Kölner Beiträge zur Didaktik der Mathematik und der Naturwissenschaften

RESEARCH

Jessica Kunsteller

Ähnlichkeiten und ihre Bedeutung beim Entdecken und Begründen

Sprachspielphilosophische und mikrosoziologische Analysen von Mathematikunterricht

Springer Spektrum

Kölner Beiträge zur Didaktik der Mathematik und der Naturwissenschaften

Die Kölner Fachgruppe der MINT-Didaktiken verfolgt mit ihrem Forschungsprogramm das Ziel, ausgewählte Themen des Lehrens und Lernens der Mathematik und der Naturwissenschaften zu erforschen und auf dieser Basis weiter zu entwickeln. Die Publikationen dieser Reihe werden sich zwischen zwei Polen verorten lassen: Zum einen werden Theorien erstellt, die das Lehren und Lernen in den MINT-Fächern zu verstehen helfen, zum anderen werden Unterrichts- und Lehrkonzepte entwickelt und empirisch erprobt. Die VertreterInnen dieser Fachgruppe sind in allen Bereichen der Erforschung und Vermittlung von mathematisch-naturwissenschaftlichem Wissen tätig. Entsprechend umfasst die Reihe „Kölner Beiträge zur Didaktik der Mathematik und der Naturwissenschaften“ ein breites Spektrum: von vorschulischen Erfahrungen (auch in der Familie) bis zu Weiterbildungen nach dem Studium.

Weitere Bände in der Reihe http://www.springer.com/series/13626

Jessica Kunsteller

Ähnlichkeiten und ihre Bedeutung beim Entdecken und Begründen

Sprachspielphilosophische und mikrosoziologische Analysen von Mathematikunterricht

Mit einem Geleitwort von Prof. Dr. Michael Meyer

Springer Spektrum

Jessica Kunsteller
Köln, Deutschland

Dissertation der Universität zu Köln, 2017

ISSN 2510-4861 ISSN 2510-4888 (electronic)
Kölner Beiträge zur Didaktik der Mathematik und der Naturwissenschaften
ISBN 978-3-658-23038-8 ISBN 978-3-658-23039-5 (eBook)
https://doi.org/10.1007/978-3-658-23039-5

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Springer Spektrum

Springer Spektrum ist ein Imprint der eingetragenen Gesellschaft Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH und ist ein Teil von Springer Nature
Die Anschrift der Gesellschaft ist: Abraham-Lincoln-Str. 46, 65189 Wiesbaden, Germany

Geleitwort

In der Mathematik sind wir gehalten, Begriffe gemäß ihren Definitionen oder entsprechend äquivalenten Aussagen zu behandeln. Eine Definition gibt uns Eigenschaften bzw. Merkmale vor, anhand derer wir etwa einen Gegenstand, einen Sachverhalt, o.Ä. als ein Element der Extension dieses Begriffs bestimmen können. Diese müssen also die begriffliche Intension, d.h. die intrinsischen Bedeutungsbedingungen, erfüllen, z.B. an diesem Gegenstand, welcher einen rechten Winkel aufweist, an dieser an die Tafel gezeichneten Figur, welche die semantischen Bedingungen des rechten Winkels erfüllt usf.. Anders formuliert: Definitionen vereinfachen unser Handeln – nicht nur in der Mathematik. Jedoch gibt es auch in der Mathematik und insbesondere im schulischen Mathematikunterricht diverse Situationen, in denen wir nicht einfach fixierten Eigenschaften oder Merkmalen einer Definition folgen können. Betrachten wir einige dieser Situationen:

Relativ zur Struktur mathematischer Inhalte sei an die fundamentalen Ideen erinnert: Bruner (1960) thematisiert in seinem Werk „The Process of Education“ fundamentale Ideen, die er als Lösung für das „Transferproblem“ vorschlägt. Gewisse Lerninhalte sollen ausgewählt werden, die das Denken derart schulen, dass es auch in Zukunft sinnvoll und (somit) ausbaubar ist. Neben anderen Autoren spezifizierte Heymann (1996) einen entsprechenden Katalog für den schulischen Mathematikunterricht, indem er folgende Ideen herausstellt: Idee der Zahl, Idee des Messens, Idee des räumlichen Strukturierens, Idee des funktionalen Zusammenhanges, Idee des Algorithmus und die Idee des mathematischen Modellierens. Fundamentale Ideen zeichnen sich unter anderem dadurch aus, dass sie den Mathematikunterricht sowohl horizontal als auch vertikal durchziehen. Entsprechend müssen sie vage sein, wie es beispielsweise Hischer (2012) nach Jung beschreibt: „Werden Ideen zunehmend fundamentaler, so wird ihre Beschreibung zunehmend vager, d.h., sie werden zunehmend allgemeiner und unschärfer – und umgekehrt“ (S. 21). Wenn eine Idee jedoch vage ist, so hat sie keine definitorische Setzung. Insofern sich hiermit aber die Inhalte des Unterrichts strukturieren lassen (sollen), erhält sie eine immense Bedeutung. Die Zuordnung einzelner Elemente zu einer Idee kann dann aber nicht mit letztendlicher Gewissheit, sondern beispielsweise dadurch erfolgen, indem die aktuell betrachteten Elemente in der Hoffnung analysiert werden, dass sie gemeinsame Eigenschaften mit solchen Elementen teilen, die der entsprechenden Idee bereits zuvor zugeordnet wurden.

In Situationen des Mathematiklernens finden sich häufig Situationen, in denen den Lernenden Definitionen nicht notwendig vollends bewusst sind. Womöglich sollen sie erst erarbeitet werden oder sie sind schlicht aktuell nicht kognitiv präsent. Wenn die Lernenden zum Beispiel basierend auf einer exemplarischen Begriffsbestimmung (Winter 1983) einen mathematischen Begriff erfassen sollen, dann sind sie gehalten, gemeinsame Eigenschaften der präsentierten Gegenstände zu erkennen. Ist eine Definition hingegen den Lernenden aktuell nicht präsent, so haben sie die Möglichkeit sich an bekannte Extensionen dieses Begriffs zu erinnern, um diese mit der aktuell gegebenen Situation hinsichtlich gewisser, plausibler Eigenschaften abzugleichen.

Diesen Situationen ist gemein, dass es nicht ausreicht oder erst gar nicht möglich, einer gegebenen Begriffsintension zu folgen. Vielmehr sind es gemeinsame Eigenschaften oder Merkmale (in den Worten der vorliegenden Arbeit: Ähnlichkeiten), die unser Handeln in der Mathematik bestimmen. Anders formuliert: Die Betonung von Ähnlichkeiten mag eine mathematisch versierte Leserin bzw. einen mathematisch versierten Leser irritieren. Die Bedeutung dieses Begriffs für mathematische Lernprozesse ist hingegen sehr groß. Vergleichbar verhält es sich mit einem anderen Begriffsnetz, welches in der vorliegenden Arbeit verwendet wird: Hinsichtlich der empirischen Analysen fokussiert Jessica Kunsteller auf Äußerungen von Schülerinnen und Schülern im Mathematikunterricht. Insofern es sich hierbei um mathematische Lernprozesse handelt, nutzt die Autorin zu deren Rekonstruktion die Schlussformen Abduktion, Deduktion und Induktion, die sich bereits im Kontext von Arbeiten zum entdeckenden Lernen, zum Modellieren, zur Begriffsbildung und zum Problemlösen erfolgreich haben anwenden lassen. Gerade weil die Prozesse des Entstehens neuer Erkenntnisse für didaktische Betrachtungen von entscheidender Bedeutung sind, muss ein Verständnis von Begriffen wie Logik, Schlussform und Schluss angewendet werden, welches der Philosophie und nicht der Mathematik entspringt.

