Ismael Gutiérrez García

Matemáticas para informática

Incluye software educativo MaXI

ECOE EDICIONES

Ediciones Uninorte

Matemáticas para informática

Matemáticas para informática

Ismael Gutiérrez García

Área metropolitana
de Barranquilla (Colombia), 2013

Universidad del Norte
Editorial

ECOE Ediciones

Gutiérrez García, Ismael

Matemáticas para informática / Ismael Gutiérrez García. -- Barranquilla, Col. : Editorial Universidad del Norte, reimp., 2013.

x, 188 p. : il. ; 16 x 24 cm.
ISBN 978-958-741-075-4 (impreso)
ISBN 978-958-741-934-4 (PDF)
ISBN 978-958-741-935-1 (ePub)

1. Computadores Matemáticas. 2. Lógica simbólica y matemática. 3. Teoría de conjuntos. I. Tít.

(511.3 G984) (CO-BrUNB: 98667)

UNIVERSIDAD DEL NORTE

Vigilada Mineducación
www.uninorte.edu.co
Km 5, vía a Puerto Colombia, A.A. 1569
Área metropolitana de Barranquilla (Colombia)

ECOE EDICIONES

www.ecoeediciones.com
Carrera 19 n.° 63C-32
Bogotá (Colombia)

Coordinación editorial
Zoila Sotomayor O.

Editor
Ismael Gutiérrez García

Diseño de portada
Joaquín Camargo Valle

Procesos técnicos digitales
Munir Kharfan de los Reyes

Corrección de textos
Mercedes Castilla

Impreso y hecho en Colombia
Litoperla Impresores Ltda.
Carrera 25 Nº 8-91. Tel.: 3711916 (Bogotá)
Printed and made in Colombia

A Elena

Índice general

Prólogo

El presente libro tiene su origen en los cursos de Matemáticas Discretas y de Lógica Matemática ofrecidos por el autor durante los últimos años en los programas de Ingeniería de Sistemas y Matemáticas, respectivamente, en la Universidad del Norte.

En el contenido de la obra se destacan dos partes bien diferenciadas: la Lógica Matemática y la Teoría de Conjuntos. En la primera parte se presentan dos capítulos: El cálculo proposicional y Una introducción a la Lógica de primer orden. En el primer capítulo se presentan la sintaxis y la semántica para el cálculo proposicional, donde el principal resultado es el teorema de completitud, es decir, se demuestra la equivalencia entre fórmulas demostrables y tautologías. En el segundo capítulo se introducen los lenguajes de primer orden y se demuestra, solo en una dirección, el teorema de completitud de Gödel. La segunda parte del texto está dedicada a la presentación del sistema axiomático de Zermelo-Fränkel para la teoría de conjuntos. Al final del capítulo se presentan los números naturales y el principio de inducción.

Otro aspecto relevante de la presente publicación es la elaboración del *software* educativo MaXI, que anexamos como un producto visible del proyecto de investigación “Dos tópicos en matemáticas discretas", financiado por la Universidad del Norte en la convocatoria interna del período 2008 - 2009.

El objetivo de esta herramienta pedagógica es ayudar en el proceso de aprendizaje de los diferentes conceptos presentados en el aula de clases. Para la elabo-ración, diagramación y programación de los diferentes algoritmos involucrados en el *software* se vincularon al proyecto en calidad de jóvenes investigadores los ingenieros de sistemas Luis Carlos Lombana, Alonso García y el ingeniero electrónico Darwin Villar.

En este punto es preciso agradecer a la Dirección de Investigación y Proyectos de la Universidad del Norte por el apoyo durante la ejecución del proyecto de investigación, a Ediciones Uninorte, al Departamento de Matemáticas, a Luis Lombana por su dedicación, esfuerzo científico y excelente trabajo durante la coordinación del Grupo de Jóvenes Investigadores, a Darwin Villar por la lectura del manuscrito y sus valiosas sugerencias, a Alonso García por su apoyo constante.

Parte I

Lógica Matemática

Capítulo 1

Cálculo proposicional

Contenido

En el primer capítulo abordamos el cálculo proposicional. Inicialmente presentamos algunos aspectos históricos de la misma y posteriormente nos concentramos en dos tópicos centrales, la sintaxis y la semántica, parte en donde se destacan la demostración del teorema de completitud para el cálculo proposicional y las formas normales de una fórmula proposicional.

1.1. Un poco de historia

Durante mucho tiempo se han distinguido tres grandes partes de la lógica: la lógica formal, la lógica simbólica y la lógica matemática. En la actualidad existen algunas subdivisiones adicionales, por ejemplo, la lógica paraconsistente, cuántica e intuicionista entre otras. La lógica formal fue iniciada por los griegos hace por lo menos veinticinco siglos. Aristóteles[1] estableció y desarrolló las bases de la lógica formal. Para él, la lógica era una introducción al saber general, por cuanto constituye una especie de instrumento para todas las ciencias.

