

Paul Jainta · Lutz Andrews
Alfred Faulhaber · Bertram Hell
Eike Rinsdorf · Christine Streib

Mathe ist noch mehr

Aufgaben und Lösungen der Fürther
Mathematik-Olympiade 2012–2017



Springer Spektrum

Mathe ist noch mehr

Paul Jainta · Lutz Andrews · Alfred Faulhaber ·
Bertram Hell · Eike Rinsdorf · Christine Streib

Mathe ist noch mehr

Aufgaben und Lösungen der Fürther
Mathematik-Olympiade 2012–2017



Springer Spektrum

Paul Jainta
Förderverein Fürther Mathematik
Olympiade e.V.
Schwabach, Deutschland

Lutz Andrews
Röthenbach, Deutschland

Alfred Faulhaber
Schwabach, Deutschland

Bertram Hell
Altdorf, Deutschland

Eike Rinsdorf
Stein, Deutschland

Christine Streib
Karlstadt, Deutschland

ISBN 978-3-662-56650-3

ISBN 978-3-662-56651-0 (eBook)

<https://doi.org/10.1007/978-3-662-56651-0>

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Springer Spektrum

© Springer-Verlag GmbH Deutschland, ein Teil von Springer Nature 2018

Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung, die nicht ausdrücklich vom Urheberrechtsgesetz zugelassen ist, bedarf der vorherigen Zustimmung des Verlags. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Bearbeitungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Der Verlag, die Autoren und die Herausgeber gehen davon aus, dass die Angaben und Informationen in diesem Werk zum Zeitpunkt der Veröffentlichung vollständig und korrekt sind. Weder der Verlag noch die Autoren oder die Herausgeber übernehmen, ausdrücklich oder implizit, Gewähr für den Inhalt des Werkes, etwaige Fehler oder Äußerungen. Der Verlag bleibt im Hinblick auf geografische Zuordnungen und Gebietsbezeichnungen in veröffentlichten Karten und Institutionsadressen neutral.

Verantwortlich im Verlag: Andreas Rüdinger

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier

Springer Spektrum ist ein Imprint der eingetragenen Gesellschaft Springer-Verlag GmbH, DE und ist ein Teil von Springer Nature.

Die Anschrift der Gesellschaft ist: Heidelberger Platz 3, 14197 Berlin, Germany

*„Viele Male schaut der Wille durchs Fenster,
ehe die Tat durch das Tor schreitet!“
(Erasmus von Rotterdam 1469–1536)*

Geleitwort

Fördern und Fordern ist eine immer wieder gern gehörte Maxime für die Schule, insbesondere für das Gymnasium. Wie kann dies aber in der Praxis umgesetzt werden? Seit vielen Jahrhunderten sind anspruchsvolle Aufgaben der richtige Weg gewesen. Die Frage nach dem Mehrkörperproblem der Gravitation, die Millennium-Probleme, die Hilbert'schen Probleme oder viele andere haben berühmte Mathematiker beschäftigt und die Mathematik um neue Gebiete bereichert. Auch wenn diese Fragen keine Aufgaben für Schülerinnen und Schüler waren, im Sinne von Herausforderung sind gute Aufgaben das beste Rüstzeug, um Mathematik zu erlernen und zu betreiben. Die Aufgaben des Schülerwettbewerbs Fürther Mathematik-Olympiade (FüMO, fuego.de) sind die passenden Fragestellungen, die altersgemäß Schülerinnen und Schüler dazu bringen sollen, sich gefordert zu fühlen und dabei gefördert zu werden.

Nehmen wir eine Aufgabe, die zwar nicht bei FüMO gestellt worden ist, die ich aber bei einem Besuch in Frankreich gesehen habe. (In Frankreich sind Wettbewerbe Teil des Mathematikunterrichts, fast jede Schule richtet eine „rallye mathématique“ aus, nach Klassen gestaffelt und auch schulübergreifend.)

„Wie viele fünfstelligen Zahlen gibt es, deren Querprodukt 20 000 beträgt?“

Eine gute Aufgabe besitzt oft eine kurze, klare Fragestellung, wobei gelegentlich einige Begriffe unbekannt sind. Die Bearbeitung erfordert einmal Kenntnisse und auch die Freiheit, Fragen zu stellen. Hier überrascht der Begriff „Querprodukt“. Wenn man eine Quersumme kennt, kann man das Querprodukt erschließen. Oder man sucht den Begriff unter Wikipedia.

Wie geht man vor? Man beginnt mit Beispielen. Eine Null kann als Ziffer nicht vorkommen, dann ist das Querprodukt ebenfalls null. Eine fünfstelligen Zahl liegt zwischen 10 000 und 99 999, etwa 12 345, dann ist das Querprodukt 120, das ist aber viel zu klein. Oder 55 555, das Querprodukt ist 3 125, immer noch zu klein. Die Zahl 88 888 hat das Querprodukt 32 768 und ist damit größer als 20 000. Welche Teiler hat 20 000? Mit den Kenntnissen über die Primfaktorzerlegung erhält man $20\,000 = 2^4 \cdot 5^3 = 16 \cdot 125$, das sind aber sieben Ziffern. Somit muss man die Zweierpotenz umwandeln, denn die Produkte von 5 werden zweistellig. 16 ist $2 \cdot 8$

oder $4 \cdot 4$. Das bedeutet, $\{5, 5, 5, 2, 8\}$ oder $\{5, 5, 5, 4, 4\}$ kommen als Ziffern in den fünfstelligen Zahlen vor. Wie viele davon gibt es? Ich breche die Lösungssuche ab.