Beide Aspekte, Ähnlichkeiten und philosophische Logik, verdeutlichen, dass in dem vorliegenden Band keine fertigen mathematischen Produkte analysiert werden, sondern die Entstehensprozesse von Erkenntnissen in den Blick genommen werden. Natürlich würde ein Mathematiker bei einer Veröffentlichung mit den Produkten seiner Erkenntnis anders umgehen: „Er macht es wie der Fuchs, der seine Spuren im Sande mit dem Schwanz verwischt." (Abel über Gauß, zitiert nach Meschkowski 1990, S. 116)

Neben verschiedenen Ansätzen aus der Mathematikdidaktik nutzt Jessica Kunsteller für die Analyse von Phänomenen beim Sprachgebrauch gezielt die Bezugsdisziplinen Philosophie und Literaturwissenschaft. Zum einen handelt es sich im Kontext der Betrachtung von Ähnlichkeiten (und ihre Bedeutung für das Mathematiklernen) um die Sprachspielphilosophie von Ludwig Wittgenstein, zum anderen hinsichtlich der Bezugsdisziplin Literaturwissenschaft um die Begriffe Analogien und Metaphern. Jessica Kunsteller nutzt diese und verbindet sie mit einem bereits etablierten Begriffsnetz, so dass eine neue Perspektive entsteht, die nicht nur dem Verstehen mathematischer Lernprozesse dienlich ist, sondern auch deren Konstruktion.

Köln im Wintersemester 2017/18

Bruner, J. (1960). *The process of education*. Cambridge: Harvard UP.
Hischer, Horst (2012). *Grundlegende Begriffe der Mathematik: Entstehung und Entwicklung*. Wiesbaden: Springer.
Meschkowski, H. (1990). *Denkweisen großer Mathematiker. Ein Weg zur Geschichte der Mathematik*. Erw. Auflage. Braunschweig: Vieweg.
Winter, Heinrich (1983). Über die Entfaltung begrifflichen Denkens im Mathematikunterricht. *Journal für Mathematikdidaktik*, *4(3)*, 175-204.

Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand am Institut für Mathematikdidaktik an der Universität zu Köln. Sie wurde von der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät der Universität zu Köln als Dissertation angenommen. Am 10.11.2017 fand die Abschlussprüfung als Disputation am Institut für Mathematikdidaktik statt. Der universitätsoffenen Prüfung wohnten neben den Gutachtern, Herrn Prof. Dr. Michael Meyer und Herrn Prof. Dr. Andreas Büchter, außerdem die prüfungsberechtigten Mitglieder Frau Prof.'in Dr. Christiane Reiners (Vorsitzende) und Herr Dr. Stefan Heilmann (Beisitzer) bei.

Viele Menschen waren an der Fertigstellung dieses Buches beteiligt. Einer Auswahl dieser lieben Leute möchte ich nun danken.

Zu allererst möchte ich Michael Meyer für die sehr intensive Betreuung meines Dissertationsprojektes danken. In die Betreuung hat er viel Zeit und Energie gesteckt und er hatte hier insbesondere viel Geduld bei meiner Heranführung und Einarbeitung in die logisch-philosophischen Schlussformen. Durch Michael Meyer habe ich bereits zu meiner Dortmunder Studienzeit wertvolle Einblicke in das wissenschaftliche Arbeiten erlangen können. Es ist sein wesentlicher Verdienst, dass ich mein wissenschaftliches Interesse entwickeln konnte. Ich freue mich auf unsere weitere Zusammenarbeit!
Andreas Büchter möchte ich für die Übernahme des Zweitgutachtens sowie für die inspirierenden und produktiven Gespräche danken.

Außerdem gebührt den Grundschulen und Gymnasien, an denen ich meine Untersuchung durchführen konnte, ein besonderer Dank. Trotz des üblich herrschenden Schulalltages konnte die Untersuchung realisiert werden. Ich habe mich an den jeweiligen Schulen sehr willkommen und wohl gefühlt. Ein ganz besonderer Dank gilt den vielen Schülerinnen und Schülern! Vielen Dank für die tolle Zeit an euren Schulen!

Wissenschaftliches Arbeiten lebt vom Austausch mit anderen Kolleginnen und Kollegen. Im Rahmen von Vorträgen und Transkriptanalysen in Kolloquien sowie Mitarbeiterseminaren ergaben sich hierdurch viele Anregungen und tolle Feedbacks. Vielen Dank an die Teilnehmerinnen und Teilnehmer des Mitarbeiterseminares am Institut für Mathematikdidaktik sowie den Teilnehmerinnen und Teilnehmern an der Köln-Münster-Tagung. Insbesondere möchte ich mich bei Herrn Prof. Dr. Horst Struve und Herrn Prof. Dr. Jörg Voigt für die produktiven Gespräche und Rückmeldungen bedanken.

Des Weiteren möchte ich den aktuellen und ehemaligen Mitgliedern der AG Meyer danken. Vielen Dank, dass ich im Rahmen unserer wöchentlichen Treffen Forschungsergebnisse vorstellen und mit euch diskutieren konnte. Danke für eure Muße, dass ihr auch das x-te Transkript auf Ähnlichkeiten mit mir untersucht habt.

Weiterer Dank gilt den studentischen Hilfskräften, die mich bei der Erstellung der Transkripte und/oder Korrekturlesen der Arbeit unterstützt haben. Besonders hervorheben möchte ich hier Anna Breunig und Jan Kieselhöfer.

Dr. Simeon Schlicht, der mich seit meinem ersten Tag in Köln begleitet hat, möchte ich für die vielen guten Gespräche, Ratschläge etc. bedanken. Vielen Dank für deine Begleitung dieser Reise!

Auch meinen Eltern, meinem Bruder und meinen Großeltern gebührt an dieser Stelle besonderer Dank. Ihr wart mir zum einen eine starke Schulter an die ich mich anlehnen konnte, wenn es mal nicht so gut lief und zum anderen konnten wir uns immer wieder zusammen über Erfolge freuen. Danke, dass ich immer wieder Kraft bei euch tanken und die Arbeit auch mal beiseite legen konnte. Kurz und knapp: Vielen Dank für eure Unterstützung während der Studien- und Promotionszeit!

Malin Funda möchte ich für das zahlreiche Korrekturlesen von deutschen und englischen Artikeln sowie der vorliegenden Arbeit danken. Unsere Freundschaft begleitet uns seit Kindheitstagen. Vielen Dank für dein stets offenes Ohr und deine Ratschläge, die mich auch während der Promotionszeit begleitet haben. Es ist schön dich als Freundin zu haben!

