

Thomas Skill

# Toeplitz-Quantisierung symmetrischer Gebiete auf Grundlage der $C^*$ -Dualität

**WISSENSCHAFT**



**VIEWEG+  
TEUBNER**

Thomas Skill

Toeplitz-Quantisierung symmetrischer Gebiete  
auf Grundlage der  $C^*$ -Dualität

VIEWEG+TEUBNER RESEARCH

Thomas Skill

# Toeplitz-Quantisierung symmetrischer Gebiete auf Grundlage der $C^*$ -Dualität

Mit einem Geleitwort von Prof. Dr. Harald Upmeyer

VIEWEG+TEUBNER RESEARCH

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek  
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der  
Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über  
<<http://dnb.d-nb.de>> abrufbar.

Dissertation Universität Marburg, 2010, u.d.T.: Skill, Thomas: Toeplitz-Operatoren über  
beschränkten symmetrischen Gebieten und C\*-Algebra-Dualität

D 4  
Hochschulkennziffer 1180

1. Auflage 2011

Alle Rechte vorbehalten  
© Vieweg+Teubner Verlag | Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH 2011

Lektorat: Ute Wrasmann | Sabine Schöller

Vieweg+Teubner Verlag ist eine Marke von Springer Fachmedien.  
Springer Fachmedien ist Teil der Fachverlagsgruppe Springer Science+Business Media.  
[www.viewegteubner.de](http://www.viewegteubner.de)



Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung außerhalb der engen Grenzen des Urheberrechtsgesetzes ist ohne Zustimmung des Verlags unzulässig und strafbar. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Umschlaggestaltung: KünkelLopka Medienentwicklung, Heidelberg  
Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier  
Printed in Germany

ISBN 978-3-8348-1541-5

# Geleitwort

Die geometrische Quantisierung symplektischer Phasenräume ist ein wichtiger Zweig der modernen Analysis. Sie hat Querverbindungen zur harmonischen Analysis (Darstellungstheorie von Lie-Gruppen), zur mathematischen Physik (semiklassische Approximation quantenmechanischer Systeme) und zur Operatorentheorie (Schrödinger-Operatoren). Das zentrale Konzept umfasst eine Familie von Hilbert-Zustandsräumen mit Deformationsparameter („Plancksche Konstante“) sowie eine entsprechende Familie von Hilbert-Raum-Operatoren, die zu einem gegebenen „Symbol“ gehören, das eine glatte Funktion auf dem zugrundeliegenden Phasenraum ist und als klassische Observable gedeutet wird. Das Standardbeispiel hierfür ist der quantenharmonische Oszillator.

Neben der üblichen „reellen“ Quantisierung, bei der die Symbolfunktionen auf dem Kotangentenbündel eines Konfigurationsraums leben und der Hilbert-Raum aus Wellenfunktionen der Positionskoordinaten besteht, gibt es auch die „komplexe“ Toeplitz-Quantisierung, bei der der Phasenraum eine komplexe Polarisierung als Kähler-Mannigfaltigkeit besitzt und dementsprechend die Zustände durch holomorphe Funktionen gegeben sind. Die quantisierten Observablen erhalten hier eher den Charakter von Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren und leiten daher schon zur Quantenfeldtheorie (in unendlich vielen Variablen) über.

Die Beziehung zur harmonischen Analysis ergibt sich neben den Schrödinger-Darstellungen der Heisenberg-Gruppe über „interne“ Symmetriegruppen, die im Gegensatz zur Heisenberg-Gruppe nicht nilpotent sind, sondern meist als kompakte Matrixgruppen (etwa die unitäre Gruppe) gewählt werden. Die Darstellungstheorie dieser kompakten Lie-Gruppen beruht auf der Cartan-Weyl-Theorie des höchsten Gewichts und ist im Prinzip wohlbekannt.

In neuerer Zeit spielen aber auch nicht-kompakte halbeinfache Lie-Gruppen eine wichtige Rolle in der Quantisierungstheorie, und die hier kompliziertere Darstellungstheorie

rie kann im Zusammenhang mit Quantisierung neue Impulse erhalten - bekanntlich eine Hauptmotivation zur Entwicklung der geometrischen Quantisierung. Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit dieser Situation, genauer mit der Quantisierung beschränkter symmetrischer Gebiete in einer oder mehreren komplexen Variablen. Diese können als Quotient  $G/K$  realisiert werden können, wobei  $G$  eine halbeinfache Lie-Gruppe hermiteschen Typs ist und  $K$  deren maximal kompakte Untergruppe.

Aufgrund der komplexen Struktur dieser Gebiete werden zur Toeplitz-Quantisierung nach F. A. Berezin die sogenannten Toeplitz-Operatoren gewählt. Dabei sind die Hilbert-Räume gewichtete Bergman-Räume holomorpher Funktionen auf  $G/K$ , und aufgrund des hohen Symmetriegrads kann der Bergman-Kern explizit als Potenz eines Determinantenpolynoms dargestellt werden. Hierfür ist die von M. Koecher entwickelte Jordan-theoretische Beschreibung symmetrischer Gebiete von zentraler Bedeutung.

Die Analyse der Berezin-Toeplitz-Operatoren auf den Bergman-Räumen kann nun in zweierlei Richtung erfolgen. Zum einen kann man Toeplitz-Operatoren in sogenannten Sternprodukten multiplizieren, dann erhält man asymptotische Entwicklungen analog zu den Moyal-Produkten der semiklassischen Approximation. Alternativ ist aber auch die Struktur der von den Toeplitz-Operatoren erzeugten  $C^*$ -Algebra von hohem Interesse, da diese ein „nicht-kommutatives“ Analogon der Geometrie des zugrundeliegenden symmetrischen Gebiets  $G/K$  einschließlich des Randes darstellt.