Was kennzeichnet eine gute Aufgabe, die Schülerinnen und Schüler herausfordert? Einmal ist es das Neue, Unerwartete in der Fragestellung. Interesse wecken unbekannte Begriffe, die man erarbeiten muss. Dann sucht man gezielt nach weiteren Beispielen, die schon viele Bedingungen erfüllen, aber nicht alle. Und schließlich eine Fallunterscheidung.

Alle diese Kriterien erfüllen die seit vielen Jahren beliebten Aufgaben der Fürther Mathematik-Olympiade. Daher ist es wichtig, in einer Publikation weitere Aufgaben an die Öffentlichkeit zu bringen.

Die Fürther Mathematik-Olympiade, Sektion Mittelfranken, ist nicht nur ein Wettbewerb in Hausaufgabenform. Alle Preisträger erleben bei einer feierlichen Preisverleihung einen anspruchsvollen und interessanten Vortrag über ein mathematisches Thema. Es ist fast schon eine Vorlesung. Dankenswerterweise tragen die Professoren und Mitarbeiter des Departments Mathematik der Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg gern vor und verschaffen so den Siegerinnen und Siegern einen ersten Kontakt mit der Hochschule. Weiterhin sind alle 70 bis 90 Preisträger auch Gast beim Department Mathematik zum „FüMO-Tag“. Diese ganztägigen Veranstaltungen kurz vor den Sommerferien in den Räumen des Departments bieten in vier Workshops neue Fragestellungen, die im Team in einer knappen Stunde bearbeitet werden. Sie werden unterstützt und begleitet von Lehramtsstudierenden, die immer wieder über das Wissen und die Fähigkeiten der interessierten Schülerinnen und Schüler überrascht sind. Ich stelle eine Aufgabe vor, die 2011 an die Teilnehmer gerichtet wurde.

Wir betrachten die Zahlenfolge $3n + 1$, die sogenannte Collatz-Vermutung: Man nehme eine beliebige ganze Zahl. Wenn sie ungerade ist, multipliziere sie mit 3 und addiere 1; wenn die Zahl gerade ist, dividiere die neue Zahl durch 2. Fahre immer so fort, bei 1 endet die Rechnung. (Es ist bis heute nicht bewiesen, dass alle Folgen mit der Zahl 1 enden!)

Finde möglichst lange Zahlenfolgen. Mit welcher Zahl sollte man beginnen?

Fühlen Sie sich als Leserin und als Leser angesprochen? Setzen Sie sich hin, beginnen Sie mit kleinen Zahlen, und Sie werden sehr verblüfft sein. Es ist auch erlaubt, einen Taschenrechner zu verwenden, denn überraschenderweise werden einige Folgenglieder ziemlich groß.

Die Förderung und Forderung mathematischen Geistes ist die Triebfeder dieses wichtigen Wettbewerbs. Mit diesem Buch können weitere Übungen und Aufgaben bearbeitet werden, die den Schülerinnen und Schülern viel Freude bereiten werden.

Karel Tschacher, Akad. Dir. a. D.

Department Mathematik, Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg
Erlangen, im Mai 2018

Einige Stimmen zum Wettbewerb

„Es ist zwar nicht sofort zu seh'n, doch im Prinzip macht Lösen schön!“ Dieser Aphorismus hätte ein tolles Wettbewerbsmotto für einen Mathematikwettkampf sein können. Der Spruch würde ebenso gut in unseren Werbealltag hineinpassen, denn wir leben in einer (Werbe-)Welt, die Kooperation und Wettbewerb immer stärker verbindet.

Auch ein Mathematikwettbewerb lebt von vielseitiger Kooperation, von vielen Ideen und Aktivitäten: von Lehrkräften, Schulleitungen, Hochschulpersonal, Studenten, finanziellen Unterstützern, Eltern – und natürlich von den Adressaten, den Schülerinnen und Schülern. Das Team der Fürther Mathematik-Olympiade weist aber ein besonderes Spezifikum aus: Eltern ehemaliger Teilnehmer arbeiten bei der Auswahl neuer Fragestellungen mit.

Und noch ein Bonmot wäre wie geschaffen für einen Mathewettstreit. Es stammt von Prof. Querulix (Pseudonym) (geb. 1946), einem deutschen Aphoristiker und Satiriker: „Wettbewerb ist die beste Medizin gegen Phantasielosigkeit und Bequemlichkeit.“

Wie schauen nun die direkt und indirekt Beteiligten an der FÜMO selbst auf den Wettbewerb?

Vorausgeschickt sei ein generelles Loblied auf die Bedeutung von Wettbewerben. Das hohe Lob zollt der amtierende Präsident der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Prof. Dr. Michael Röckner, Uni Bielefeld. Er sagt: „Für die Mathematik gilt das Gleiche wie für den Sport: Ohne ‚Breitensport‘ und frühzeitige Talentsuche [...] kann man die internationale Konkurrenzfähigkeit nicht erhalten und keine Weltspitzenleistungen in der Schlüssel-Wissenschaft Mathematik erwarten.“

Was sagen Schulen?