Theresa Schneider, auch du hast die Fertigstellung dieses Buches mitbegleitet. Vielen Dank für deine Unterstützung jenseits des Forschungsalltags. Danke, dass du mir immer wieder zugehört hast und auch immerzu versucht hast mich abzulenken.

Auch andere gute Freunde und Bekannte haben diese Reise begleitet. Diese namentlich zu nennen, würde den Rahmen sprengen. Euch allen möchte ich für eure Unterstützung danken. Es ist unfassbar toll euch als Freunde zu haben.

Köln, im Wintersemester 2017/18 Jessica Kunsteller

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

George Polya (1949) pointiert die Bedeutung des Erkennens und Nutzens von Ähnlichkeiten in der Mathematik wie folgt:

> „Man kann sich kaum eine absolut neue Aufgabe vorstellen, die jeder früher gelösten Aufgabe unähnlich ist und keinerlei Beziehungen zu ihr aufweist; wenn aber eine solche Aufgabe existieren könnte, so würde sie unlösbar sein." (S. 154)

Was vermag dieses Zitat nach Polya auszudrücken? Michael Hoffmann (1999) betont, dass es keine „creatio ex nihilo" (S. 288) geben könne. Demzufolge knüpfen neue Herausforderungen an alte Ansätze an. Infolgedessen kann Polyas Zitat so gelesen werden, dass die Lösung einer Aufgabe immer vor dem Hintergrund von *ähnlichen* bereits gelösten Aufgaben betrachtet wird.

Der Ausdruck *Ähnlichkeiten* findet bereits in verschiedenen Disziplinen Verwendung: In der Geometrie wird er z.B. bei Ähnlichkeitsabbildungen verwendet. Ein Dreieck ΔABC, das um den Faktor k gestreckt bzw. gestaucht wird, ist ähnlich zu seinem Bilddreieck, insofern die Streckenverhältnisse der Punkte und der korrespondierenden Bildpunkte übereinstimmen sowie die Winkel der Dreiecke gleich groß sind. Weitere Ähnlichkeitsbeziehungen zeigen sich bei (Gruppen-)Homomorphismen, welche bereits durch die wörtliche Übersetzung des griechischen Wortes *homos* (gleich, ähnlich) angedeutet werden. Ein Homomorphismus ist eine strukturerhaltende Abbildung auf eine Menge mit einer Verknüpfung in eine Menge mit einer Verknüpfung. Zwei Verknüpfungsgebilde verhalten sich insofern ähnlich zueinander, als dass die Bezeichnung der Elemente und die Bezeichnung der Verknüpfung irrelevant sind, da in der Gruppentafel die gleichen Muster vorzufinden sind. Weiterhin werden Ähnlichkeiten in der Literaturwissenschaft (Poetik und Rhetorik), der Psychologie sowie der Mathematikdidaktik thematisiert. In diesem Zusammenhang wird dem Erkennen und Nutzen von Ähnlichkeiten beispielsweise im Kontext vom „analogen Denken" (z.B. Aßmus 2013), dem „reasoning by analogy" (z.B. English & Sharry 1996), „Analogieschlüssen" (z.B. Coenen 2002) und „metaphors" (z.B. Pimm 1987, Sfard 2008) eine bedeutende Rolle zugesprochen. Das Erkennen und Nutzen von Analogien und Metaphern wird etwa als bedeutende heuristische Strategie für das Mathematiklernen beschrieben, indem neue Zusammenhänge durch alte gesehen werden. So schreibt z.B. Heinrich Winter (1991):

> „Wir haben einen neuen Bereich B [...]. Die Analogie besteht darin, einen bekannten Bereich A aufzuspüren (‚Wo gab es schon einmal etwas Ähnliches? Woran erinnert dich das? ...'), der irgendwie mit dem Bereich B verwandt ist." (S. 47)

Weiterhin betont Norma Presmeg (1997, S. 268), dass Metaphern fortwährend im Mathematikunterricht verwendet werden, ohne dass die Lehrkörper oder Lernenden ihre Verwendung erkennen müssen. Darüber hinaus finden sich auch in den Schulbüchern

J. Kunsteller, *Ähnlichkeiten und ihre Bedeutung beim Entdecken und Begründen*,
Kölner Beiträge zur Didaktik der Mathematik und der Naturwissenschaften,
https://doi.org/10.1007/978-3-658-23039-5_1

Aufgabentypen, die als „Analogieaufgaben“ (z.B. Eidt et al. 2007: Denken und Rechnen 1, S. 45) „Verwandte Aufgaben“ (z.B. Rinkens, Hönisch & Träger 2010: Welt der Zahl 1, S. 82) und „Aufgabenfamilien“ (z.B. Deutschmann et al. 2012: Flex und Flo 1, S. 68f) bezeichnet werden. Auch hier sollen Lernende Ähnlichkeiten zwischen Aufgaben wie $3 + 2$ und $13 + 2$ erkennen und diese als Strategie nutzen, um Aufgaben in größeren Zahlenräumen lösen zu können (vgl. z.B. Buschmeier et. al. 2011: Denken und Rechnen 1. Lehrermaterialien, S. 177). Bei den thematisierten Begriffen werden verschiedene Formen von Ähnlichkeiten deutlich. Eine Analogie wie $2:4 :: 4:8$ (gelesen als: „2 verhält sich zu 4, genauso wie 4 zu 8“) bezieht sich auf gleiche Zahlenverhältnisse, insofern z.B. die Verdopplung der ersten Komponente die zweite ergibt. Außerdem beinhalten beide Seiten die Zahl 4. Es können somit Ähnlichkeiten in der Semantik und auch zwischen den Schriftzeichen festgestellt werden.

Der Philosoph Ludwig Wittgenstein (1889-1951) spricht in seinem Spätwerk, den Philosophischen Untersuchungen (Erstveröffentlichung 1953), ebenso von Ähnlichkeitsbeziehungen, die er als *Familienähnlichkeiten* bezeichnet. Der Begriff Familienähnlichkeiten gründet sich auf Wittgensteins Sprachspielphilosophie, die bereits in der Mathematikdidaktik eingesetzt wurde (z.B. Bauersfeld 1995). Wittgenstein versuchte in seinem Frühwerk, dem Tractatus Logico-Philosophicus (Erstveröffentlichung 1921), die Sprache in ihre Elementarteile zu zerlegen, um einen axiomatischen Aufbau der Sprache zu beschreiben. Er stellte jedoch selbst fest, dass dies nicht möglich ist (vgl. Schroeder 2009, S. 21). Darauf folgte seine Sprachspielphilosophie, in der er den Sprachgebrauch mit Spielen vergleicht. Einen Grund für den Wechsel seiner philosophischen Ideen bildete der Begriff Familienähnlichkeiten. Der Ausdruck Familienähnlichkeiten bezieht sich auf Phänomene in der Sprachverwendung: Familienmitglieder innerhalb einer Familie ähneln sich untereinander hinsichtlich äußerlicher und charakterlicher Eigenschaften. Gemäß Wittgensteins Vergleich des Sprachgebrauchs und von Spielen liegen solche Familienähnlichkeiten auch zwischen verschiedenen Spielen vor: Fußball und Tennis ähneln einander etwa darin, dass es Ballspiele sind. Reguläre Schachspiele implizieren jedoch keine Spielzüge mit einem Ball und kennzeichnen sich dennoch durch Ähnlichkeiten zum Fußball und Tennis, da die Spiele einen Gewinner oder Verlierer hervorbringen können oder auch aus unterhaltenden oder kommerziellen Gründen gespielt werden können. Gemäß Wittgenstein können solche Familienähnlichkeiten auch zwischen verschiedenen Zahlen festgestellt werden (PU §68). Solche Ähnlichkeiten teilen etwa die Zahlen 6 und 27, da beide Zahlen natürliche Zahlen sind, beide im Hunderterraum liegen und beide als ein Vielfaches von 3 dargestellt werden können. Die Verwendung solcher Ähnlichkeiten wird für die beschriebenen Phänomene ersichtlich. Hieraus ergibt sich die Frage, in welcher Hinsicht

Ähnlichkeiten bei mathematischen Lehr- und Lernprozessen bzw. beim Entdecken und Begründen von Bedeutung sind.