Establecidos en lo que posteriormente se denominó el **Organon**, que significa **instrumento**, los tratados lógicos de Aristóteles contienen el primer tratamiento sistemático de las leyes del pensamiento en relación con la adquisición del conocimiento, que hacen especial énfasis en el estudio del **silogismo**. Este es un conjunto de tres enunciados o proposiciones que tienen entre sí la siguiente relación: el tercero se deduce de los dos primeros. A los dos primeros se les denominan **premisas** y al último se le llama **conclusión**. Aristóteles consideró cuatro tipos de premisas:

el universal afirmativo	**Todo A es B**
el universal negativo	**Ningún A es B**
el particular afirmativo	**Algún A es B**
el particular negativo	**Algún A no es B**

Un ejemplo clásico de silogismo es el siguiente:

Todo mentiroso es ladrón
León es mentiroso
―――――――――――
León es ladrón

La característica más importante de la lógica aristotélica es que se fundamentó en los denominados lenguajes naturales y, por ende, se mantuvo al margen de las matemáticas.

Los mejores trabajos en lógica elaborados durante la Edad Media se deben a Ibn-Sina[2], conocido en Occidente como Avicenna. Estos fueron escritos en árabe y traducidos de manera incompleta al latín.

[1] Aristóteles (Estagira, 384 - Calcis, 322 a. C.) Filósofo griego, discípulo de Platón.

[2] Abū Ali al-Husayn ibn Abd Allāh ibn Sinā (Jurasán, 980 d. C. - Hamadán, 1037) Médico, filósofo y científico persa.

Durante los dos últimos años el prestigioso lógico Wilfrid Hodges, profesor de la Escuela de Ciencias Matemáticas Queen Mary, de la Universidad de Londres, ha traducido a partir de fuentes originales en árabe muchos de los trabajos de Avicenna entre los que se destacan: **Ibn Sina on modes**, **Ibn Sina and conflict in logic**, **Ibn Sina on understood time and aspect**, **Ibn Sina on patterns of proofs** y **Abstract State Machines as a tool for history of logic**. Estos trabajos han puesto en evidencia que la alta componente formal de algunas lógicas de Aviccena las hace muy cercanas a algunas de J. Lukasiewicz[3]. Todos estos documentos pueden obtenerse en la página web [10].

Los lógicos de Occidente contemporáneos con Avicenna no alcanzaron a establecer una teoría con un alto componente formal, en la medida en que su mayor esfuerzo se concentró en estudiar y formular leyes lógicas para el lenguaje natural del momento, el latín. Como su nombre lo indica, los lenguajes naturales tienen su origen y desarrollo de manera espontánea, esto es, su evolución no obedece a la implementación de una teoría previamente elaborada, sino que, por el contrario, esta se realiza con posterioridad a su misma consolidación.

En la era contemporánea los lógicos fundamentaron su éxito en la introducción y estudio de lenguajes formales o simbólicos que se desarrollaron a través del establecimiento de una teoría como fundamento de dicho lenguaje, cual es, por ejemplo, el lenguaje de la lógica matemática. El punto de partida de un lenguaje formal es el establecimiento de un **alfabeto**, o sea, un conjunto de símbolos con los que se pueden construir las palabras. En este aspecto no existe diferencia con los lenguajes naturales, es decir, la sola posesión de un alfabeto, probablemente distintos, es un punto en común.

Haciendo uso de la yuxtaposición de los símbolos del alfabeto y de la definición de unas reglas claras se construyen las **fórmulas proposicionales**, que se definen de manera recursiva y que van a representar las palabras del nuevo lenguaje. En los lenguajes naturales las oraciones pueden definirse como una sucesión finita de palabras. Sin embargo, la consistencia de cualquier combinación de palabras no está garantizada: esta depende de una sintaxis y una semántica que son fruto de la formalización del desarrollo espontáneo del lenguaje natural en consideración. Así se concluye que con los lenguajes naturales la situación es similar, pero a la inversa.

Una diferencia sustancial entre los lenguajes naturales y formales es que en los últimos el simbolismo inherente no permite preestablecer una interpretación de una fórmula proposicional considerada, mientas que en un lenguaje

[3] Jan Lukasiewicz (Lvov, 1878 - Dublín, 1956) Lógico y filósofo polaco.

natural dado cada palabra en una oración tiene de antemano su significado. Así, los lenguajes formales en principio están al margen de cualquier componente semántico; desde el punto de vista de la informática esto es una fortaleza, ya que de entrada se eliminan las ambigüedades propias de la polisemántica típica de los lenguajes naturales.

Uno de los grandes pensadores de la época interesado en dar su aporte en ese sentido fue G. Leibniz.[4] A la muy temprana edad de 19 años presentó la propuesta de una **lingua philosophica o characteristica universalis**, es decir, un lenguaje riguroso, exacto y universal en el que se reflejara la estructura del pensamiento y con el que, además, con este se pudiesen deducir todo lo relacionado con consistencia y consecuencia. Leibniz presentó en 1690 su propuesta en la obra **Ars Combinatoria** (Discurso sobre el arte combinatorio) con el objetivo de utilizar la simplicidad de la estructura matemática para reflejar la complejidad de los pensamientos. Como gran dificultad aparecía que un simple análisis del lenguaje no era suficiente para efectuar un análisis profundo de los contenidos de los pensamientos. No obstante, Leibniz aplicó con éxito métodos matemáticos a la interpretación de la silogística Aristotélica, y propuso un cálculo de la adición real mostrando que partes del álgebra están abiertas a interpretación no aritmética. Lamentablemente su obra no fue ampliamente conocida en su época.