Für den Fall des Hardy-Raums auf dem Shilov-Rand  $S$  von  $G/K$  ist in [Upmeyer 4] eine Strukturtheorie der Toeplitz- $C^*$ -Algebra mit einer Klassifikation aller irreduziblen Darstellungen auf Rand-Facetten sowie den ersten Schritten für eine Index- und eine  $K$ -Theorie entwickelt worden. Die Hauptschwierigkeit besteht in der Tatsache, dass der Rand von  $G/K$  nicht glatt ist, sondern eine Stratifizierung in  $G$ -Bahnen besitzt, welche sich in der Darstellungstheorie der Toeplitz- $C^*$ -Algebra widerspiegelt. Andererseits trägt der Shilov-Rand eine transitive Wirkung der kompakten Lie-Gruppe  $K$ , und die zugehörige Darstellungstheorie sowie die Struktur der Gruppen- $C^*$ -Algebra erlauben es als entscheidenden Schritt, die Hardy-Toeplitz- $C^*$ -Algebra als Kreuzprodukt einer Koaktion zu realisieren.

Versucht man nun wie in dieser Arbeit, eine entsprechende Strukturtheorie für Bergman-Toeplitz-Operatoren zu entwickeln, so liegt es nahe, die nicht-kompakte Lie-Gruppe  $G$  als Symmetriegruppe in den Mittelpunkt zu stellen und die im Fall des Hardy-Raums erfolg-

reiche Methodik auch auf  $G$  anzuwenden. Hier stellt sich etwas überraschend heraus, dass die im kompakten Fall relevanten Koaktionen nicht angewandt werden können, sondern durch das duale Konzept der Gruppenaktionen zu ersetzen sind. Daher liegt es nahe, die nicht-kommutative Dualität von Gruppen- $C^*$ -Algebren in einem allgemeinen Rahmen zu entwickeln und den inneren Bezug der verschiedenen Konzepte deutlich zu machen, wobei als zentrales Ergebnis stets ein Bidualitäts-Satz (Katayama) steht. Die vorliegende Arbeit ist im 4. Kapitel genau diesem Projekt gewidmet.

Des Weiteren besteht bei der nicht-kompakten Gruppe  $G$  das Problem darin, eine für eine stark stetige Gruppenaktion geeignete  $C^*$ -Algebra beschränkter Funktionen auf  $G/K$  zu konstruieren, deren Darstellungen in den Toeplitz-Operatoren reflektiert werden. Diese Konstruktion gelingt mit Hilfe der Karpelevič-Kompaktifizierung symmetrischer Räume, wobei die Rand-Facetten durch Limiten geodätischer Kurven beschrieben werden. Diese Idee könnte auch als Ausgangspunkt für weitergehende Untersuchungen im nicht-symmetrischen Fall dienen. Als Folge können nun ein Bidualitäts-Satz vom Katayama-Typ sowie einige bekannte Resultate zum unitären Dual halbeinfacher Lie-Gruppen benutzt werden, um analog zum Hardy-Raum-Fall die Bergman-Toeplitz- $C^*$ -Algebra in ein  $C^*$ -Kreuzprodukt einzubetten, aber für eine Aktion statt einer Koaktion. Diese Untersuchungen in Kapitel 6 und 7 können als Hauptergebnis der Arbeit bezeichnet werden.

Neben diesen spezifischen Forschungsthemen bietet die vorliegende Arbeit aber auch Interessantes für einen breiteren Leserkreis, insbesondere einen recht umfassenden Überblick über die bestehenden Quantisierungsmethoden. Dabei wird neben dem analytischen Zugang mittels  $C^*$ -Algebren und nicht-kommutativer Dualität auch der mehr algebraische Zugang über Hopf-Algebren und Quantengruppen (Kapitel 2 und 3) beschrieben, um die Ähnlichkeiten und charakteristischen Unterschiede deutlich zu machen. Schließlich gibt Kapitel 5 eine Einführung in die Geometrie symmetrischer Gebiete sowie ihre Jordan-theoretische Beschreibung.

Insgesamt handelt es sich um einen aktuellen und zukunftsweisenden Beitrag zur geometrischen Quantisierung im Rahmen der komplexen Analysis.

Marburg, im Januar 2011

Harald Upmeyer



# Vorwort

Wenn ein Vorhaben erfolgreich beendet ist, gebührt vielen Menschen, die dabei mitgeholfen haben, Anerkennung. Bedanken möchte mich für den Zuspruch meines Doktorvaters, Herrn Prof. Dr. Harald Upmeyer, der nicht nur in fachlichen, sondern auch in privaten Gesprächen immer dafür gesorgt hat, dass ich meinen Geist anstrenge. Seine außergewöhnliche und positive Art hat mich stets ermutigt und bestärkt, mein Vorhaben zum Ende zu bringen.

Bedanken möchte ich mich auch bei Herrn Prof. Dr. Markus Pflaum (University of Colorado at Boulder) für die Übernahme des Zweitgutachtens. Sein besonderer Einsatz zeigte sich nicht zuletzt darin, dass er den Weg nach Marburg für die Disputation auf sich genommen hat.

Frau Dipl.-Math. (FH) Regine Stefanie Martschiske danke ich für die Unterstützung beim Setzen in  $\text{TeX}$ . Frau Ingrid Furchner hat mit großer Sorgfalt Korrektur gelesen, wofür ich ihr dankbar bin.

Dem Vieweg + Teubner Verlag gilt mein Dank für die Aufnahme in die Edition *Vieweg + Teubner Research*. Insbesondere danke ich den Lektorinnen des Verlags, Frau Ute Wrasmann und Frau Sabine Schöller.

Nicht zuletzt geht mein Dank an meine Eltern Inge und Sigurd Skill sowie an meine Frau Anja Traum, die mich stets aufgebaut haben, wenn ich an mir gezweifelt habe. Meine Frau hat mir mit viel Verständnis immer den Rücken frei gehalten, mich motiviert fertig zu werden und mir geholfen, mein Vorhaben in den Fokus meiner vielfältigen Interessen zu stellen. Daher widme ich ihr diese Arbeit.