In der vorliegenden Arbeit wird mittels des erarbeiteten Ähnlichkeitsbegriffs ein weiterer Begriff zur Analyse von *Entdeckungs-* und *Begründungsprozessen* im Mathematikunterricht bereitgestellt. Das Entdecken und Begründen nehmen als typische mathematische Tätigkeiten einen hohen Stellenwert im Mathematikunterricht ein. Außerdem sind sie sowohl im Lehrplan der Grundschule als auch im Lehrplan der Sekundarstufe I und II als Unterrichtsprinzip des Entdeckenden Lernens sowie als prozessbezogene Kompetenz des Argumentierens präsent (MSB NRW 2008, S. 55-57; MSB NRW 2014, S. 12-16). Entdeckungs- und Begründungsprozesse wurden in verschiedenen mathematikdidaktischen Arbeiten in den Blick genommen. Zur Analyse und Rekonstruktion von Schülerargumenten erwies sich das Argument-Schema nach Toulmin (z.B. Schwarzkopf 2000, Meyer 2007) als sinnvoll, das sich auf den Ideen des amerikanischen Philosophen Stephen Edelston Toulmin (1922-2009) gründet. Basierend auf der Philosophie des amerikanischen Philosophen Charles Sanders Peirce (1839-1914) arbeitete Meyer (2007) Schemata zur *Abduktion*, *Deduktion* und *Induktion* zum Verstehen mathematischer Lehr- und Lernprozesse heraus.[1] Diese ermöglichen u.a. die Rekonstruktion von Entdeckungen, die Lernende tätigen. Weiterhin konnte mittels der logisch-philosophischen Schlussschemata (Schemata zur Abduktion, Deduktion und Induktion) das Verhältnis zwischen dem Entdecken und dem Begründen präzisiert werden.

Vereinzelte Autoren entwickelten Strukturschemata über die Nutzung von Analogien. So fertigte zum Beispiel der Mathematikdidaktiker George Polya (1963) ein Schema zur „Folgerung auf Grund von Analogie“ (S. 21) an. Der Literaturwissenschaftler Hans Georg Coenen (2002) stellte ein Schema zur „argumentativen Nutzung einer Analogie“ (S. 168) bzw. einem „Analogieschluss“ (ebd.) auf. Diese Schemata ermöglichen jedoch keine Analyse von Schüleräußerungen hinsichtlich der Nutzung von Analogien. Des Weiteren stellt sich dabei die Frage, ob es sich bei der Nutzung von Analogien um eine weitere elementare Schlussform handelt.

Die bisherigen Ausführungen deuten an, dass in verschiedenen Wissenschaften (Literaturwissenschaft, Psychologie, Mathematikdidaktik) Phänomene mit den Begriffen „Analogie“, „Analogieschluss“, etc. bezeichnet werden. Die Begriffe können hierbei mitunter die gleichen Phänomene beschreiben und sich dabei nur im Wortlaut unterscheiden oder auch weiter bzw. enger gefasst werden. Unter der Verwendung des erarbeiteten Ähnlichkeitsbegriffs in Anlehnung an Wittgenstein werden diese Begriffe systematisiert, indem im Verlauf der Arbeit aufgezeigt wird, dass sämtliche Anwen-

---

[1] Die logisch-philosophischen Schlussformen (Abduktion, Deduktion und Induktion) genügen nicht dem herkömmlichen Logikbegriff, wie er in der Mathematik bekannt ist. Dies wird in 2.1.2 näher ausgeführt.

dungen auf diesem Ähnlichkeitsbegriff basieren. Darüber hinaus werden die angesprochenen Strukturschemata zur Analogienutzung von Polya (1963) und Coenen (2002) mit den logisch-philosophischen Schlussformen verbunden. Hierzu wird ein Schema entwickelt mittels dessen die Analogienutzung von Lernenden rekonstruiert werden kann. Die Nutzbarkeit dieses Schemas wird im empirischen Teil überprüft.

Zunächst werden die logisch-philosophischen Schlussformen nach Meyer (2007) in Anlehnung an Peirces Philosophie vorgestellt. Die Abduktion stellt die zentrale Schlussform des Entdeckens und die Deduktion die zentrale Schlussform des Begründens dar. Mittels des Abduktionsschemas werden die Entdeckungen im empirischen Teil dieser Arbeit rekonstruiert. Zur Rekonstruktion von Begründungen wird das Toulmin-Schema verwendet, welches ebenfalls erläutert wird. Vorab werden das Entdecken und Begründen mathematikdidaktisch eingeordnet.

Im dritten Kapitel wird zunächst der Analogiebegriff des Literaturwissenschaftlers Hans Georg Coenen (2002) präsentiert. Anschließend werden die bereits thematisierten Begriffe wie „Analogie“, „Analogieschluss“, „reasoning by analogy“, „Metapher“ aus der Psychologie und der Mathematikdidaktik mit Coenens Konzept gefasst, um einen fächerübergreifenden Kern herauszuarbeiten. Coenen differenziert zwei Arten von Analogien. Mittels dieser Differenzierung wird aufgezeigt, dass es keiner Unterscheidung zwischen Analogien und Metaphern bedarf. Außerdem wird unter der Bezugnahme der logisch-philosophischen Schlussformen ein Schlussschema für die Analogienutzung entwickelt, welches die Analyse von Schüleräußerung zulässt.

Im vierten Kapitel wird aufgezeigt, weshalb der Mathematikunterricht als *Sprachspiel* beschrieben werden kann. Weiterhin wird ausgeführt, inwiefern das Entdecken und Begründen als Elemente dieses Sprachspiels aufgefasst werden können. Nachfolgend wird der Begriff *Familienähnlichkeiten* aus den Philosophischen Untersuchungen dargelegt. Der erarbeitete Ähnlichkeitsbegriff wird im Verlauf des Kapitels als Relation *x ist ähnlich zu y* beschrieben. Es wird aufgezeigt, dass diese Relation die Eigenschaften einer Äquivalenzrelation erfüllt. Basierend auf dem herausgearbeiteten Ähnlichkeitsbegriff wird anschließend untersucht, welche Bedeutung Ähnlichkeiten bei den logisch-philosophischen Schlussformen zukommt. Außerdem wird der Zusammenhang zwischen Ähnlichkeiten und den im dritten Kapitel thematisierten Analogien bzw. Metaphern erläutert. Daran anschließend werden Beziehungen zwischen Ähnlichkeiten und weiteren Begriffen aus der Mathematikdidaktik dargelegt, bei denen nicht explizit auf das Erkennen und Nutzen von Ähnlichkeiten rekurriert wird.