„We are thrilled to take part in the FÜMO maths contest in 2017–18“ (Metropolitan School Frankfurt).

„Bei dieser Olympiade ist Denksport gefragt“ (Schmuttertal-Gymnasium Diefendorf).

Ein Halbmarathon ist für viele Menschen eine sportliche Herausforderung. Mit der folgenden Aufgabe aus der 24. Fürther Mathematik-Olympiade wird er zum Denksport: „Karl und Carola nehmen an einem Halbmarathon teil. Am Ende kommen vor Karl doppelt so viele Teilnehmer ins Ziel wie hinter Carola und vor Carola liegen dreimal so viele Teilnehmer wie hinter Karl, der Platz 21 belegt“ (Gymnasium Landau a. d. Isar).

„Bei diesem bayernweiten Wettbewerb waren Aufgabenstellungen zu bearbeiten, die weit über die Lehrplaninhalte ihrer Jahrgangsstufe hinausführen: Knobeln, kreatives Denken, lückenlose Beweisführung und Ausdauer waren gefragt“ (Tassilo-Gymnasium Simbach/Inn).

„Im Gegensatz zu einigen anderen Wettbewerben erfolgt die Bearbeitung nicht unter Klausurbedingungen und auch nicht im Multiple-Choice-Verfahren; die Schüler sollen sich vielmehr über längere Zeit hinweg, zum Teil während der Schulferien, mit einem mathematischen Problem auseinandersetzen und ihre Lösung dann verständlich darstellen. Dies erfordert ein Durchhaltevermögen, das heutzutage selten geworden ist. Umso erfreulicher ist es, dass gerade dieser Wettbewerb an unserer Schule regelrecht zum ‚Renner‘ geworden ist“ (Maria-Ward-Gymnasium Bamberg).

„Die FÜMO stellt ein besonderes Markenzeichen der Metropolregion dar und ist ein Werbeträger für mathematische Begabungen in der Region. Unsere Preisträger/innen sind deshalb ein wichtiger Bestandteil der Werbung für das Fach Mathematik im Großraum Nürnberg–Fürth–Erlangen und für ganz Bayern. Durch Spielen in Mußestunden werden kreative Fertigkeiten und Fähigkeiten besonders geformt und unbewusst handlungsorientiertes Lernen in angenehmer Atmosphäre gefördert. Wir hoffen, dass wir diese schöne Tradition der Preisträger mathematischer Wettbewerbe auch in Zukunft aufrechterhalten können, und wünschen allen interessierten Schüler/innen Mut, die Aufgaben anzugehen und dann weiterhin viel Spaß beim Knobeln zu haben“ (Gymnasium Eckental).

Zwei Stimmen von Hochschulen

„... eine faszinierende Welt der Mathematik jenseits des Schulfachs. Die Aufgaben sind [...] problemlösungsorientiert und nicht rein kalkulatorisch. Typischerweise gibt es nicht nur eine Lösung“, erklärt Karel Tschacher vom Lehrstuhl für Didaktik der Mathematik den kleinen, aber feinen Unterschied und fügt hinzu: „Dies war der Aufgabentyp, bei dem in der Pisa-Studie deutsche Schüler wegen der fehlenden Übung große Defizite hatten.“ Doch auch die spielerische Beschäftigung mit Mathematik lässt sich üben und erkennen. „Die Motivation ist durchaus vorhanden. Häufig fehlt nur die Anregung von außen“, weiß Tschacher (mediendienst.fau-aktuell, Nr. 3144 vom 17.07.2003).

„Die FÜMO bedeutet für die Schülerinnen und Schüler nicht nur eine sportliche Herausforderung und ein intellektuelles Kräfteressen. Sie sollen auch erleben, was Mathematik [...] ist und dabei manche Vorurteile hinter sich lassen. Mathematik besteht ja nicht nur aus Rechnen. Viel wichtiger ist ein kreatives Herangehen an Problemstellungen und die Fähigkeit zu analytischem Denken“, erläutert der Wettbewerbsorganisator (von FÜMO Oberfranken), Prof. Dr. Thomas Peternell (Universität Bayreuth). „Das ist anstrengend, aber macht viel Spaß, der den Teilnehmern [...] deutlich anzumerken war [...] Dieser mathematische Denksport wäre auch etwas für Erwachsene. Eine Aufgabe für Schüler der 6. Klasse lautete zum Beispiel: Welches ist die kleinste Zahl, in der alle Ziffern von 0 bis 9 vorkommen und die durch 5, 6, 8 und 9 teilbar ist? Ist diese Zahl auch durch 7 teilbar?“

Zur Lösung müsse man etwas von Zahlentheorie verstehen. Eine Wissenschaft für den Elfenbeinturm? „Überhaupt nicht“, widerspricht Prof. Dr. Peternell. „Moderne Datensicherheit wäre ohne Zahlentheorie völlig undenkbar“ (Medienmitteilung der Universität Bayreuth, Nr. 140/2011 vom 21.07.2011).

Und was erfährt man aus der Presse über FüMO?