Frankfurt, im Januar 2011

Thomas Skill

# Symbolverzeichnis

$\mathcal{A}^{op}$	entgegengesetzte Algebra	Seite 12
$\Delta$	Komultiplikation	Seite 17
$\epsilon$	Koeins	Seite 17
$K[G]$	Gruppenalgebra über einem Ring $\mathcal{R}$	Seite 21
$K(G)$	Algebra $\mathcal{R}$ -wertiger Funktionen	Seite 21
$\mathcal{L}(H)$	Menge der beschränkten Operatoren	Seite 68
$C^*(G)$	Gruppen- $C^*$ -Algebra	Seite 71
$A \boxtimes G$	Kreuzprodukt	Seite 73
$\mathcal{M}(A)$	Multipliiert-Algebra	Seite 74
$A \overleftarrow{\otimes} B, A \overrightarrow{\otimes} B$	eingeschränkte Multipliiert-Algebren	Seite 74
$V^\square, V_\square, V^\circ, V_\circ$	Kac-Takesaki-Operator	Seite 78
$W^\square, W_\square, W^\circ, W_\circ$	Kac-Takesaki-Operator	Seite 78
$f^\square, f_\square, f^\blacklozenge, f_\blacklozenge$	Bimultiplikationsoperatoren	Seite 78
$A \diamond C_0(G)$	Kokreuzprodukt	Seite 84
$C_\rho^*(G), C_\lambda^*(G)$	Rechts- bzw. Linksfaltungsalgebren	Seite 84
$Z$	komplexes Jordan-Tripelsystem	Seite 115
$B(a, b)z$	Bergman-Endomorphismus	Seite 117
$\Delta(z, \zeta)$	Jordan-Tripeldeterminante	Seite 117
$P_S$	Szegö-Projektion	Seite 121
$P_\nu$	Bergman-Projektion	Seite 122
$L^2(K)^L$	$L$ -linksinvariante Funktionen auf $L^2(K)$	Seite 134
$j$	isometrische Einbettung	Seite 135
$\Lambda^\#$	Polarkegel	Seite 141
$\langle G \rangle_\nu$	Hilbert-Darstellungsraum	Seite 159
$\langle K \rangle_\nu$	lowest $K$ -type	Seite 160
$\langle G \rangle_\nu$	Rechts- $G$ -invarianter Unterraum	Seite 162
$\tilde{C}_0(G)$	gleichmäßig dichte $C^*$ -Unteralgebra von $C_b(G)$	Seite 175
$\boxtimes_l$	Kreuzprodukt mit Linkstranslation	Seite 179

# Inhaltsverzeichnis

Geleitwort	v
Vorwort	ix
Symbolverzeichnis	xi
<b>1 Einführung</b>	<b>1</b>
<b>I Dualität im algebraischen und analytischen Kontext</b>	<b>7</b>
<b>2 Hopf-Algebren</b>	<b>9</b>
2.1 Algebrastruktur . . . . .	10
2.1.1 Die Tensoralgebra $\mathcal{T}(\mathcal{L})$ . . . . .	13
2.1.2 Die Poincaré-Birkhoff-Witt-Basis von $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ . . . . .	14
2.2 Bi- und Hopf-Algebrastruktur . . . . .	17
2.3 Dualität von Gruppenalgebren . . . . .	23
2.3.1 Die universelle einhüllende Algebra von $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ . . . . .	23
2.3.2 Die Funktionen-Algebra $K(SL(2, \mathbb{C}))$ . . . . .	25
2.3.3 Das duale Paar $(\mathcal{U}(\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})), K(SL(2, \mathbb{C})))$ . . . . .	27
2.4 Dualität von $q$ -deformierten Gruppenalgebren . . . . .	28

2.4.1	Die $q$ -deformierte universelle einhüllende Algebra von $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ . . . . .	29
2.4.2	Die $q$ -deformierte Funktionalgebra $K_q(SL(2, \mathbb{C}))$ . . . . .	32
2.4.3	Das duale Paar $(\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})), K_q(SL(2, \mathbb{C})))$ . . . . .	37
<b>3</b>	<b>Die Quantendoppelkonstruktion</b>	<b>39</b>
3.1	Quantendoppel . . . . .	39
3.2	Kreuzprodukte . . . . .	41
3.2.1	Kreuzprodukt von Gruppen . . . . .	42
3.2.2	Kreuzprodukte von Bi- und Hopf-Algebren . . . . .	45
3.3	Kreuzprodukt der Gruppenalgebra $\mathbb{K}[G]$ . . . . .	52
3.4	Kreuzprodukt und Quantendoppel . . . . .	61
<b>4</b>	<b>Analytische Dualitätstheorie</b>	<b>67</b>
4.1	$C^*$ - und $W^*$ -Algebren . . . . .	68
4.2	Gruppen- $C^*$ -Algebren und Kreuzprodukte von $C^*$ -Algebren . . . . .	71
4.3	Multiplier-Algebren und Hopf- $C^*$ -Algebren . . . . .	74
4.4	Kac-Takesaki-Operatoren auf $L^2(G) \otimes L^2(G)$ . . . . .	77
4.5	Aktionen und Koaktionen auf $C^*$ -Algebren . . . . .	79
4.6	Dualitätssätze für Operatoralgebren . . . . .	85
4.7	Katayama-Dualität für Aktionen bzw. Koaktionen auf $C^*$ -Algebren . . . . .	86
 <b>II Anwendung auf Toeplitz-Operatoren für symmetrische Gebiete</b>		 <b>111</b>
<b>5</b>	<b>Symmetrische Gebiete und Funktionenräume</b>	<b>113</b>
5.1	Jordan-Algebra und Jordan-Tripelsysteme . . . . .	113
5.2	Jordan-Tripelsysteme und beschränkte symmetrische Gebiete . . . . .	116
5.3	Hardy- und Bergman-Räume . . . . .	120
5.4	Hilbert-Darstellungen . . . . .	124