In der vorliegenden Arbeit wird der interpretative Ansatz verwendet, wie er aus der Bielefelder Arbeitsgruppe Bauersfeld bekannt ist (z.B. Voigt 1984, Meyer 2007). Grundlegend für diesen Ansatz sind die soziologischen Theorien des Symbolischen Interaktionismus und der Ethnomethodologie. Im fünften Kapitel werden diese Ansätze vorgestellt und mit Wittgensteins Sprachspielphilosophie verbunden. Für die Interpretation der Szenen im empirischen Teil wird die von Voigt (1984) entwickelte „Methode der primär gedanklichen Vergleiche“ (S. 111-114; vgl. auch Jungwirth 2003, S. 193) genutzt. Des Weiteren werden der Untersuchungsplan und das –verfahren skizziert. Hierbei werden auch Probleme angesprochen, die mit der Rekonstruktion von Entdeckungen und Begründungen einhergehen können.

Der Unterrichtsversuch wurde in drei vierten (Grundschule) und zwei sechsten Schuljahren (Gymnasium) durchgeführt. In allen Schulklassen wurden jeweils vier Doppelstunden von einer Wissenschaftlerin unternommen. Es wurden Aufgaben bearbeitet, die vorrangig aus dem Gebiet der Arithmetik stammen (Konstanzgesetze, Endstellenregeln, Figurierte Zahldarstellungen). Diese Unterrichtstunden wurden video- und audiographiert. In den Analysen werden Szenen aus zwei vierten und einer sechsten Klasse verwendet.

Im ersten Analysekapitel wird untersucht, inwiefern Lernende Ähnlichkeiten beim Entdecken und Begründen nutzen. In dieser Nutzung von Ähnlichkeiten lassen sich verschiedene Arten von Ähnlichkeiten feststellen, welche anhand des Datenmaterials herausgearbeitet werden. Außerdem wird die Verwendung von Ähnlichkeiten zwischen den Entdeckungsprozessen zweier vierter Klassen miteinander verglichen.
Im zweiten Analysebeispiel wird die Nutzbarkeit des entwickelten Schemas zur Analogienutzung für die Analyse von Schüleräußerungen geprüft. Weiterhin wird die Nutzung von Ähnlichkeiten bei der Verwendung von Analogien untersucht. Überdies werden Eigenschaften der Relation *x ist ähnlich zu y* anhand von Schüleräußerungen thematisiert.

Bereits in den ersten beiden Analysen klingen Funktionen des Nutzens von Ähnlichkeiten für das Entdecken und Begründen an. Im dritten Analysebeispiel werden diese Funktionen explizit fokussiert, indem die Chancen und Gefahren des Nutzens von Ähnlichkeiten herausgestellt werden.

Im siebten Kapitel werden die Ergebnisse aus dem empirischen Teil zusammengetragen. Ausgehend von den Ergebnissen aus der Empirie werden potenzielle Konsequenzen für den Mathematikunterricht vorgestellt. Abschließend werden Ideen für weitere Studien im Bereich der Mathematikdidaktik gesammelt, die aus den gesammelten Ergebnissen resultieren.

Redaktionelle Anmerkungen:

- In dieser Arbeit wird auf die getrennte Nennung der weiblichen und männlichen Form verzichtet. Das jeweils andere Geschlecht sei stets mitbedacht.
- Alle Zitate entsprechen der Originalfassung. Dies impliziert die Kursivschreibweise in Zitaten.
- Alle Namen der Lernenden wurden in der Arbeit mit Pseudonymen versehen.
- Die Nummerierung der Abbildungen bzw. der Tabellen orientiert sich an den jeweiligen Kapiteln und erfolgt fortlaufend numerisch.

2 Entdecken, Begründen und Prüfen

Der amerikanische Philosoph Charles Sanders Peirce (1839-1914) arbeitete die Abduktion neben der Deduktion und Induktion als dritte elementare Schlussform heraus. Meyer (2007) hat diese Begriffe zum Verstehen und zur Rekonstruktion mathematischer Lehr- und Lernprozesse bereitgestellt, indem er u.a. entsprechende Schlussschemata entwickelte, die auf der Theorie nach Peirce basieren. In der vorliegenden Arbeit wird der philosophische Diskurs um Peirce nicht erläutert. Vielmehr werden die Begriffe *Abduktion*, *Deduktion* und *Induktion* sowie die von Meyer dazu entwickelten Schlussschemata dargelegt. Diese werden zum einen zur begrifflichen Festlegung und Ausschärfung weiterer Begriffe genutzt und zum anderen als Schlussformen zur Rekonstruktion von Entdeckungs- und Begründungsprozessen in der Empirie genutzt. Vorab werden das Entdecken und Begründen mathematikdidaktisch eingeordnet.

2.1 Entdeckendes Lernen

Seit etwa den 1980er Jahren hat sich im deutschsprachigen Raum ein Paradigmenwechsel hinsichtlich des Lehrens und Lernens mathematischer Inhalte vollzogen. Der Mathematikunterricht solle nach dem Prinzip des *Entdeckenden Lernens* ausgerichtet werden. Im nachfolgenden Kapitel wird das Entdeckende Lernen zunächst aus einer pädagogisch-didaktischen Perspektive betrachtet. Hierbei wird u.a. eine Begriffsbeschreibung des Entdeckenden Lernens vorgestellt. Daraufhin wird das Entdeckende Lernen mit der Theorie der Abduktion nach Meyer (2007, 2015) beschrieben. Abschließend wird der Begriff Entdeckendes Lernen präzisiert und die vormalige Begriffsbeschreibung mittels der Theorie der Abduktion gedeutet. Weiterhin wird die Nutzung der Theorie der Abduktion für die mathematikdidaktische Forschung dargelegt.