„Erfreulicherweise gibt es noch Schüler, die sich über den Unterrichtsalltag hinaus in Wettbewerben für Mathematik interessieren. Im Wettstreit werden hervorragende Möglichkeiten geboten, Jugendliche an Denk- und Arbeitsweisen heranzuführen, für die im herkömmlichen Unterricht immer weniger Zeit bleibt.“ (<https://www.mainpost.de/regional/rhoengrabfeld> © *Main-Post* 2018)

„Über 200 Schüler aus 19 Gymnasien nahmen an der 22. FüMO in Schwaben teil, und sie bewiesen mit viel Kreativität und mathematischem Können, dass sich eine Frühförderung in Mathematik lohnt. Die Olympiade ist einer der größten Mathematikwettbewerbe in Deutschland. Durch ihre Ausrichtung auf die Jahrgangsstufen fünf bis acht des Gymnasiums stellt die Olympiade eine Form der Begabtenförderung dar, die sich speziell an junge Schüler wendet. [...] Am Schluss der Siegerehrung war klar: Mathe macht Spaß, Mathe vermittelt wichtige Erkenntnisse und eine Beschäftigung mit ihr lohnt sich [...]“ (*Augsburger-Allgemeine* vom 31.07.2014).

„[...] Für das Bestehen der zwei Runden, brauchte man schon eine gehörige Portion Durchhaltevermögen. Die Fähigkeit, Eigeninitiative zu entwickeln und selbstständig zu arbeiten, wird in unserer Arbeitswelt immer mehr an Bedeutung gewinnen: Dieser Wettbewerb stellt also eine sehr gute Übung dafür dar.“ (*Eichstätter Kurier* vom 20.10.2016).

Einschätzungen einiger Teilnehmer

„Die Aufgaben sind eine Herausforderung. Ich bin stolz, wenn ich eine gelöst habe.“

„Sie sind auf ganz unterschiedlichen Wegen zu lösen.“

„Sie benötigen wenige (mathematische) Kenntnisse und sind dennoch bzw. gerade deshalb schwierig zu knacken.“

„Man sitzt davor und hat erst mal keinen Plan.“

„Faszinierend ist auch die Phase des Aufschreibens einer Lösung: Sie gestaltet sich oft viel schwieriger als gedacht.“

„Es fallen einem immer (noch) Lücken auf.“

„FüMO? Das ist immer irgendwas mit Streichhölzern.“

„Am besten gefallen mir Probleme, an denen ich stundenlang brüten und herumknobeln kann, bis ein Geistesblitz kommt und mir die Lösung wie Schuppen von den Augen fällt. Dieses Aha-Erlebnis ist einzigartig.“

Das Schlusswort hat der Bayerische Philologenverband. Er erinnert in einer Anzeige daran („Zukunft fördern und gestalten“), „dass der Blick nicht nur in Richtung schwächerer Schüler gehen darf“, und fordert daher mehr Ressourcen für Begabtenförderung. Das Gymnasium ist die Schulart, die vor allem auch besonders begabte Schülerinnen und Schüler besuchen.“

Gefunden von Paul Jainta

Vorwort

*„Das ist ewig wahr: wer nichts für andere tut, tut nichts für sich.“
J.W. von Goethe*

Am Anfang war die Litfaßsäule. Damals vor 27 Jahren, wie auch heute noch, steht sie im Souterrain des Gymnasiums Stein bei Nürnberg. Sie ist die Werbefläche für das „Problem des Monats“ gewesen, das für die Unter-, Mittel- und Oberstufe angeboten wurde.

Dort wurde in den Jahren 1990 bis 1994 die Urform für das jetzige Wettbewerbsformat Fürther Mathematik-Olympiade ausprobiert, ein hausinterner mathematischer Wettkampf. Monatlich wurde je eine Knobelaufgabe für die Klassen 5 bis 7 und 8 bis 10 gestellt, die zu Hause bearbeitet werden durfte. Die erfolgreichsten Teilnehmer wurden am Ende des Schuljahres geehrt und mit kleinen Preisen bedacht. Bei der Suche nach weiteren Aufgaben stieß der Autor jedoch bald auf weitere Kolleginnen und Kollegen, die an ihren Schulen ähnliche Wettbewerbe durchführten oder mit neuen Formen der Begabtenförderung experimentierten. Vereinzelt wurden die Aufgaben mit anderen Schulen des Großraums Nürnberg (z. B. Hans-Sachs-Gymnasium, Nürnberg) ausgetauscht. Allmählich reifte daraus die Idee, die Anstrengungen der vielen an Mathematikwettbewerben interessierten, engagierten, einzelkämpferischen Kolleginnen und Kollegen zu koordinieren.

Die Litfaßsäule, die Projektionsfläche für „Mathe im Tiefparterre“, wird damit zum Geburtsort der Fürther Mathematik-Olympiade. Sie ist die Leitfigur des Wettbewerbs. Die orangebraune Säule erinnert noch heute an die angepinnten Aufgaben- und Lösungsblätter des schulinternen Mathematikwettbewerbs. Sie hatte sich seinerzeit rasch zum Treff für einen mathematischen Gedankenaustausch unter Schülern entwickelt.

In einem Schreiben vom 9.10.1990 an die sechs Fürther Stadt- bzw. Landkreisgymnasien hieß es noch: „Was ein wenig nach der feuerfesten Knetmasse Fimo aus der Bastelecke klingt, ist die [...] eingängige Abkürzung für die Fürther Mathematik-Olympiade (FüMO) ...“, deren Premiere mit diesem Brief an die sechs Schulleitungen angekündigt wurde und seitdem als Auftakt zu einer neuen

Wettbewerbsidee gilt. Der Start der allerersten Runde erfolgte am Mittwoch, den 14.10.1992.

