CIME Summer Schools

F. Severi (Ed.)

Teorema di Riemann-Roch e questioni connesse

4

Varenna, Italy 1955

Springer

FONDAZIONE CIME ROBERTO CONTI

F. Severi (Ed.)

Teorema di Riemann-Roch e questioni connesse

Lectures given at the
Centro Internazionale Matematico Estivo (C.I.M.E.),
held in Varenna (Como), Italy,
June 29-July 8, 1955

Springer

FONDAZIONE
CIME
ROBERTO CONTI

C.I.M.E. Foundation
c/o Dipartimento di Matematica "U. Dini"
Viale Morgagni n. 67/a
50134 Firenze
Italy
cime@math.unifi.it

ISBN 978-3-642-10888-4 e-ISBN: 978-3-642-10889-1
DOI:10.1007/978-3-642-10889-1
Springer Heidelberg Dordrecht London New York

Reprint of the 1st ed. C.I.M.E., Florence, 1955
With kind permission of C.I.M.E.

Printed on acid-free paper

Springer.com

CENTRO INTERNATIONALE MATEMATICO ESTIVO
(C.I.M.E)

Reprint of the 1st ed.- Varenna, Italy, June 29-July 8, 1955

TEOREMA DI RIEMANN-ROCH E QUESTIONI CONNESSE

B.L. VAN DER WAERDEN

(I corso di Varenna-29 giugno-8luglio 1955)

DEMONSTRATION ALGEBRIQUE

DU

THEOREME DE RIEMANN-ROCH

Roma-Istituto Matematico dell'Università 1955-ROMA

DEMONSTRATION ALGEBRIQUE DU THEOREME DE RIEMANN-ROCH

Lection 1.

INTRODUCTION.

Il y a trois points de vue, trois manières de formuler et de démontrer le Théorème de Riemann-Roch, savoir:

I- le point de vue de la Théorie des fonctions.

II- le point de vue de l'algèbre.

III- celui de la géométrie algébrique.

I. Dans la théorie des fonctions; le point de départ est une surface de Riemann ou Riemannienne close. Les fonctions méromorphes sur la Riemannienne forment un corps de fonctions K. Si z_1 est une de ces fonctions, toutes les autres sont des fonctions algébriques de z_1.

II. Dans la théorie algébrique, le point de départ est un corps $K=k(z_1,\ldots,z_r)$, où k est un corps de constantes arbitraire, et où tous les générateurs $z_1,\ldots,z_r$ sont des fonctions algébriques d'un entre eux, qui n'est pas algébrique par rapport à k.

III. Si on ajoute à $z_1,\ldots,z_r$ une coordonnée homogène $z_0=1$, on obtient un point générique $(z_0,\ldots,z_r)$ d'une courbe algébrique (dans l'espace projectif S_r. Les points de la courbe sont les spécializations du point générique. Le corps K est le corps des fonctions rationelles sur la courbe:

$$u=\frac{F(z_0,\ldots,z_r)}{G(z_0,\ldots,z_r)}$$

où F et G sont des formes du même degré.

On peut passer directement de la Riemannienne à la courbe C. Soient $z_0,\ldots,z_r$ des fonctions méromorphes sur la Riemannienne, et

soit P un point de la Riemannienne. Dans l'entourage de P, les fonctions $z_0,\dots,z_r$ peuvent être développées en séries de puissances de la variable locale t.
Si quelques-unes de ces fonctions ont un pôle à P, on multiplie toutes ces séries par une puissance t^a de sorte que les séries $t^a z_0,\dots,t^a z_r$ ne contiennent pas de termes négatives:

$$t^a z_i = b_i + c_i t + d_i t^2 + \cdots$$

et que les b_i ne sont pas tous zéro.
Alors, en posant t=0, on obtient un point $(b_0,b_1,\dots,b_r)$ de la courbe C.
Donc: A chaque point P de la Riemannienne correspond un seul point de la courbe C.

Il peut se passer qu'un point de la courbe correspond à plusieurs points de la Riemannienne. Pour éviter cela, on construit un modèle C' de la courbe C sans points multiples dans un espace $S_{r'}$. Alors chaque point de C' correspond à un seul point de la Riemannienne.

Qu'est-ce qui correspond, dans la théorie algébrique, aux points P de la Riemannienne ou de la courbe C'?

Ce sont les valuations du corps K.

Partons d'un point P de la Riemannienne . Chaque fonction u a un certain ordre à P: l'ordre est positif pour un zéro de la fonction et negatif pour un pôle. L'ordre est simplement le premier exposant dans le développement de la fonction u.
Cet ordre o(u) a les propriétés suivantes:

(1) o(u) est un entier, excepté $o(0)=\infty$

(2) $o(uv) = o(u)+o(v)$

(3) $o(u+v) \geqslant \mathrm{Min}\,(ou,ov)$

(4) o(c)=0 si c est une constante $\neq 0$.

Une application o de K ayant les propriétés (1)-(4), est appelée une valuation discrète du corps de fonctions K.