2.1.1 Entdeckendes Lernen aus pädagogisch-didaktischer Sicht

Im deutschsprachigen Raum wurde die Forderung der Unterrichtsgestaltung nach dem Prinzip des Entdeckenden Lernens insbesondere durch die Forschungsarbeiten von Winter (1989) und Wittmann (1995) geprägt. Winter (1989) pointiert die Besonderheit des Entdeckenden Lernens für mathematische Lernprozesse:

> „Das Lernen von Mathematik ist umso wirkungsvoller [...] je mehr es im Sinne eigener aktiver Erfahrungen betrieben wird, je mehr der Fortschritt im Wissen, Können und Urteilen des Lernenden auf selbstständigen entdeckerischen Unternehmungen beruht.“ (S. 1)

Winter spricht sich für das Lernen als einen aktiven Prozess aus, der sich durch die Eigenständigkeit von Lernenden auszeichnet. Wittmann (1995, S. 15f) akzentuiert

J. Kunsteller, *Ähnlichkeiten und ihre Bedeutung beim Entdecken und Begründen*,
Kölner Beiträge zur Didaktik der Mathematik und der Naturwissenschaften,
https://doi.org/10.1007/978-3-658-23039-5_2

ebenso die Eigenständigkeit von Lernenden beim Entdeckenden Lernen. Er arbeitet unter anderem heraus, welche Rolle die Lehrpersonen hierbei einnehmen sollen:

> „[...] die Hauptaufgabe des Lehrers im aktiv-entdeckenden Unterricht (liegt, J.K.) nicht in der Vermittlung des Stoffes, sondern in der Organisation der Schüleraktivitäten. Die Schüler sollen so weit wie möglich selbst die Initiative ergreifen und sich aktiv mit dem Stoff auseinandersetzen. [...] Entscheidend ist und bleibt aber, dass der Lehrer neben diesen notwendigen Vorgaben gute Aufgaben stellt und den Kindern Zeit lässt, ihre eigenen Ideen im Zusammenhang zu entwickeln. Er darf erst dann wieder eingreifen, wenn die Kinder selbst Lösungen oder zumindest Lösungsansätze gefunden haben, und er muss die Beiträge der Kinder für seine weiteren Impulse nutzen.“ (ebd., S. 15f)

Wittmann verdeutlicht, dass Lehrer im Unterricht Angebote für ihre Lernenden schaffen sollen, die es ermöglichen, dass diese sich aktiv mit dem Lernstoff beschäftigen können.

In aktuelleren Praxisanregungen für Lehrkräfte der Sekundarstufe I sprechen sich Leuders et al. (2011) für *sinnstiftendes Lernen* aus. Sie gründen das sinnstiftende Lernen unter anderem auf den Ansatz des „genetischen Lernens“ (ebd., S. 3). Im Zusammenhang des genetischen Lernens thematisieren sie die Bedeutung des Entdeckenden Lernens:

> „Schülerinnen und Schüler entwickeln im Rahmen von Problemsituationen aktiv mathematische Konzepte, entdecken Zusammenhänge und erfahren dadurch Zwecke und Entstehungszusammenhänge der Konzepte.“ (ebd., S. 3)

Im Sinne des sinnstiftenden Lernens werden mathematische Begriffe in einen Kontext eingebunden und an einer Problemfragestellung ausgerichtet. Von besonderer Relevanz sei hierbei, dass die Lernenden einen Begriff „selbsttätig und aktiv entwickeln“ (ebd., S. 6).

Was kann aber unter dem Begriff *Entdeckung* verstanden werden? Der Psychologe Bruner (1981) beschreibt eine Entdeckung wie folgt:

> „[...] (Eine, J.K.) Entdeckung (ist, J.K.) ihrem Wesen nach ein Fall des Neuordnens oder Transformierens des Gegebenen [...]. Dies so, dass man die Möglichkeit hat, über das Gegebene hinauszugehen, das so zu weiteren neuen Einsichten kombiniert wird.“ (S. 16)

Im Wesentlichen wird zur Realisierung einer Entdeckung an bisherige Wissensbestände angeknüpft, welche zu Neuem erweitert werden. Mithilfe dieser Begriffsbeschreibung werden nun *Spiegelaufgaben* analysiert, die von Sundermann und Selter (2006, S. 96) in aktuelleren Praxishinweisen für Lehrende der Grundschule als Aufgabentyp eingeordnet werden, die das Entdeckende Lernen anregen sollen. Spiegelaufgaben beziehen sich auf einen Aufgabentyp, bei dem von einer dreistelligen Zahl (abc, wobei

$c < a$) jene Zahl subtrahiert wird, deren Ziffernfolge umgekehrt wurde (cba) (ebd., S. 97):

853	691	716
-358	-196	-617

Abbildung 2.1: Auszug aus Sundermann und Selter (2006, S. 98) zur Subtraktion von Spiegelzahlen

Werden mehrere solche Aufgaben gerechnet, so könnten Lernende z.B. Folgendes entdecken: Es gibt gleiche und verschiedene Ergebnisse, die Ergebnisse sind Vielfache von 99, 99 ist das kleinstmögliche Ergebnis und 792 ist das größtmögliche Ergebnis. Es kann nun der Frage nachgegangen werden, was unter dem „Neuordnen" gemäß Bruner (1981, S. 16) verstanden werden kann. Wird die Reihenfolge des Minuenden neu geordnet? Oder wird die Subtraktion neu geordnet? Was kann Bruner folgend als „Transformieren" (ebd.) gedeutet werden? Welcher Teil der Aufgabe kann als das „Gegebene" (ebd.) und was als „neue Einsicht" (ebd.) gelesen werden? Was kann hier den Anlass dazu geben, dass Lernende erkennen, dass das Subtrahieren von dreistelligen Spiegelzahlen ein Vielfaches von 99 ergibt? Eine Antwort auf solche Fragen bietet die Theorie der Abduktion. Mittels der Theorie der Abduktion können Entdeckungsprozesse begrifflich gefasst werden. Die Theorie der Abduktion wird nachfolgend nach Meyer (2007, 2015) dargelegt.

2.1.2 Entdeckendes Lernen aus logisch-philosophischer Sicht: Die Schlussform der Abduktion

Meyer (2007) entwickelte das Abduktionsschema, welches die Rekonstruktion von Entdeckungsprozessen Lernender ermöglicht. Das Abduktionsschema basiert auf den Gedanken des amerikanischen Philosophen Ch. S. Peirce. Peirce arbeitete die Schlussform der Abduktion als dritte elementare Schlussform neben der Deduktion und der Induktion heraus. Am Ende wird sich zeigen, dass die Abduktion als einzige logisch-philosophische Schlussform die Rekonstruktion neuer Erkenntnisse ermöglicht (Meyer 2007, S. 54). Das Abduktionsschema wird nachfolgend in Anlehnung an Meyer (2007, 2015) erläutert.

Eine Abduktion wird bei Meyer (2007) in Anlehnung an Peirce als derjenige Schluss gefasst „mit dem von einem Resultat und einem Gesetz auf einen Fall geschlossen wird, der dem Resultat zu Grunde liegen kann" (S. 40). *Resultat*, *Gesetz* und *Fall* bilden funktionale Bestandteile einer Abduktion. Unter einem Gesetz ist ein Ursache-Wirkungs-Zusammenhang zu verstehen, der meist in einer „Wenn..., dann..."-Form verbalisiert wird. Entsprechend können auch mathematische als Gesetze verstanden werden. Während der Fall ein konkretes Element des Antezedens des Gesetzes darstellt, bezeichnet das Resultat ein konkretes Element der Konsequenz des Gesetzes.[2] Das Gesetz bildet entsprechend die allgemeine Verbindung zwischen Fall und Resultat. Gesetze können aus fachlicher Sicht auch falsch sein, insbesondere wenn Schüleräußerungen rekonstruiert werden. Die entscheidende Bedingung, die an das zu abduzierende Gesetz gestellt wird, ist, dass das Phänomen (Resultat) eine notwendige Folgerung aus diesem Gesetz ist, sodass dieses Gesetz zur Klärung des Phänomens (Resultats) herangezogen werden kann. Meyer (2015) beschreibt zwei Schemata der Abduktion (s. Abbildung 2.2), um zum einen den kognitiven Prozess einer Entdeckung und zum anderen die Entdeckung in der öffentlichen Plausibilisierung zu differenzieren. Diese werden nun einzeln erläutert.