Aus diesem unscheinbaren Ereignis ist mittlerweile ein stattlicher Apparat erwachsen. Im Schuljahr 2017/18 geht der Wettbewerb in das 26. Jahr. Die Herauslösung des zweistufigen mathematischen Schülerwettstreits aus der schulinternen Plattform und seine Übertragung auf die kommunale bzw. (über)regionale Ebene haben dieser Maßnahme ihren Namen gegeben. Der Wettbewerb hat eine rasche Verbreitung gefunden. Inzwischen wird er in den sieben Regierungsbezirken Bayerns angeboten, und seit über 15 Jahren behauptet er sich auch in der Bundeshauptstadt Berlin gegen ältere und größere Konkurrenz (als FÜMO Berlin). Mit weit über 2 000 Teilnehmern ist die Fürther Mathematik-Olympiade seit wenigen Jahren nun offiziell auch als Einstiegsbewerb der sehr erfolgreichen bayerischen Wettbewerbspyramide anerkannt.

Was sich so trocken liest, besitzt gleichwohl einen überraschenden und spannenden Hintergrund. Als damaliger Gymnasiallehrer gehörte ich in den 1980er Jahren zu den wenigen westlichen Beziehern der früheren DDR-Schülerzeitschrift *ALPHA*. Ich war sehr angetan von der Idee eines mathematischen Schülerwettbewerbs wie der Olympiade Junger Mathematiker (OJM), deren Grundgedanke mittlerweile als Mathematik-Olympiade (MO) im wiedervereinten Deutschland überlebt hat und sehr erfolgreich weitergeführt wird. Lutz Andrews, der alle Texte, Aufgaben und Lösungen dieses Buches gesetzt hat, wuchs im Ostteil der Republik mit *ALPHA* auf und ist sogar mehrmaliger Teilnehmer an der OJM gewesen.

Im Westen gab es zur selben Zeit bis auf den Bundeswettbewerb Mathematik kaum eine vergleichbare Fördermaßnahme für jüngere talentierte Schüler, vor allem keine Möglichkeiten zur dauerhaften Entfaltung ihrer schlummernden mathematischen Fähigkeiten. Und so entwarf ich seinerzeit die Idee, auf diesem wettbewerbsmäßig (noch) unterentwickelten Gebiet zumindest einen verwandten mathematischen Wettlauf für bayerische Schüler aufzubauen.

Mittlerweile sind weit über 100 Gymnasien und Realschulen aus allen Teilen Bayerns, aus Berlin und sogar aus Wien hinzugekommen. Vermutlich wird sich zu Jahresbeginn 2018 entscheiden, ob die 25 International Schools in Deutschland ebenfalls dazustoßen werden. Dann wäre der Wettbewerb nicht nur ein Förderangebot für Mathematik, sondern auch eine außergewöhnliche Maßnahme zur Formung deutscher Sprachkenntnisse. Haben sich im ersten Jahr des Bestehens von FÜMO nur 19 Schülerinnen und Schüler an beiden Runden beteiligt, waren es ein Jahr später bereits 54, und der Wettbewerb hat zunehmend Anklang gefunden, was sich auch in den Teilnehmerzahlen niederschlug. Seit Einführung des Landeswettbewerbs Mathematik Bayern (1998) hat die Fürther Mathematik-Olympiade nunmehr die Schüler der Klassen 5 bis 8 im Fokus. Er ist aber weiterhin ein Wettbewerb, der aus zwei Hausaufgabenrunden besteht (Herbst/Frühjahr).

Der Wettbewerb FÜMO ist seit vielen Jahren zu einem sehr effektiven „Trainingsgelände“ und Gradmesser zur Identifizierung und Weiterleitung von jungen Mathetalenten zu weiterführenden und vertiefenden Fördermaßnahmen (z. B. Jugend trainiert Mathematik, Landeswettbewerb, Mathematik-Olympiade, Bundeswettbewerb) herangereift. Einige ehemalige FÜMO-Preisträger haben es sogar

bis in die bundesdeutsche Mannschaft für die Internationale Mathematikolympiade (IMO) geschafft, zuletzt je ein früherer Teilnehmer aus Nürnberg bzw. Würzburg.

Problemlösen zählt später auch im Berufsleben als Qualitätsmerkmal. Es ist ein hoch kreativer Prozess! Doch bleibt im Schulalltag dafür oft nicht ausreichend Raum. Wo sollen Schüler dann aber im Laufe ihrer Schulzeit lernen, mathematische bzw. analytische Probleme systematisch und flexibel anzugehen? Dazu bedarf es eines gewissen Repertoires an Fertigkeiten und Verfahren, auf das man nach Belieben zurückgreifen kann. Aber dieses Grundwissen soll nicht unbedingt für Knobelaufgaben abgerufen werden, sondern vor allem für sogenannte offene Probleme, wie sie bei der Fürther Mathematik-Olympiade fast ausschließlich vorkommen. Sie sind ihr Markenzeichen. Die wahre Kreativität zeigt sich eben bei der Erkundung von unbekanntem oder verschleierte Aufgabenstellungen. Darin liegt ja der eigentliche Reiz solcher Aufgaben: Auf den ersten Blick wird oftmals gar nicht klar, wo hier überhaupt Mathematik drinsteckt. Ähnlich wie im Bereich des Modellierens gibt es bei diesem Wettbewerb verschiedene Abstufungen, auf denen Problemlösen stattfindet. Einfache Lockvogel- bzw. Einstiegsaufgaben sollen in erster Linie Interesse wecken. Sie zeichnen sich aber auch dadurch aus, dass kein unmittelbares Standardverfahren zur Verfügung steht oder benötigt wird, um eine schnelle Lösung aufzuschreiben.

