l'intégration de l'équation de la chaleur:

[3] $$u_t = u_{xx}$$

dans une barre indéfinie $-\infty < x < +\infty$, lorsqu'on suppose donnée la température initiale $v(x)$. Dans ce paragraphe nous désignerons par:

[6] $$D = \{(x,t) : -\infty < x < +\infty,\ 0 < t < +\infty\}$$

le demi-plan ouvert et par:

[7] $$\overline{D} = \{(x,t) : -\infty < x < +\infty,\ 0 \leq t < +\infty\}$$

le demi-plan semi fermé.

Les différentes théories se distinguent les unes des autres par:

(α) la classe des fonctions réelles $v(x)$, définies pour $-\infty < x < +\infty$, admises pour représenter la température initiale;

(β) la classe des fonctions réelles $u(x,t)$, définies dans D, admises pour representer une intégrale;

(γ) le sens précis donné à la phrase: $u(x,t)$ prend la valeur $v(x)$ pour $t = 0$.

C' est seulement quand ces trois choix sont faits que l'on peut édifier une théorie. Il est curieux de constater que, depuis le mémoire initial de FOURIER (1822), les contributions essentielles de FOURIER lui-même, de POISSON, de LAPLACE, de Lord RAYLEIGH, de J. BOUSSINESQ aient fourni tant de méthodes ingénieuses et profondes de construction d'expression analytiques donnant des intégrales, sans que jamais ces questions (α), (β), (γ) ne se soient posées: c'est seulememt au début de ce siècle, entre 1900 et 1920, que les travaux de E.HOLMGREN, de M.GEVREY, de F.GOURSAT, de J.HADAMARD [23] ont souligné la nécessité de "bien poser le problème" en se plaçant dans des conditions, où l'on puisse établir non seulement *un théorème d'existence,* mais encore, *un théorème d'unicité.* En 1936, dans son exposé historique, G.DOETSCH [15] a eu le grand mérite d'attirer fortement l'attention sur ce point:

"Pour que le problème soit clairement posé, il est indispensable d'un part de préciser quelles conditions on impose à la solution et aux valeurs sur la frontière, de fixer, d'autre part, le sens dans lequel les conditions aux limites doivent être interpretées.

"Il est à regretter qu'une partie même de la littérature moderne, pour ne plus parler de la plus ancienne, reste extrêmement vague sous ce rapport. Ceci entraine d'une part, que les théorèmes et démonstrations sont faux eux-mêmes, d'autre part, que des théorèmes, justes sous certaines restrictions, sont employés dans des cas où ces restrictions ne sont pas respectées. Ce sont surtout les démonstrations d'unicité qui montrent la gravité décisive du sens dans lequel on envisage le problème aux limites".

Une revue rapide de quelques unes des théories de l'équation de la chaleur, basées chacune sur une réponse précise aux questions (α), (β) et (γ), nous semble éclairer très heureusement les directions diverses que pourraient prendre des recherches sur les intégrales des équations de NAVIER.

(A) On considère comme valeurs initiales possibles les fonctions $v(x)$ satisfaisant simultanément à:

$$(\alpha) \qquad v(x) \in C(-\infty, +\infty) \quad \text{et} \quad v(x) \in L(-\infty, +\infty)$$

On choisit comme définition des mots "prendre la valeur initiale" la *limite à deux dimensions* dans le plan:

$$(\gamma) \qquad \lim_{x \to a,\, t \to 0} u(x,t) = v(a)$$

Ceci impose évidemment:

$$(\beta_1) \qquad u(x,t) \quad C(\bar{D})$$

Si l'on ajoute les conditions:

$$(\beta_2) \qquad u_t(x,t) \ , \ u_{xx}(x,t) \in C(D)$$

$$(\beta_3) \qquad \sup_{0 < t < +\infty} |u(x,t)| \leq M e^{ax^2} \qquad a > 0,$$

on obtient alors le théorème de TYCHONOFF [94]:

Si $v(x)$ satisfait à (α), l'intégrale de POISSON-FOURIER:

[8] $$u(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} k(x-\xi,t)\, v(\xi)\, d\xi$$

$$k(x,t) = (4\pi\nu t)^{-\frac{1}{2}} \exp\left[-\frac{x^2}{4\nu t}\right] ,$$

représente dans D une intégrale de l'équation de la chaleur: c'est la seule qui vérifie les conditions (β_1), (β_2), (β_3) et (γ).