5.5	Diskrete Reihe . . . . .	125
5.6	Analytische Fortsetzung der holomorphen diskreten Reihe . . . . .	128
<b>6</b>	<b>Hardy-Toeplitz-<math>C^*</math>-Algebra <math>\mathcal{T}(S)</math></b>	<b>131</b>
6.1	Die Szegő-Projektion als Linksfaltung . . . . .	131
6.1.1	$K$ -Rechtsaktion auf dem Shilov-Rand $S$ . . . . .	131
6.1.2	Liftung der Aktion auf den Hilbert-Raum $L^2(S)$ . . . . .	134
6.2	Hardy-Toeplitz-Operatoren . . . . .	144
6.3	Hardy-Toeplitz- $C^*$ -Algebra $\mathcal{T}(S)$ und ihre Realisierung als Kokreuzprodukt	148
<b>7</b>	<b>Bergman-Toeplitz-<math>C^*</math>-Algebra <math>T_\nu(B)</math></b>	<b>159</b>
7.1	Bergman-Projektion als Linksfaltungsoperator . . . . .	159
7.2	Bergman-Toeplitz-Operatoren . . . . .	167
7.3	Bergman-Toeplitz- $C^*$ -Algebra $T(B)$ und ihre Realisierung als Kreuzprodukt	171
7.3.1	Die $C^*$ -Algebra $\widehat{C}_0(G)$ . . . . .	172
7.3.2	Die Aktion auf der $C^*$ -Algebra $C_\rho^*(G)$ . . . . .	173
7.3.3	Das Kreuzprodukt und die Rechtsaktion auf $\widehat{C}_0(G)$ . . . . .	179
<b>A</b>	<b>Dualität der Bialgebra <math>\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}))</math></b>	<b>189</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>197</b>
	<b>Abstract</b>	<b>207</b>

# Kapitel 1

## Einführung

Diese Arbeit ist ein Beitrag zur *Quantisierung* im Rahmen der nicht-kommutativen Dualitätstheorie von Gruppen und  $C^*$ -Algebren, d. h. der „nicht-kommutativen“ Verallgemeinerung der Pontryagin-Dualität. Dieser Zugang ist besonders geeignet für Systeme mit hohem Symmetriegrad, wie zum Beispiel Quantengruppen oder symmetrische Räume, weil die Eigenschaften zueinander dualer Strukturen genutzt werden können, wobei die Symmetrie in der jeweiligen Struktur als Relation bzw. Gruppenoperation eingeht. Die beiden Hauptaufgaben der Arbeit sind daher

1. die umfassende Darstellung der Quantisierung mittels Dualitätstheorie sowohl im algebraischen Rahmen der Hopf-Algebren als auch im analytischen Kontext der Hopf- $C^*$ -Algebren und
2. die Untersuchung der Situation komplex-symmetrischer Gebiete, in denen die Bergman-Räume als Hilbert-Zustandsräume und die Toeplitz-Operatoren als quantisierte Observablen die entscheidenden Rollen spielen.

Der Schwerpunkt der ersten Aufgabe liegt in der Herausarbeitung der jeweils spezifischen Methoden zur Dualitätstheorie, nämlich die Drinfel'd-Doppelkonstruktion im algebraischen Teil und die Anwendung der Katayama-Dualität für  $C^*$ -Algebren im analytischen Teil. Im letzteren Fall hat Upmeyer bereits eine Strukturtheorie für Toeplitz- $C^*$ -Algebren auf dem *Hardy-Raum* entwickelt [Upmeyer 1], [Upmeyer 3], [Upmeyer 4], bei der allerdings keine eigentliche Quantisierung vorliegt. Diese ergibt sich erst bei den (gewichteten) *Bergman-Räumen*. Als Hauptergebnis der Arbeit wird gezeigt, dass die Bergman-Toeplitz- $C^*$ -Algebra ebenfalls mittels  $C^*$ -Dualität beschrieben werden kann. Interessanterweise tritt aber im Bergman-Fall das Kreuzprodukt von  $C^*$ -Algebren auf, während im Hardy-Fall das Kokreuzprodukt die entscheidende Rolle spielt. Dieser Zusammenhang bleibt für den allgemeinen Fall der diskreten Reihe gültig, auf den im Abschnitt 7.1 der Arbeit

eingegangen wird. In den darauf folgenden Abschnitten wird dann der spezielle Fall der gewichteten Bergman-Räume betrachtet und damit auch die Verbindung zur Quantisierung hergestellt.

Im algebraischen Teil werden *Quantengruppen* skizziert. Ihr Ursprung liegt in der Quantum-Inverse-Scattering-Methode, die durch L. D. Faddeev und der „Leningrader Schule“ der mathematischen Physik entwickelt wurde und darauf abzielt, bestimmte integrierbare Quantensysteme zu lösen. Diese Methode basiert im Wesentlichen auf der Quantum Yang-Baxter Gleichung, deren Lösung mit  $R$  bezeichnet wurde und den Namen  $R$ -Matrix erhalten hat. In den 1980er Jahren entdeckte man, dass Lösungen konstruiert werden können, indem man Darstellungen bestimmter Algebren verwendet, die Deformationen einhüllender Algebren von halbeinfachen Lie-Algebren ähneln.