Die zweiten und vor allem die dritten Aufgaben jeder Runde sind anspruchsvoller. Sie erfordern zur Lösungsfindung bereits etwas mehr Forschergeist und Erfahrung im Anwenden unterschiedlicher Strategien (systematisches Probieren, Rückwärtsarbeiten, geschicktes Zählen, Fähigkeit zur Verallgemeinerung u.v.m.), aber auch Hartnäckigkeit und Ausdauer. Vor allem sollen die Fragestellungen Spaß an der außerschulischen Beschäftigung mit Mathematik vermitteln. Dies kann durch Charakter und Typ der Aufgabenstellungen noch unterstützt werden. Die Reichhaltigkeit der Probleme ist groß. Sie umfasst u.a. logische Rätsel, Zahlenspielereien, zahlentheoretische Fragen, Spiele und Geometri(sch)e(s) in ungewöhnlichen Situationen oder „Verpackungen“. Zudem etikettieren wir die Probleme seit 2011 mit treffenden oder witzigen Überschriften, die kurz das jeweilige Stoffgebiet anreißen sollen, etwa Zebra-Zahlen, Mäusejagd, Zettelwirtschaft oder Platz für Schafe.

Das Geheimnis für den Aufstieg des Wettbewerbs vom unscheinbaren schulinternen Ereignis in der Provinz bis über die Grenzen der Region und Bayerns hinaus liegt sicherlich in der neuen Art der Fragestellung, die inzwischen auch in Schulbücher Eingang gefunden hat. Lange vor den Misserfolgen deutscher Schüler bei PISA oder der Einführung des G8 zusammen mit neuen Mathematiklehrplänen hat sich unter Schülern und Lehrern herumgesprochen, dass FIMO-Aufgaben Themen aus dem Schulunterricht ganz anders transportieren bzw. unter ungewöhnlich(er)en Blickwinkeln ausleuchten. Dazu gehört die Einsicht, dass Jüngere – für Erwachsene nicht unmittelbar durchschaubar – oftmals abweichende Denkschemata verwenden, um zu Ergebnissen oder Lösungen eines Problems zu gelangen. Diese Betrachtungsweisen sind vor allem dazu da, komplexe Problemlösungsprozesse aufzubrechen, damit unterschiedliche Facetten des Lösens von Fragestellungen in Form handlicher Verfahren dauerhaft eingeübt werden können.

Schüler versuchen oft, inner- und außermathematische Problemstellungen mit eigenen Worten wiederzugeben; sie erkunden sie, stellen Vermutungen auf und zerlegen sie in Einzelfragen. Schülerarbeiten aus über 25 Jahren Wettbewerbsgeschichte illustrieren ein bunt schillerndes Kaleidoskop von individuellen Darstellungsformen sowie genutzten mathematischen Methoden und Strategien. Wo anders als bei einem Hausaufgabenwettbewerb kann man diese verschiedenen Lösungswege ohne Zeitdruck einschlagen, sie überprüfen, bewerten und hat die Möglichkeit, mehrere Lösungen abzuwägen? Dafür bietet das Buch reichlich Übungsmaterial.

Schülerinnen und Schüler können im Umgang mit unkonventionellen Problemen auch noch auf andere Weise einen besonderen Nutzen ziehen. Wer gerne knobelt, kann sich im Wettstreit mit Gleichaltrigen messen. Zudem bereitet ein Angebot wie FÜMO auf weiterführende Wettbewerbe vor; dadurch können sie ihre Erfolgsaussichten steigern. Bei Seminaren oder mehrtägigen überregionalen Wettkämpfen lernt man weitere Mitkämpfer kennen, die dasselbe Hobby teilen. Und nicht zuletzt bildet die regelmäßige Beschäftigung mit den Aufgaben oder die Teilnahme an verschiedenen Wettbewerben eine hervorragende Grundlage für ein späteres Ingenieurstudium oder einen natur- bzw. wirtschaftswissenschaftlichen Studiengang respektive ein Mathematikstudium.

Auch Lehrkräften liefert ein derartiges Angebot erste Fingerzeige, begabte Schülerinnen und Schüler frühzeitig zu erkennen und ohne großen Zeitaufwand schulintern zu fördern. Ausgewählte Probleme lassen sich hervorragend in Intensivierungsstunden, Matheklubs oder Pluskursen einsetzen. Oder man wählt zugkräftige Probleme aus der 5. Jahrgangsstufe aus, um einen frühen schuleigenen Mathewettbewerb zu planen, evtl. in Zusammenarbeit mit Oberstufenschülern. Generell bieten die Schulordnungen auch die Möglichkeit, individuell erzielte Wettbewerbsergebnisse zur Notenbildung heranzuziehen.