Phänomen (Resultat): $R(x_1)$		Resultat: $R(x_1)$	
Gesetz:	$\forall i: F(x_i) \Rightarrow R(x_i)$	Gesetz:	$\forall i: F(x_i) \Rightarrow R(x_i)$
Fall:	$F(x_1)$	Fall:	$F(x_1)$

Abbildung 2.2: Die von Meyer (2015) beschriebenen Schemata der Abduktion. Links: „Schema der kognitiven Generierung einer Abduktion“ (S. 16) und rechts „Schema zur öffentlichen Plausibilisierung einer Abduktion“ (ebd.).[3]

Basierend auf Peirces Philosophie und den Überlegungen der deutschen Logiker Hempel und Oppenheim schreibt Meyer (2015) über den kognitiven Prozess bei einer Entdeckung, „dass wir bei einer Abduktion ausgehend von einem beobachteten Phänomen auf ein allgemeines Gesetz und einem das Phänomen erklärenden konkreten Fall schließen“ (S. 14) (s. Abbildung 2.2, rechts). Ausgangspunkt einer Entdeckung

[2] Umgangssprachlich ausgedrückt bezeichnet das *Antezedens* den „Wenn-Teil“ eines Gesetzes und die *Konsequenz* den „Dann-Teil“ eines Gesetzes.

[3] In den Schemata werden u.a. die Variable x und der Index i verwendet. Meyer und Voigt (2009) erläutern die formale Schreibweise wie folgt: „Unsere formale Darstellung der Abduktion schränkt die Universalität der Schlussform, wie sie in der Philosophie bedeutsam ist, ein. Jedoch hat unsere Spezifizierung den Vorteil, dass die Anwendbarkeit im Bereich der Schulmathematik erleichtert wird. Fast alle Sätze der Schulmathematik lassen sich in die Form $\forall x: F(x) \Rightarrow R(x)$ (hier: $\forall i: F(x_i) \Rightarrow R(x_i)$, J.K.) transformieren, wenn mitbedacht wird, dass Äquivalenzaussagen als Kombinationen von Implikationen verstanden werden. Der Gültigkeitsbereich der Implikation im Gesetz soll sich auf eine Grundmenge erstrecken, die in der Regel unendlich ist. Dagegen steht die Variable x_0 (hier: x_1, J.K.) für ein Element dieser Grundmenge oder für eine endliche Teilmenge der Grundmenge oder für eine Klasse von Elementen der Grundmenge.“ (S. 35) Die Variable x bezieht sich auf *Subjekte* (z.B. mathematische Objekte). In Anlehnung an das hier ausgewählte Schema aus Meyer (2015, S. 16) wird in dieser Arbeit ebenfalls der Laufindex i verwendet, um im weiteren Verlauf der Arbeit zwischen speziellen Subjekten (z.B. x_1) und der Klasse von Subjekten zu differenzieren (s. 2.2.1 und 4.3). Der Laufindex i wird relativ zur Grundmenge der Subjekte gewählt. Beispielsweise kann der Laufindex natürliche Zahlen bezeichnen, sofern die Grundmenge mittels eben dieser Zahlen abzählbar ist. Wenn eine solche Abzählbarkeit jedoch nicht vorliegt, wäre ein anderer Zahlbereich relativ zu i zu wählen.
Die Variable F bezeichnet das Prädikat des Falls relativ zum Gesetz und R das Prädikat des Resultats relativ zum Gesetz.
Die hier thematisierten Variablen aus dem Abduktionsschema werden auch im Deduktions- und Induktionsschema verwendet (s. 2.2.1, 2.3 und 4.3). Die drei Schlussformen bestehen aus den gleichen Bestandteilen und unterscheiden sich lediglich durch die Art des Schlusses.

bildet somit die Beobachtung eines (überraschenden) Phänomens. Wird für dieses Phänomen eine Ursache gefunden, wird das Phänomen zum Resultat in der Abduktion. Das beobachtete überraschende Phänomen wird Meyer (ebd., S. 15) folgend gleichzeitig durch das Gesetz und den Fall erklärt: Der Fall kann nicht nach dem Gesetz erfasst werden, da der Fall bereits im Antezedens des Gesetzes enthalten ist. Außerdem kann der Fall nicht vor dem Gesetz erkannt werden, da der Fall durch das Gesetz erschlossen wird. Gemäß Meyer „ist das Gesetz ein Teil der Erklärung und nicht eine Prämisse des kognitiv zu vollziehenden Schlusses" (ebd.). Die Beobachtung eines (überraschenden) Phänomens bildet demnach die einzige Prämisse für den kognitiven Prozess einer Entdeckung.[4] Entsprechend kann der kognitive Prozess der Entdeckung nicht logisch erklärt werden und kann mit der Metapher eines „Geistesblitzes" (Meyer 2007, S. 43) verglichen werden. Das vormalige zu erklärende Phänomen hat somit eine „erkenntnisleitende" (Meyer 2015, S. 14) Funktion für die Abduktion.

Im Unterschied zum kognitiven Prozess der Entdeckung wird das Gesetz bei seiner öffentlichen Äußerung, also der Plausibilisierung einer Entdeckung, zumeist bereits verwendet. Dies beschreibt Meyer (2015) wie folgt: „Wir schließen dann auf der Basis der Kenntnis von Phänomen (Resultat) und Gesetz auf den zu erklärenden Fall, um diesen plausibel zu machen" (S. 15). Demzufolge wird auch das Schema abgeändert (s. Abbildung 2.2, rechts).

Lernende können ihre Entdeckungen beispielsweise durch die Explikation von Gesetzen oder durch die Angabe von Ursachen für ein beobachtetes Phänomen veröffentlichen. Die im Rahmen dieser Arbeit rekonstruierten Abduktionen werden als veröffentlichte Abduktionen mittels des rechten Schemas (s. Abbildung 2.2) rekonstruiert. Dies wird im methodischen Teil dieser Arbeit eingehender erläutert (s. Kap. 5).

Das Abduktionsschema wird nun an einem Beispiel dargestellt.

$24 \cdot 1 =$ ____
$12 \cdot 2 =$ ____
$8 \cdot 3 =$ ____
$6 \cdot 4 =$ ____
$4 \cdot 6 =$ ____
$3 \cdot 8 =$ ____
$2 \cdot 12 =$ ____
$1 \cdot 24 =$ ____

Abbildung 2.3: Aufgaben an denen Lernende Konstanzgesetze der Multiplikation entdecken können.

Die vorliegende Aufgabe in Abbildung 2.3 wurde von Lernenden einer vierten Schulklasse bearbeitet. Bei der Besprechung der Aufgaben betonen die Lernenden, dass die

4 In der Fachmathematik wird ein *Schluss* zumeist so aufgefasst, dass der Schluss von der einen zur anderen Aussage nur mittels einer bereits bewiesenen Regel bzw. einem Satz oder einer Definition zulässig ist. Hierbei wird ausgehend von zwei Prämissen geschlossen. In der vorliegenden Arbeit werden jedoch die Entdeckungsprozesse von mathematischen Zusammenhängen in den Blick genommen bei denen das überraschende Phänomen die einzige Prämisse eines Schlusses ist. Gemäß diesen Annahmen wird ein anderes Verständnis eines Schlusses eingenommen.