(B) On suppose:

$$(\alpha) \qquad v(x) \in L(-\infty, +\infty)$$

et on dit que $u(x,t)$ prend la valeur initiale $v(x)$, si $u(x,t)$ tend *faiblement* vers $v(x)$, c'est a dire si:

$$(\gamma) \qquad \lim_{t \downarrow 0} \int_a^b u(x,t)\, g(x)\, dx = \int_a^b v(x)\, g(x)\, dx$$

pour tout intervalle fini $[a,b]$ et toute fonction $g(x) \in C[a,b]$.

On impose a $u(x,t)$ les conditions suivantes:

(β_1) $u_t(x,t)$ et $u_{xx}(x,t)$ existent en tout point du demi-plan D

(β_2) $u(x,t)$, $u_t(x,t)$ et $u_{xx}(x,t) \in L(\Delta)$ dans tout rectangle fini $\Delta \subset D$

(β_3) il existe une constante $a > 0$ et deux suites x'_n, x''_n , $x'_n \to +\infty$, $x''_n \to -\infty$, telles que:

$$\sup_{0 < t < +\infty} |u(x,t)| \leq M e^{ax^2}$$

pour tout x appartenant à l'une ou l'autre des deux suites. Alors (J.L.B. COOPER [14]):

Si $v(x)$ satisfait à (α), l'intégrale de POISSON-FOURIER [8] est une intégrale de l'équation de la chaleur; elle est la seule vérifiant les conditions (β_1) , (β_2) , (β_3) et (γ).

(C) La formulation suivante, plus abstraite, due à E. HILLE [25], [26], [27], conduit à considérer $v(x)$ et $u(x,t)$ (pour chaque $t > 0$) comme des points d'un même espace fonctionnel, constituant un espace de Banach $\mathfrak{B}$; c'est sans doute la mieux adaptée à la transposition dans le langage de la Mécanique statistique; quand t varie de 0 a $+\infty$, le point $\omega_t = u(x,t)$ décrit une trajectoire Γ issue du point $\omega = v(x)$; l'espace de Banach $\mathfrak{B}$ joue ainsi le rôle d'un "espace des phases", où un point ω représente un état du système. On suppose:

(α) $$v(x) \in \mathfrak{B}$$

Nous designerons par $\|v\|$ la norme de $v(x)$; nous supposerons:

(β_1) $$u(x,t) \in \mathfrak{B}, \quad \text{pour tout} \quad t > 0$$

et nous donnerons à "$u(x,t)$ prend la valeur initiale $v(x)$" le sens d'une *limite forte*:

(γ) $$\lim_{t \downarrow 0} \|u(x,t) - v(x)\| = 0$$

Supposons encore que u admette une derivee u_t au sens fort, continue au sens fort:

(β_2) $$u_t(x,t) \in \mathfrak{B} \quad \text{pour tout} \quad t > 0$$

$$(\beta_3) \quad \lim_{h\to 0} \left\| \frac{u(x,t+h)-u(x,t)}{h} - u_t(x,t) \right\| = 0 \quad \text{pour tout} \quad t>0$$

$$(\beta_4) \quad \lim_{h\to 0} \|u_t(x,t+h)-u_t(x,t)\| = 0 \ , \quad \text{pour tout} \quad t>0 \ .$$

E. HILLE appelle *problème abstrait de CAUCHY,* le problème qui consiste, étant donnée une valeur initiale $v(x)$ satisfaisant (α), à trouver une intégrale de l'équation de la chaleur satisfaisant (β_1), (β_2), (β_3), (β_4) et prenant la valeur initiale au sens (γ), puis à prouver que cette intégrale est unique.

E. HILLE a résolu [28] le problème dans le cas où l'espace de Banach est l'ensemble de toutes les fonctions $f(x)$ telles que:

$$f(x) \exp\,[-|x|^\rho] \qquad\qquad (\rho \geq 0 \ \text{donné})$$

soit continue dans l'intervalle fermé $[-\infty, +\infty]$. Cet ensemble constitue un espace de Banach $\mathfrak{B}$, si on le munit de la norme:

$$\|f\| = \sup_{-\infty \leq x \leq +\infty} |f(x) \ \exp\,[-|x|^\rho]$$

Lorsque $0 \leq \rho \leq 1$, *si* $v(x) \in \mathfrak{B}$ *l'intégrale de POISSON - FOURIER* [8] *donne une solution du problème abstrait de CAUCHY et cette solution est unique.*