Schließlich können Schulen mit solchen Veranstaltungen zusätzliche Netze knüpfen, etwa lebendige Kontakte zu verschiedenen Hochschulen; dadurch wird eine weitere Öffnung der Schule nach außen beschleunigt. Der Verein Fürther Mathematik-Olympiade e. V. hat diesbezüglich mehrere Partnerschaften mit Hochschulen in ganz Bayern angeregt, um dort etwa Preisverleihungen, Hochschultage oder Workshops für die Wettbewerbssieger auszurichten. Seit Anfang November 2017 organisiert etwa das Department Mathematik der Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg zusammen mit FÜMO e. V. einmal im Monat einen Schülerzirkel für die Metropolregion Nürnberg. Zusätzlich gibt es Berührungspunkte mit (Fach-)Hochschulen durch Besuchsmöglichkeiten oder einen vielfältigen Informationsaustausch, Gewinnung von Referenten, Beratungen zu Seminarthemen u. v. m. Die sieben Regionalwettbewerbe FÜMO in Bayern werden von je einer Stützpunktschule gesteuert. Das jeweilige Zentrum und auch alle anderen teilnehmenden Schulen bekommen auf diese Weise zusätzliche Möglichkeiten der Begabtenförderung. Schuleigene Sieger bei derartigen Wettbewerben erhöhen natürlich auch das Renommee der Schule.

Der Wettbewerb FÜMO ist seit Einführung bei der Langen Nacht der Wissenschaften vertreten, der besucherstärksten biennalen Großveranstaltung im deutschsprachigen Raum, und steht dort am zentralen Kreuzungspunkt mehrerer S-Bahn-,

Bus- und Straßenbahnlinien im Nicolaus-Copernicus-Planetarium Nürnberg in direktem Kontakt mit Tausenden Besuchern. Dort können sich Interessierte – Schüler, Eltern, Neugierige aller Art – über die Zielsetzungen des Wettbewerbs informieren und einmal den „Duft“ von Wettbewerbsaufgaben schnuppern. Die Durchführung von FÜMO erfolgt ausschließlich ehrenamtlich. Die Aufgabenstellungen werden zentral für Bayern und Berlin von einem Team aus engagierten Lehrern und Eltern erstellt. Dies ist ein weiteres bemerkenswertes Markenzeichen des Wettbewerbs, wenn nicht sogar einmalig in der gesamten bundesdeutschen Wettbewerbslandschaft: Eltern früherer Preisträger oder auch ehemaliger Teilnehmer bringen sich in die Organisation selbst ein, um ein wenig von dem Spaß zurückzugeben, den ihre Kinder beim Lösen der Aufgaben empfunden haben. Alle Korrekturen und die finalen Preisverleihungen erfolgen jeweils dezentral durch die Regionalleitungen. Die Siegerehrungen finden unabhängig voneinander in individuell gestalteten, würdevollen Rahmenveranstaltungen jeweils vor Beginn der Sommerferien statt.

Die Preisträger dürfen zusätzlich und regional verschieden an einem FÜMO-Tag, Mathematikseminar oder Workshop an einer Universität (Bayreuth, Erlangen, Passau oder Würzburg), FH (Aschaffenburg, Regensburg) oder einem Gymnasium (z. B. Dossenberger-Gymnasium Günzburg in Verbindung mit der Uni Augsburg) teilnehmen. Diese Veranstaltungen werden in der Regel in Kooperation mit Professoren, Mitarbeitern oder Lehramtsstudenten organisiert. Ein Sonderfall ist dabei Berlin. An der Katholischen Schule Liebfrauen in Charlottenburg finden jedes Jahr neu zusammengesetzte und rührige Teams aus Schülern und Studenten unter der Leitung von Gudrun Tisch zueinander, die den Wettbewerb dort ausrichten und an der Schule einen FÜMO-Tag veranstalten. Das Berliner Team wurde übrigens schon zweimal als „Mathemacher des Monats“ von der Deutschen Mathematiker-Vereinigung (DMV) ausgezeichnet, zuletzt im Juni 2013. Jeweils im September vor Beginn eines neuen Wettbewerbsjahrgangs stellt die Berliner Mathe-Crew einen Workshop für mathematikbegeisterte „Neulinge“ aus den 5. und 6. Klassen aus ganz Berlin auf die Beine. Anhand älterer FÜMO-Aufgaben werden die wissbegierigen Novizen dabei von Oberstufenschülern behutsam an die Lösung von Wettbewerbsproblemen herangeführt.

Wie bereits dargelegt, müssen sich Mathematik und Kreativität keineswegs ausschließen. Sie gehen vielmehr eine gesunde Symbiose ein. Davon zeugt nicht zuletzt der Erfolg von FÜMO. Der Wettbewerb kann nur noch mithilfe von sehr viel „Manpower“ und großzügigen Spendengeldern organisiert werden kann. Das Anfangsduo aus dem vergangenen Jahrtausend hat sich inzwischen zu einem richtigen Team gemausert. Anders wäre die gesamte Logistik aus Aufgabenauswahl, Erstellung von Musterlösungen und Layout, Distribution der Wettbewerbsunterlagen, Betreuung der „Filialen“ in den Regierungsbezirken, Pressearbeit, Preisverleihung, Kooperation mit Hochschulen u. v. a. m. nicht mehr zu bewältigen.