Ein weiterer Weg, zu Quantengruppen zu gelangen, ist, Funktionenalgebren und ihre Deformation zu studieren. Mit dieser Philosophie stößt man auch auf natürliche Weise auf Hopf-Algebren. Betrachten wir eine diskrete, topologische, Lie- oder algebraische Gruppe  $G$ , dann untersuchen wir die Algebra der stetigen,  $C^\infty$  oder Polynom-Funktionen von  $G$  in den zugrundeliegenden Körper  $\mathbb{K}$ . Diese Denkweise hat Drinfel'd auf Quantengruppen erweitert, indem er klassische Koordinatenringe durch Deformation zu nicht-kommutativen und nicht-kokommutativen Hopf-Algebren quantisierte und ihre Darstellungstheorie untersuchte. Diese Hopf-Algebren bestehen aus nicht-kommutativen Funktionen auf einem nicht-existierenden Objekt, nämlich einer zu  $G$  gehörenden „Quantengruppe“. Somit ist klar, dass Quantengruppen an sich nicht existieren, aber ihre Funktionenalgebren, die bequemlichkeitshalber selbst als Quantengruppen bezeichnet werden.

$$\begin{array}{ccccc}
 G & \longleftrightarrow & \mathcal{U}^*(\mathfrak{g}) \cong C^\infty(G) & \longleftrightarrow & \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \\
 & & \updownarrow & & \updownarrow \\
 G_q & \longleftrightarrow & \mathcal{U}_q^*(\mathfrak{g}) \cong C_q^\infty(G) & \longleftrightarrow & \mathcal{U}_q(\mathfrak{g})
 \end{array}$$

Im Diagramm nehmen wir nun  $G$  als Lie-Gruppe an, dann gibt es eine nicht-entartete duale Paarung zwischen den glatten Funktionen  $C^\infty(G)$  auf  $G$  und dem Dual  $\mathcal{U}^*(\mathfrak{g})$  der universell einhüllenden Algebra  $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ . Wir erhalten also  $C^\infty(G) \cong \mathcal{U}^*(\mathfrak{g})$ . Damit haben wir die obere Zeile der Beziehungen erklärt. Es ist zu unterstreichen, dass die Bedeutung der Quantengruppe  $G_q$  nicht als Quantisierung von  $G$  aufgefasst werden kann. Diese fehlende Korrespondenz stellt aber kein Problem dar, denn jede Fragestellung kann als eine von  $C_q^\infty(G)$  ausgedrückt werden.

Eine Möglichkeit, eine Quantengruppe zu konstruieren, ist, sie aus der quantisierten universellen Einhüllenden und deren Dual, einer quantisierten Funktionenalgebra, als Doppel zu erzeugen. Dieses Doppel ist eine quasi-trianguläre Hopf-Algebra, womit im quantisierten Fall ihre Nicht-Kommutativität und ihre Nicht-Kokommutativität einhergeht. Diese ebenfalls auf Drinfel'd zurückgehende Idee bildet die algebraische Grundlage für unseren analytischen Teil. Wir arbeiten beispielhaft die Dualität der quantisierten universellen Einhüllenden  $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}))$  und der (quantisierten) Koordinatenfunktionenalgebren  $K(SL_q(2, \mathbb{C}))$  explizit heraus. Die Einzelergebnisse der Berechnungen zur Dualität werden im Anhang aufgeführt. Anschließend erörtern wir detailliert die Doppelkonstruktion. Dabei verwenden wir im Abschnitt 3.2.2 eine neue Notation für die Koassoziativität, die die Einsteinsche Summenkonvention berücksichtigt und die Rechenoperationen der Elemente im Tensorprodukt verdeutlicht. Auch die Schreibweise für die Aktion im Abschnitt 3.2.1 ist neu und hilft, die Rechnungen übersichtlich zu gestalten. Diese beiden Arten der Notation sind sehr nützlich, um die Bedingungen für verträgliche Paare zu beweisen, die die Grundlage der Doppelkonstruktion bilden.

In der Dualitätstheorie im analytischen Kontext der  $C^*$ -Algebren stehen natürlicherweise andere Methoden im Vordergrund. Um die nicht-kommutative Dualität lokalkompakter Gruppen herauszuarbeiten, sind Hopf- $C^*$ -Algebren und Aktionen bzw. Koaktionen auf ihnen erforderlich. Um die Einsabbildungen in der Hopf- $C^*$ -Algebra überhaupt bilden zu können, muss zunächst die  $C^*$ -Algebra als Ideal in eine unitale  $C^*$ -Algebra eingebettet werden. Diese unitale  $C^*$ -Algebra ist bis auf Isomorphismen eindeutig: es ist die Multiplier-Algebra. Die Aktion einer Gruppe, aufgefasst als Algebraautomorphismus, kommt hinzu und führt zu einer größeren  $C^*$ -Algebra, genauer einer Multiplier-Algebra: dem Kreuzprodukt. Dann benötigen wir noch die Aktion auf der dualen Gruppe und kommen so zur Koaktion einer Gruppe auf einer  $C^*$ -Algebra. Damit sind wir vorbereitet, die nicht-kommutative Dualität zu untersuchen. Hierfür arbeiten wir den Dualitätssatz von Kayayama aus, d. h. die Kreuzprodukt dualität von (reduzierten) Koaktionen und die Kokreuzprodukt dualität von (reduzierten) Aktionen. Außerdem geben wir den Beweis explizit mit dem entsprechenden Kac-Takesaki-Operator, und damit ist die Darstellung für Kreuz- und Kokreuzprodukt einheitlich.

Nun kommen wir zum zweiten Teil der Arbeit. Im Jahre 1935 gab É. Cartan eine vollständige Klassifikation Hermitescher symmetrischer Räume an. Er bewies, dass jeder Hermitesche symmetrische Raum ein Produkt irreduzibler Hermitescher symmetrischer Räume ist und es exakt vier Klassen und zwei Ausnahmefälle irreduzibler Hermitescher symmetrischer Räume gibt. Harish-Chandra bewies 1956, dass jede Hermitesche symmetrische Mannigfaltigkeit holomorph äquivalent zu einem komplex symmetrischen beschränkten Gebiet ist. M. Koecher zeigte 1969, dass Jordan-Algebren und Jordan-Tripelsysteme in



der komplexen Analysis angewandt werden können, um insbesondere die beschränkten symmetrischen Gebiete algebraisch zu beschreiben. Toeplitz-Operatoren und Toeplitz- $C^*$ -Algebren auf symmetrischen Gebieten sind mit der Jordan-algebraischen Struktur der zugrundeliegenden Gebiete über die Szegö-Projektion auf dem Hardy-Raum  $H^2(S)$  und die Bergman-Projektion auf dem Bergman-Raum  $H^2(B)$  eng verbunden.