Lorsque $1 < \rho \leq 2$, *si la fonction* $u(x,t)$, *définie par l'intégrale de POISSON-FOURIER, appartient à* $\mathfrak{B}$ *pour tout* $t > 0$, *elle donne la solution unique du problème abstrait de CAUCHY; mais il y a des* $v(x)$ *pour lesquelles* $u(x,t) \in \mathfrak{B}$ *pour aucun* $t > 0$; *dans ce cas, le problème n'a pas de solution.*

Enfin lorsque $\rho > 2$, *si* $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) \exp\,[-|x|^\rho] \neq 0$ *l'intégrale de POISSON-FOURIER n'a de sens pour aucun* $t > 0$; *l'existence de solutions du problème abstrait de CAUCHY est douteuse; il peut exister des solutions non nulles telles que:*

$$\lim_{t\downarrow 0} \|u(x,t)\| = 0 \ .$$

Sans une formulation précise et générale du problème abstrait de CAUCHY, des résultats analogues, très intéressants, avaient déjà été obtenus par S. BOCHNER et CHANDRASEKHARAN [8] pour le cas des espaces de Banach $L(-\infty, +\infty)$ et $L^2(-\infty, +\infty)$, spécialement importants.

4 - Paradoxes de la mécanique des fluides.

Les théories (A), (B) et (C) sont intéressantes parce que, dans chaque cas, on a pu prouver un théorème d existence et un théorème d'unicité; une bonne théorie doit ainsi être basée sur des prémisses (α), (β) et (γ), assez larges pour que des intégrales puissent exister et suffisamment étroites pour que leur unicité soit garantie; il y à la une sorte de compromis, délicat à réaliser, auquel il faut prendre garde et qui explique certains paradoxes fréquemment rencontrés en Mécanique des fluides.

Pour en donner un exemple, considérons le mouvement plan d'un fluide visqueux incompressible, ou les trajectoires sont des circonférences ayant l'origine O pour centre. Utilisons des coordonnées polaires (r, θ) et désignons par $\zeta(r,t)$ le tourbillon qui est, comme on le sait, perpendiculaire au plan du mouvement. Des calculs classiques permettent de déduire des équations de NAVIER que $\zeta(r,t)$ doit être une solution de l'équation de la chaleur en coordonnées polaires:

[9] $$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{\nu}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \zeta}{\partial r}\right).$$

Pour étudier la diffusion du tourbillon par la viscosité, on considère une intégrale de [9] qui "prend comme valeur" une fonction donnée $\omega(r)$ à l'instant $t = 0$. Si l'on choisit la double limite dans le plan (r,t):

(γ) $$\lim_{r\to a,\, t\to 0} \zeta(r,t) \quad \omega(a)$$

il est parfaitement possible de construire une theorie analogue à (A), possédant un theorème d'existence et d unicite Mais on écarte, du même coup, le cas ou $\omega(r)$ est discontinue, c est-à-dire de nombreux problèmes etudies dans tous les traites de Mecanique des fluides; par exemple:

(a) noyau tourbillonnaire d'intensité constante ω_0 :

$$\omega(r) = \omega_0 \qquad 0 \leq r \leq a$$
$$= 0 \qquad r > a$$

(b) tourbillon ponctuel de circulation Γ_0 :

$$\omega(r) = 0 \qquad r \neq 0 \quad .$$

Pour obtenir des solutions à ces problèmes, on élargit (γ) en remplaçant la double limite par *une limite à* r *constant:*

$$(\gamma') \qquad \lim_{t \downarrow 0} \zeta(r,t) = \omega(r) \quad \text{pour tout} \quad r$$

(on place un instrument de mesure en un point fixe du plan et on étudie la limite de la courbe enregistrée lorsque $t \downarrow 0$).

Dams le cas du tourbillon ponctuel, on donne en général l'intégrale:

$$[10] \qquad \zeta(r,t) = \frac{\Gamma_0}{8\pi\nu t} \exp\left[-\frac{r^2}{4\nu t}\right]$$

qui est continue dans le domaine:

$$\Delta = \{(r,t) : 0 \leq r < +\infty \,,\; 0 < t < +\infty\}$$

où elle satisfait l'équation de la chaleur.