Der vorliegende Band enthält die Aufgaben der 21. bis 25. FÜMO, getrennt nach Jahrgangsstufen und Lösungsstrategien für Aufgaben. Eine noch strengere Unterteilung liefert das Sachverzeichnis. Hier lassen sich Fragestellungen u. a. nach Begriffen finden (Außenwinkelsatz, binomische Formel, Kombination, Teilbarkeitsregeln u. v. m.). Dies ermöglicht eine schnelle Orientierung, wenn ein bestimmter Aufga-

bentypus gesucht wird. Am Ende jeder Aufgabe gibt es einen Hinweis darauf, wo die Lösung zu finden ist. Im Lösungsteil wird für jede Aufgabe in Klammern auf den Ursprung der Aufgabe verwiesen. So bedeutet z.B. die Ziffernfolge 72321, dass es sich um die 1. Aufgabe der 2. Runde der 23. FÜMO für die 7. Klasse handelt. Wir empfehlen ausdrücklich, mit dem Buch zu arbeiten, etwa in Arbeitsgemeinschaften, Pluskursen, Zirkeln, zur Lockerungsübung im Unterricht zwischendurch oder in der Vertretungsstunde bzw. als Anregung für Hausaufgaben und zum Selbststudium.

Die Finanzierung des Wettbewerbs erfolgt durch Sponsoren über den Verein Fürther Mathematik-Olympiade e. V. Der Verein wurde im November 2000 gegründet. Vereinsziel ist laut Auszug aus der Satzung „das frühzeitige Erkennen mathematisch begabter [...] Schülerinnen und Schüler, die Weckung und besondere Förderung ihres Interesses an der Wissenschaft Mathematik und der mathematischen Bildung“. Dahinter verbirgt sich eine einfache Philosophie: Mathe ist mehr als eintöniges Rechnen. Mathematik ist abenteuerlich und wunderbar zugleich. Viele Fragen lassen sich einfach formulieren und mittelbar lösen – vielleicht auch erst beim zweiten Versuch. Der „Preis“, den man dafür entrichten muss, ist kreatives Denken, eine Prise Pfliffigkeit und eine Portion Ausdauer.

Ausdauer hat der Wettbewerb selbst bewiesen. Aus dem Verborgenen sind die Aufgaben mittlerweile von der Litfaßsäule aus dem Keller in die hellen, digitalen Werbeflächen unzähliger Schulen, mithin in die Infrastruktur der Informationsgesellschaft, gewandert. Oder auch: Von der runden Sache im Untergeschoss mutierte die Fürther Mathematik-Olympiade zu einer insgesamt runden Sache. Die alte Litfaßadresse ist längst gegen eine neue eingetauscht: fuemo.de.

Schwabach, im Mai 2018

Paul Jainta StD i. R.
Vors. des Vereins FÜMO e. V.

Danksagung

*„Denken und danken sind verwandte Wörter;
wir danken dem Leben, in dem wir es bedenken.“
(Thomas Mann)*

Den Autoren Lutz Andrews, Alfred Faulhaber, Bertram Hell, Paul Jainta, Dr. Eike Rinsdorf und Christine Streib gebührt großer Dank für ihr Bemühen, die Aufgaben und Lösungstexte auf Ungereimtheiten durchzusehen, die Aufgaben nach Themenbereichen, Lösungsstrategien und nach Klassenstufen zu ordnen, das alphabetische Stichwortverzeichnis anzulegen und schließlich sorgfältig Korrektur zu lesen.

Ein besonderer Dank gehört hierbei Lutz Andrews, der alle Texte, Tabellen, Verzeichnisse und Grafiken in LATEX gesetzt hat.

Das Kernteam FüMO verdient ebenfalls einen tiefen Dank für seinen Einsatz als Aufgaben-, „ausdenker“ und Organisator vor Ort. Darin einschließen wollen wir auch alle Lehrkräfte an den Schulen und alle Schulleitungen, die den Wettbewerb seit vielen Jahren unterstützen. Nicht zu vergessen natürlich die Korrektoren und die jeweiligen Organisationsteams für die FüMO-Tage bzw. Mathetage in den betreffenden Hochschuleinrichtungen.

Ein ganz großes Dankeschön gehört insbesondere allen Teilnehmenden am Wettbewerb und den anspruchsvollen Eltern, die diese Wettbewerbsform Jahr für Jahr zu einem großartigen Ereignis machen.

Das Unternehmen „FüMO“ wäre ohne eine jahrelange Unterstützung durch Sponsoren nicht möglich. Stellvertretend für die letzten Wettbewerbsjahre möchten wir uns recht herzlich bedanken bei der Vorstandsvorsitzenden der Hermann Gutmann Stiftung Nürnberg, Frau Angela Novotny, für die bisher gewährten großzügigen finanziellen Hilfen und bei Frau StDin Dr. Cornelia Kirchner-Feyerabend, der Vorsitzenden des Bayerischen Philologenverbands Bezirk Mittelfranken, für die bereitgestellten Fördergelder.

Schließlich danken wir Herrn Dr. Andreas Rüdinger und Frau Bianca Alton vom Springer-Verlag für die nachhaltige und freundliche Begleitung des Buchprojekts und dessen Aufnahme in das SpringerSpektrum-Programm.

Zuletzt geht ein ganz spezieller Dank an Heinz Klaus Strick, den Autor des prächtigen Bandes *Mathematik ist schön* aus demselben Programm. Verfasser Strick

hat uns den Kontakt mit dem Springer-Verlag vermittelt, in dem wir nun unseren Aufgabenband herausbringen dürfen.

Paul Jainta