Nous avons vu qu'à chaque point P de la Riemannienne correspond une valuation o_P. Aussi à chaque point P' non générique de la courbe C' correspond une valuation, définie comme suit. Soit

$$u = \frac{F(z_0, \cdots, z_{r'})}{G(z_0, \cdots, z_{r'})}$$

une fonction de K et soient a et b les multiplicités d'intersection des hypersurfaces F et G avec C' à P'. Alors

$$o(u) = a - b$$

a les propriétés (1)-(4). Si P' et P" sont algébriquement conjugés par rapport à k,les valuations correspondant à P' et P" sont les mêmes. Dons: A chaque groupe de points conjugés par rapport à k correspond une valuation o du corps K.

On peut démontrer qu'on obtient ainsi toutes les valuations discrètes de K.

Les valuations o , qui jouent, dans la théorie algébrique, le même rôle que les points de la Riemannienne ou du modèle C' jouent dans les autres théories,seront appelés places du corps K et dénotés par P,Q, etc.

Pour chaque place P, les fonctions u à valeur non négatifs forment un anneau E_P, l'anneau de la valuation, et les u à valeur positive forment un ideal I_P dans cet anneau, l'idéal de la valuation. L'anneau résiduel E_P/I_P est un corps fini sur k, le corps résiduel k_P de la valuation. Si k est algébriquement fermé, on a toujours k_P=k.

Le degré f d'une place P est le degré du corps de résidus k_P par rapport à k. Si $v_1,\ldots,v_f$ forment une base de k_P, les éléments de k_P sont $c_1v_1+\ldots+c_fv_f$. Les v_i sont des classes de résidus, mais j'indiquerai par le même symbole des fonctions v_i représentant ces classes.

Soit P une place et π une fonction de valeur minimale positive. En divisant tous les o(u) par $o(\pi)$, on peut supposer $o(\pi)=1$.

Alors, si f=1, chaque fonction u peut être développée en série de puissances formelles

$$u = c_{-s}\pi^{-s} + \dots + c_0 + c_1\pi + \dots \tag{1}$$

Si $f > 1$, on a au lieu de (1)

$$u = \sum_{\nu=-s}^{\infty} \left(c_{\nu 1} v_1 + \dots + c_{\nu f} v_f\right)\pi^{\nu} \tag{2}$$

Les séries (1) et (2) correspondent aux séries classiques

$$u = c_{-s} t^{-s} + \dots + c_0 + c_1 t + \dots \tag{3}$$

<u>Diviseurs</u>. Si on assigne, à un nombre fini de places P, des exposants entiers e , on obtient un <u>diviseur</u>

$$D = \prod P^e$$

Par exemple, les P peuvent être les zéros et pôles d'une fonction u, chacun avec sa propre multiplicité e=o(u). Alors $D=\prod P^e$ est appelé <u>le diviseur de u</u> et on écrit D=(u).

Le produit de deux diviseurs est formé par l'addition des exposants:

$$\prod P^d \cdot \prod P^e = \prod P^{d+e}$$

Si $D=\prod P^e$, on définit $D^{-1}=\prod P^{-e}$. Une fonction u est <u>multiple</u> de D^{-1}, si on a $o(u) \geq -e$ pour les places P qui entrent dans le produit , $o(u) \geq 0$ pour les autres places.

Le <u>degré</u> n(D) du diviseur $D=\prod P^e$ est défini comme

$$n(D) = \sum ef$$

où f est le degré de P.

Le problème qui conduit au théorème de Riemann-Roch est: Combien de fonctions u linéairement indépendants existent, qui sont des multiples d'un diviseur D^{-1} donné? La réponse est donnée par la formule bien connue

$$(D) = n(D) - g+i(D)+1$$

où g est le genre de la courbe et i(D) l'indice de spécialité du diviseur D.

Pour traduire ce problème dans le language de la géométrie algébrique, on représente les fonctions u comme quotients de formes du même degré

$$u_\lambda = \frac{F_0\lambda_0 + \cdots + F_r\lambda_r}{G}$$

et la question se réduit à l'autre: Quelle est la dimension projective $r= \ell(D)-1$ d'une série linéaire complète de groupes de points, coupée sur la courbe C' par un système de formes $F_0\lambda_0 + \ldots + F_r\lambda_r$ dont aucune n'est nulle sur toute la courbe, qui contient un groupe donné D?

La <u>méthode de construction</u> est différente dans les trois théories. Dans la théorie des fonctions, on commence à construire des intégrales Abèliennes de seconde espèce $\int v\, dz$ à pôles données, et on demande combien de ces intégrales ont des périodes nulles. On peut construire les différentielles v dz par une méthode algébrique (voir Lection 2), ou bien on peut construire la partie réelle de l'intégrale $\mathfrak{J} = \int v\, dz$ comme fonction harmonique au moyen du Principe de Dirichlet (voir H.Weyl, Die Idee der Riemannschen Fläche) ou par la méthode alternante de Schwarz (voir Nevanlinna, Uniformisierung p.150).