Mais si l'on ne prend pas de précautions supplémentaires, on risque de perdre l'unicité; en effet la dérivée par rapport à t de la fonction [10] satisfait évidemment [9]; donc K désignant une constante arbitraire, la fonction:

$$[11] \qquad \zeta(r,t) = \left[\frac{\Gamma_0}{8\pi\nu t} + \frac{K}{t^2}\left(\frac{r^2}{4\nu t} - 1\right)\right] \exp\left[-\frac{r^2}{4\nu t}\right]$$

est également une intégrale de [9] définie dans le même domaine que [10]

La circulation Γ qui lui correspond a pour valeur:

$$\Gamma(r,t) = \Gamma_0 - \left[\Gamma_0 + 2\pi K \frac{r^2}{t^2}\right] \exp\left[-\frac{r^2}{4\nu t}\right]$$

et on a, pour [11] comme pour [10]:

$$[12] \quad \begin{cases} \lim\limits_{t \downarrow 0} \zeta(r,t) = 0 & r > 0 \\ \lim\limits_{t \downarrow 0} \Gamma(r,t) = \Gamma_0 & r > 0 \\ \qquad\qquad = 0 & r = 0 \end{cases} .$$

Les deux intégrales [10] et [11] sont toutes deux continues ainsi que toutes leurs dérivées partielles dans le domaine Δ; elles sont du même type, non bornées au voisinage du point $r = 0$, $t = 0$; elles satisfont toutes deux aux conditions du problème exprimées par [12]; pour préférer l'une à l'autre, c'est à dire pour conserver l'unicité, il faudrait donc introduire des conditions supplémentaires; si on les omet, les conclusions qu'on en tire perdent beaucoup de valeur, puisqu'il n'y a plus de raison de préférer l'intégrale [10] à l'intégrale [11].

5 - Nécessité d'un théorème d'existence et unicité pour les équations de Navier.

Pour l'étude des intégrales des équations de NAVIER, dans le cas général, rien de comparable aux exemples (A), (B), (C) du § 3 n'existe à l'heure actuelle; on est très loin de connaître l'influence de prémisses équivalentes à (α), (β) et (γ), sur la possibilité d'établir un théorème d'existence et d'unicité.

Dans le cas du fluide incompressible, sans frontières, remplissant tout l'espace, nous possédons, il est vrai, les recherches tres importantes et tres profondes de J.LERAY [78]; mais elles sont, malheureusement, inutilisables comme point de départ d'une étude de la turbulence homogene; en voici les raisons.

La force vive du fluide contenu dans un domaine B de l'espace:

$$\frac{\rho}{2}\int_B \sum_k u_k(x,t)^2 dx$$

s'introduisant naturellement dans tout problème de Mécanique des fluides, on doit nécessairement supposer que cette intégrale a un sens, c'est à dire que $u_j(x,t) \in L^2(B)$, pour tout domaine fini B; A tout instant $t > 0$, cette condition est, bien entendu, satisfaite si nous imposons la condition plus forte $u_j(x,t) \in C(B)$; par contre, à l'instant initial, nous avons le choix, et c'est une hypothèse que de poser:

(α) $\qquad v_j(x) \in L^2(B) \quad , \qquad$ pour tout B fini .

Mais J.LERAY va plus loin: il postule que *la force vive totale du fluide est finie*, c'est à dire qu'il choisit comme prémisses:

(α) $\qquad v_j(x) \in L^2(R^3)$

(β) $\qquad u_j(x,t) \in L^2(R^3) \qquad$ pour tout $t > 0$

$$R^3 = \{x : -\infty < x_j < +\infty \ , \ j = 1,2,3\} .$$

Autrement dit, en adoptant le langage de l'exemple (C), il *opère constamment dans un espace de Hilbert*; à chaque instant les propriétés de l'espace de Hilbert interviennent dans ses démonstrations. Or la notion de turbulence homogène s'oppose à considérer la force vive totale comme finie; des fonctions $u_j(x,t)$, périodiques en x, doivent pouvoir entrer, comme cas particulier, dans le cadre général des champs de vecteurs spatialement homogènes; dans ce cas, l'intégrale:

$$\int_{R^3} u_j(x,t)^2 dx$$

ne saurait être finie.

Si l'on ne fait aucune autre hypothèse, que l'existence de la force vive pour tout domaine B fini, l'ensemble des champs de vitesses, correspondant à une turbulence homogène, constitue un espace fonctionnel appartenant à la catégorie des *espaces de* G.MACKEY. La topologie de ces espaces se définit, non à partir d'une *norme* (comme dans les espaces de Banach, dont l'espace de Hilbert est l'exemple le plus simple), mais à partir d'une famille de *pseudo-normes*; il est naturel de prendre ici les boîtes cubiques:

$$B_N = \{x : -N \leq x_j \leq N \ , \ j = 1,2,3\}$$

et l'on considérera comme famille de pseudo-normes du champ de vecteurs