Nach einer Darstellung der wesentlichen Ergebnisse aus der Theorie der Jordan-Algebren und der Hilbert-Räume holomorpher Funktionen wird zunächst der Hardy-Raum-Fall für die Toeplitz- $C^*$ -Algebra  $\mathcal{T}(S)$  mit  $S = K/L$  detailliert ausgeführt. Zunächst wird im Abschnitt 6.1 gezeigt, dass die Szegö-Projektion als Linksfaltungsoperator aufgefasst werden kann. Im anschließenden Abschnitt 6.2 verwenden wir diese Projektion zur Definition des Toeplitz-Operators. Dann zeigen wir in Abschnitt 6.3 die Realisierung der Toeplitz- $C^*$ -Algebra als Unteralgebra eines Kreuzprodukts einer passenden (Hopf- $C^*$ -Algebra-) Koaktion. Dabei verbessern wir Upmeiers Argument beim Beweis der  $C^*$ -Koaktion an der Stelle, an der die Dichtheit des algebraischen Tensorprodukts in der Fourier-Algebra verwendet wird (Proposition 6.3.5).

Bei der Bergman-Raum-Theorie gibt es eine Reihe von Parallelen, aber auch Unterschiede zur Hardy-Raum-Theorie. Wir zeigen in Abschnitt 7.1, dass die Bergman-Projektion ein Linksfaltungsoperator ist, allerdings nicht auf der kompakten Gruppe  $K$ , sondern auf der nicht-kompakten Gruppe  $G$ . Dabei wird die holomorphe diskrete Reihe als Prototyp für die gewichteten Bergman-Räume verwendet; hier sei betont, dass die Konstruktion auch für die volle diskrete Reihe gilt. Anschließend konstruieren wir in Abschnitt 7.2 den Bergman-Toeplitz-Operator und realisieren die Bergman-Toeplitz- $C^*$ -Algebra als Unter-algebra eines Kreuzprodukts im Abschnitt 7.4. Um dieses Kreuzprodukt überhaupt definieren zu können, benötigen wir eine nicht offensichtliche Funktionenalgebra gleichmäßig stetiger Funktionen; diese entwickeln wir in den Abschnitten 7.3.1 und 7.3.2. Dafür wenden wir einige Ergebnisse der komplexen Analysis an. Bei der Realisierung als Kreuzprodukt werden neben der Katayama-Dualität tiefe Sätze der Topologie des unitären Duals angewandt, mit deren Hilfe der Nachweis gelingt, dass die Bergman-Toeplitz- $C^*$ -Algebra eine Unter-algebra des Kreuzprodukts ist. Mit diesem Ergebnis könnte im Prinzip die Darstellungstheorie des Bergman-Raum-Falls bestimmt werden, wie es im Hardy-Raum-Fall [Upmeier 3], [Upmeier 4] erfolgt ist, aber darauf werden wir nicht mehr eingehen.

Nun ist noch die Frage offen, warum dies ein Beitrag zur Quantisierung ist. Dazu erläutern wir zunächst kurz die Quantisierung.

**Quantisierung** ist ein mathematisches Konzept dafür, etwas „Stetiges“ auf eine diskrete Menge von Werten einzuschränken. Das einfachste Beispiel ist eine Einschränkung von  $\mathbb{R}$  auf  $\mathbb{N}$ . In der Physik bedeutet Quantisierung, aus einem klassischen System  $((\mathcal{M}, \omega), \{, \}, H_{klass.})$  mit einer  $2n$ -dimensionalen symplektischen Mannigfaltigkeit  $(\mathcal{M}, \omega)$

als Phasenraum, der Poisson-Klammer  $\{, \}$  auf der Observablenalgebra  $A = C^\infty(\mathcal{M})$  und der Hamilton-Funktion  $H_{klass.}$  (glatte reellwertige Funktion auf  $\mathcal{M}$ ) als klassischer Bewegungsgleichung, einen korrespondierenden Hilbert-Raum  $\mathcal{H}$  zu konstruieren. Genauer heißt Quantisierung, eine bijektive Abbildung

$$q_\hbar : A \rightarrow \mathcal{A}$$

von der Menge der klassischen Observablen  $A$  in die Menge der Quantenobservablen  $\mathcal{A}$  (Menge der selbstadjungierten Operatoren auf einem Hilbert-Raum  $\mathcal{H}$ ) zu definieren. Die Abbildung  $q_\hbar$  hängt vom Parameter  $\hbar$  (reduzierte Plancksche Konstante<sup>1</sup>) ab. Die Einschränkung der Abbildung  $q_\hbar$  auf den Unterraum der beschränkten klassischen Observablen  $A_0$  ist ein Homomorphismus auf den Unterraum der beschränkten Quantenobservablen  $\mathcal{A}_0 = \mathcal{A} \cap \mathcal{L}(\mathcal{H})$ , die die Eigenschaft

$$\lim_{\hbar \rightarrow 0} \frac{1}{2} q_\hbar^{-1}(q_\hbar(f_1)q_\hbar(f_2) + q_\hbar(f_2)q_\hbar(f_1)) = f_1 f_2$$

und das (Bohrsche) **Korrespondenzprinzip**

$$\lim_{\hbar \rightarrow 0} q_\hbar^{-1}(\{q_\hbar(f_1), q_\hbar(f_2)\}_\hbar) = \{f_1, f_2\}$$

für alle  $f_1, f_2 \in A_0$  erfüllen. Der Isomorphismus zwischen der Lie-Algebra beschränkter klassischer Observablen und der Lie-Algebra beschränkter Quantenobservablen besteht aber nicht grundsätzlich, sondern nur im Limes.