Ergebnisse immer gleich sind. Die Lehrerin fragt anschließend, warum die Ergebnisse immer gleich sind. Hieraufhin antwortet Paul:

> „[...] sechs minus zwei, und eh eh vier plus zwei, dann hat man die gleich- also bei sechs, und vie- ist sechs mal vier weil da- weil das ist ja hier, direkt, nacheinander, [...] hier sind- geht es zwei runter und hier geht es dafür zwei rauf [...].“ (T 184)[5]

Bezogen auf das Abduktionsschema könnte Paul das (überraschende) Phänomen, dass die Ergebnisse der Aufgaben $6 \cdot 4$ und $4 \cdot 6$ gleich sind (Resultat der Abduktion) durch die Subtraktion bzw. Addition mit zwei zu den entsprechenden Faktoren ($(6-2) \cdot (4+2) = 4 \cdot 6$) erklären. Paul beschreibt hierdurch eine Ursache für die Produktgleichheit (Fall der Abduktion), welche er auch unabhängig von konkreten Zahlen erklärt: „zwei runter und hier geht es dafür zwei rauf“. Er veröffentlicht somit in der Situation einen neuen mathematischen Zusammenhang. Da dieser Zusammenhang zur Erklärung des Beobachteten genutzt werden kann und eine allgemeine Form hat, lässt er sich als (ursächliches) Gesetz in der öffentlich werdenden Abduktion verstehen: Wenn der erste Faktor „zwei runter geht“ und der zweite Faktor „zwei rauf“ geht, dann bleibt das Produkt gleich.

Resultat:	Die Ergebnisse der Rechnungen $6 \cdot 4$ und $4 \cdot 6$ sind gleich.
Gesetz:	Wenn der erste Faktor „zwei runter geht“ und der zweite Faktor „zwei rauf“ geht, dann bleibt das Produkt gleich.
Fall:	$(6-2) \cdot (4+2) = 4 \cdot 6$

Abbildung 2.4: Pauls rekonstruierte Abduktion

Das von Paul generierte Gesetz ist aus normativer Sicht fachlich nicht tragfähig, da es nur dann Gültigkeit besitzt, wenn das gegensinnige Verändern mittels der Differenz der Faktoren erfolgt.

Jakob benennt im weiteren Verlauf des beschriebenen Unterrichts eine andere Erklärung für die Produktgleichheit der ersten beiden Terme:

> „also, das- diese Zahl *(zeigt auf „24“, Aufg. 24 ·1)* .. die 24, die wird ja jetzt halbiert das sind- das heißt das sind zwölf, diese Zahl wird aber verdoppelt *(zeigt auf „1“, Aufg. 24 ·1)* [...]“ (T 218)

Mit dem Abduktionsschema kann Jakobs Äußerung so rekonstruiert werden, dass er die Produktgleichheit der ersten beiden Terme (Resultat) durch die jeweilige Veränderung der ersten beiden „Zahlen“ entlang des ersten und zweiten Faktors erklärt. Durch die Halbierung bzw. Verdopplung der ersten bzw. zweiten „Zahl“ des Faktors des ersten Terms erhält man den ersten bzw. zweiten Faktor des zweiten Terms: $(24:2) \cdot (1 \cdot 2) = 12 \cdot 2$ (Fall). Das Gesetz ergibt sich durch die Verallgemeinerung von Fall

[5] Die Schüleräußerungen, die im Rahmen dieses Teilkapitels zitiert werden, finden sich in Transkript A (s. Anhang).

und Resultat: Wenn die „Zahl“ des ersten Faktors halbiert bzw. mit zwei dividiert wird und die „Zahl“ des zweiten Faktors verdoppelt bzw. mit zwei multipliziert wird, dann bleibt das Produkt gleich.

Resultat:	Die Ergebnisse der Rechnungen $24 \cdot 1$ und $12 \cdot 2$ sind gleich.
Gesetz:	Wenn die „Zahl“ des ersten Faktors mit zwei dividiert wird und die „Zahl“ des zweiten Faktors mit zwei multipliziert wird, dann bleibt das Produkt gleich.
Fall:	$(24:2) \cdot (1 \cdot 2) = 12 \cdot 2$

Abbildung 2.5: Jakobs rekonstruierte Abduktion

Die ausgewählten Schüleräußerungen verdeutlichen, dass das Phänomen der Produktgleichheit durch verschiedene Ursachen erklärt werden kann. Hierdurch wird der hypothetische Charakter der Abduktion ersichtlich.

Unter der Voraussetzung, dass die von Paul und Jakob generierten Gesetze vormals noch nicht thematisiert wurden, können die Abduktionen als *kreative Abduktionen* (Meyer 2007, S. 47; s. auch Eco 1985, S. 301) eingeordnet werden. Wäre das Gesetz den Lernenden bereits zuvor bekannt gewesen und im Unterricht thematisiert worden, müssten die Lernenden dieses nun lediglich assoziieren. Wenn die bekannten Gesetze zur Klärung des beobachteten Phänomens „quasi auf der Hand liegen“ (Meyer 2007, S. 46) wird von einer *übercodierten Abduktion* gesprochen (ebd., s. auch Eco 1985, S. 299f). Würden die Lernenden jedoch verschiedene Gesetze kennen und das passende Gesetz aus dieser Auswahl von Gesetzen heraus für die Situation auswählen, um die Phänomene als Resultate folgern zu können, so wird die Abduktion als *untercodierte Abduktion* bezeichnet (Meyer 2007, S. 46; s. auch Eco 1985, S. 300).

Inwiefern verhilft uns die Abduktion eine Entdeckung zu erklären? Eine Entdeckung umfasst entsprechend der Theorie der Abduktion zunächst die Beschreibung eines (überraschenden) Phänomens. Für dieses (überraschende) Phänomen werden anschließend Ursachen gesucht, die das Beobachtete zu erklären versuchen. Die Erklärung dieses (überraschenden) Phänomens erfordert zudem die Generierung oder Assoziation eines Gesetzes. Das Abduktionsschema ermöglicht die Rekonstruktion von Entdeckungen. Da Lernende ihre abduzierten Gesetze nicht unbedingt verbalisieren, kann mittels des Abduktionsschemas die Verwendung ihrer Gesetze rekonstruiert werden. Das (überraschende) Phänomen bildet den Ausgangspunkt einer jeden Entdeckung. Soll beispielsweise das Konstanzgesetz der Multiplikation entdeckt werden, wird die Aufgabe entsprechend gestellt, dass alle Aufgaben das gleiche Produkt ergeben. Bei den Spiegelaufgaben werden mehrere Aufgaben so gestellt, dass deren Differenzen Vielfache von 99 sind. Basierend auf der Feststellung der Produktgleichheit oder der Tatsache, dass die Differenzen Vielfache von 99 sind (Resultate der Abduktionen), werden im nächsten Schritt Ursachen gesucht, die diese (überraschenden) Phä-