Physikalisch bedeutet dies, dass stetige Zustände und Übergänge durch ganz bestimmte (nämlich diskrete) ersetzt werden, d. h. zwischen diesen bestimmten Zuständen und Übergängen sind keine anderen erlaubt. Damit ist der Übergang von der *klassischen Mechanik* zur *Quantenmechanik* beschrieben, in dem die stetigen klassischen Größen durch diskrete Größen der Quantenmechanik ersetzt werden. In der *klassischen* Mechanik hingegen werden die beobachtbaren physikalischen Bestimmungsgrößen durch reelle, in den meisten Fällen auch glatte Funktionen  $F(q, p)$  auf dem Phasenraum dargestellt.

Für die Untersuchung von  $C^*$ -Algebren, die vom Deformationsparameter  $\hbar$  abhängen und sich dem klassischen Limes annähern, gibt es zwei Untersuchungsrichtungen: Erstens, kann man den Kommutator zweier quantisierter Funktionen betrachten, der durch eine Korrektur der Poisson-Klammer auf der Mannigfaltigkeit gegen null geht (semiklassischer Limes). Zweitens, einen nicht-störungstheoretischen Ansatz (s. [Borthwick/Lesniewski/Upmeyer])

---

<sup>1</sup>Das Plancksche Wirkungsquantum  $h$  ist eine fundamentale Naturkonstante der Quantenphysik. Es ist nach Max Planck (23. April 1858, Kiel - 4. Oktober 1947, Göttingen) benannt, einem deutschen Physiker und Nobelpreisträger für Physik 1918. Man bezeichnet mit  $\hbar = \frac{h}{2\pi}$  das *reduzierte* Plancksche Wirkungsquantum.

zu wählen, in dem Toeplitz-Operatoren als Quantisierungsabbildungen genutzt werden<sup>2</sup>. Die Idee, Toeplitz-Operatoren zur Quantisierung zu nutzen, ist in Berezin<sup>3</sup> ([Berezin]) zu finden. Eine physikalische Interpretation ist hingegen spekulativ. Im zweiten Ansatz wird die transitive Aktion einer biholomorphen Gruppe verwendet, die in allen Hermiteschen symmetrischen Räumen vom nicht-kompakten Typ enthalten ist und diese Räume mit der Planckschen Konstante  $\hbar$  verbindet. Ausgehend von komplexen Hermiteschen Räumen kompakten und nicht-kompakten Typs, die als beschränkte symmetrische Gebiete  $S = K/L$  bzw.  $B = G/K \subset \mathbb{C}^n$  realisiert sind, wird die Quantisierungsabbildung

$$\begin{aligned} A : C^\infty(B) &\rightarrow \mathcal{L}(H) \\ f &\mapsto A_f, \end{aligned}$$

realisiert durch (unbeschränkte) Operatoren auf einem komplexen Hilbert-Raum  $H$ , die die Kovarianzbedingung

$$A_{f \circ g^{-1}} = U(g)A_fU(g^{-1})$$

für alle  $g \in G$  und irreduzible (projektive) Darstellungen  $U$  von  $G$ , die auf  $H$  wirken. Die Sichtweise, dass die holomorphe Reihe ein Prototyp für Bergman-Räume ist, stellt die Verbindung von einem parameterabhängigen Maß zu einem symmetrischen Raum her. Dieser Parameter ergibt im Verhältnis zum Geschlecht des Gebiets die inverse Plancksche Konstante, also

$$\frac{\nu}{p} = \frac{1}{\hbar}.$$

Somit sehen wir, dass jeder Toeplitz-Operator  $T_\nu$  zu einem gewichteten Bergman-Raum gehört, wobei eben dieses  $\nu$  eine Verbindung zur Planckschen Konstante hat.

---

<sup>2</sup>Hier wird auf die (Berezin-)Toeplitz-Quantisierung als eine Form der Deformationsquantisierung Bezug genommen. Rieffel ([Rieffel], S. 91) sieht dies nicht als Deformationsquantisierung, weil nicht ein deformiertes Produkt gesucht wird, sondern die Quantisierung durch die Korrespondenz einer beschränkten messbaren Funktion zum Toeplitz-Operator besteht, wenn das Maß eine Funktion der Planckschen Konstante ist. Dafür spricht, dass die Konstruktion des Toeplitz-Operators auf die (Ko-)Kreuzproduktbildung zurückzuführen ist, und somit die zu erfüllenden Bedingungen gleich sind.

<sup>3</sup>Felix Alexandrovich Berezin (25. April 1931 in Moskau - 14. Juli 1980 im Kolyma-Gebiet) war ein russischer Mathematiker und theoretischer Physiker. Er begründete die sog. Supermathematik.

# Teil I

## Dualität im algebraischen und analytischen Kontext

Im ersten Teil werden detailliert die grundlegenden Konzepte der Dualitätstheorie (bspw. Quantendoppel) dargestellt, und zwar sowohl im algebraischen Rahmen der Hopf-Algebren als auch im funktionalanalytischen Kontext der  $W^*$ - und  $C^*$ -Algebren. Das Ziel ist, die enge Beziehung zwischen dem algebraischen und dem funktionalanalytischen Zugang aufzuzeigen und für Operatoralgebren eine einheitliche Beweisführung der Katayama-Dualitätssätze zu erreichen, d. h. simultan für Aktionen und Koaktionen auf  $C^*$ -Algebren. Diese Beweisführung kann als relativ elementar und dennoch vollständig bezeichnet werden und stellt gegenüber den Originalarbeiten, in denen Aktionen und Koaktionen durchaus unterschiedlich behandelt werden, eine Präzisierung und Vereinheitlichung dar.

Im zweiten Teil werden die Katayama-Sätze auf eine konkrete Quantisierungsmethode angewandt, wobei erstaunlicherweise sowohl Aktionen als auch Koaktionen eine wichtige Rolle spielen und die  $C^*$ -Dualitätstheorie benutzt wird.

# Kapitel 2

## Hopf-Algebren

Der Begriff Hopf-Algebra ist aus Hopfs<sup>1</sup> Beschäftigung mit der Kohomologie kompakter Lie-Gruppen und ihrer homogenen Räume entstanden (s. [Hopf], § 3, Randziffer 19, S. 37). Die dort noch verwendeten Restriktionen (wie die Existenz einer Graduierung), um die topologischen Anforderungen erfüllen zu können, konnten durch die Verwendung von Hopf-Algebren in anderen Gebieten immer mehr wegfallen. Chevalley erweiterte die Lie-Theorie auf algebraische Gruppen, aber dort ist die Beziehung zwischen Lie-Gruppen und Lie-Algebren (im Falle der Charakteristik  $p \neq 0$ ) nicht gültig. Um diese Schwierigkeiten zu umgehen, führten Cartier, Manin, Grothendieck et al. Hopf-Algebren in der algebraischen Geometrie ein. Dort entsteht ihre doppelte Rolle: Zum einen sind die linksinvarianten Differentialoperatoren einer algebraischen Gruppe eine kokommutative Lie-Algebra, die mit der einhüllenden Lie-Algebra der Charakteristik 0 koinzidiert. Zum anderen bilden die regulären Funktionen einer affinen algebraischen Gruppe (mit gewöhnlicher Multiplikation) eine kommutative Hopf-Algebra.

Diese beiden Situationen beschreiben ein generelles Phänomen der Dualität von Algebren. So besteht für eine endliche Gruppe  $G$ , einen Körper  $\mathbb{K}$ , die dazugehörige Gruppenalgebra  $\mathbb{K}[G]$  und die Algebra  $\mathbb{K}(G)$  der  $\mathbb{K}$ -wertigen Abbildungen von  $G$  die natürliche Dualität der Vektorräume durch

$$\langle \sum_{g \in G} a_g \cdot g, f \rangle = \sum_{g \in G} a_g \cdot f(g)$$

für  $\sum_{g \in G} a_g \cdot g \in \mathbb{K}[G]$  und  $f \in \mathbb{K}(G)$ . Die beiden Betrachtungen im nächsten Beispiel stellen die Verbindung zum zweiten Abschnitt dieser Arbeit her.

---

<sup>1</sup>Heinz Hopf (19. November 1894 in Gräbschen bei Breslau - 03. Juni 1971 in Zollikon, Schweiz) war deutsch-schweizerischer Mathematiker.

**Beispiel 2.0.1.** 1. Für eine lokalkompakte Gruppe  $G$  ist die Algebra  $L^1(G)$  der integrierbaren Funktionen mit Faltungsprodukt dual zur Algebra  $L^\infty(G)$  der beschränkten messbaren Funktionen (mit punktweiser Multiplikation).

2. Ist  $G$  eine Lie-Gruppe, so ersetzt man im vorangegangenen Beispiel  $L^1(G)$  durch die Faltungsalgebra  $C_0(G)$  von Distributionen mit kompaktem Träger und  $L^\infty(G)$  durch die Algebra  $C^\infty(G)$  der glatten Funktionen: Die Algebra  $C_0(G)$  ist dual zu  $C^\infty(G)$ .

Hier weisen wir darauf hin, dass jeweils mindestens eine der zueinander dualen Algebren eine graduierte Algebra<sup>2</sup> über einem kommutativen Ring ist. Dies ändert sich mit dem Auftreten von Quantengruppen<sup>3</sup>.

## 2.1 Algebrastruktur

Eine (nicht notwendigerweise assoziative) Algebra über dem Ring  $\mathcal{R}$  ist ein  $\mathcal{R}$ -Modul  $\mathcal{A}$  mit einer Verknüpfungsabbildung

$$\begin{aligned} \cdot : \mathcal{A} \times \mathcal{A} &\rightarrow \mathcal{A} \\ (x, y) &\mapsto xy \end{aligned}$$

für alle  $x, y \in \mathcal{A}$ , so dass für alle  $x, y, z \in \mathcal{A}$  und  $a \in \mathcal{R}$  gilt:

1.  $x(y + z) = xy + xz$ ,
2.  $(x + y)z = xz + yz$ ,
3.  $(ax)y = a(xy) = x(ay)$ .

---

<sup>2</sup>Eine  $\mathbb{N}$ -Graduierung  $\mathfrak{Gr}$  einer Algebra  $A$  ist eine Familie  $(\mathfrak{Gr}_n(A))_{n \in \mathbb{N}}$  von  $\mathcal{R}$ -Untermoduln mit den Eigenschaften, dass

1. die durch Einbettungen  $\mathfrak{Gr}_n(A) \hookrightarrow A$  induzierte kanonische Abbildung

$$\bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathfrak{Gr}_n(A) \rightarrow A$$

ein  $\mathcal{R}$ -Modulisomorphismus ist und

2.  $\mathfrak{Gr}_n(A) \cdot \mathfrak{Gr}_m(A) \subset \mathfrak{Gr}_{n+m}(A)$  für alle  $n, m \in \mathbb{N}$  gilt.

Eine  $\mathcal{R}$ -Algebra zusammen mit einer  $\mathbb{N}$ -Graduierung heißt ( $\mathbb{N}$ -) **graduierte Algebra**.

<sup>3</sup>Zu Quantengruppen sind zahlreiche Bücher erschienen. Wir nennen hier auszugsweise [Chari/Pressley], [Klimyk/Schmüdgen] und [Majid 2].