A partir del siglo XVIII el término **lógica** fue utilizado por grandes filósofos, como E. Kant[5] y F. Hegel[6], en un sentido muy distante de la concepción clásica de su significado. En su obra **Crítica de la razón pura** Kant afirmó inicialmente que existen formas puras a priori del entendimiento y de la razón. La lógica la divide en **analítica trascendental** y **dialéctica trascendental**. Por su parte para Hegel la lógica no era simplemente un problema de las reglas del razonamiento verdadero, sino que la lógica es la ciencia del **ser**, cuyo objetivo es revelar su esencia. Por ello la lógica hegeliana es una ontología. Hegel desarrolló su estudio de la lógica haciendo uso de un esquema de tres categorías: las **fundamentales del ser**, las **fundamentales de la esencia** y, finalmente, las **fundamentales del concepto**.

[4]Leibniz, Gottfried Wilhelm (Leipzig, 1646 - Hannover, 1716) Matemático y filósofo alemán. En 1661 ingresó en la Universidad de Leipzig para estudiar leyes, y ḿas tarde se trasladó a la Universidad de Jena, donde estudió Matemáticas con E. Weigel.

[5]Emmanuel Kant (Königsberg, 1724 - 1804) Filósofo alemán. En 1740 ingresó a la Universidad de Königsberg como estudiante de Teología y fue alumno de Martin Knutzen, quien lo introdujo en la Filosofía Racionalista de Leibniz y Wolff.

[6]Georg Wilhelm Friedrich Hegel (Stuttgart, 1770 - Berlín, 1831) Filósofo alemán. Estudió Teología inicialmente en Stuttgart y posteriormente en Tübingen, donde compartió con el filósofo Schelling, quien le facilitó su ingreso como docente a la Universidad de Jena.

En el siglo XIX se retomaron y ampliaron las ideas de Leibniz. Los trabajos de un gran número de matemáticos y filósofos procuraron expresar la forma de los argumentos válidos en el lenguaje simbólico. Entre estos podemos destacar inicialmente a W. Hamilton[7] y A. De Morgan[8]. Años más tarde G. Boole[9] aplicó una serie de símbolos a operaciones lógicas e hizo que estos símbolos y operaciones conservaran la misma estructura lógica que el álgebra abstracta. En 1854 publicó su obra **An investigation of the Laws of thought on which are founded the mathematical theories of Logic and Probabilities**, libro que trataba por completo de la lógica simbólica y su álgebra.

El desarrollo posterior de la lógica simbólica, segunda mitad del siglo XIX, se recogió en las investigaciones de grandes genios; sin embargo, ocupó un lugar especial G. Frege[10], considerado el autor de la lógica contemporánea. En 1879 publicó la obra **Begriffsschrift** (Escritura conceptual), la primera del autor en el campo de la lógica; con ella introdujo una nueva sintaxis en la que destacó la inclusión de los llamados cuantificadores, y fue el primero en separar la caracterización formal de las leyes lógicas de su contenido semántico. Una vez fijados los principios axiomáticos de la lógica acometió la tarea de edificar la aritmética sobre la base de aquella; su obra **Grundgesetze der Arithmetik** (Fundamentos de la aritmética) apareció en 1884.

Después de Frege apareció la colosal obra **Principia Mathematica** de A. Whitehead[11] y B. Russell[12], cuyos tres volúmenes fueron publicados, respectivamente, en 1910, 1912 y 1913. Esta obra puede considerarse como la conclusión de algunas de la propuestas centrales de Frege en la medida en que introdujo en la lógica los métodos y notación del álgebra abstracta. La idea de Russell y Whitehead era evitar la paradoja presentada en el sistema lógico de Frege y demostrar la posibilidad de deducir toda la matemática de la lógica, esto es, resolver un problema de completitud.

---

[7] William Rowan Hamilton (Dublín, 1805 - 1865) Matemático, físico, astrónomo y filósofo irlandés. Estructuró la teoría de los números complejos, los cuales definió como parejas de números reales. De especial importancia fue su aporte a la teoría de los cuaterniones.

[8] August De Morgan (Madura, 1806 - Londres, 1871) Matemático británico. Miembro de la Royal Society, colaboró en la fundación de la Mathematical Society. Trabajó en la convergencia de las series y la teoría de probabilidades.

[9] George Boole (Lincoln, 1815 - Ballintemple, 1864) Matemático británico. A los dieciséis años enseñó Matemáticas en un colegio privado. En 1849 fue nombrado profesor de Matemáticas del Queen's College, en Cork, donde permaneció el resto de su vida.

[10] Friedrich Gottlob Frege (Wismar, 1848 - Bad Kleinen, 1925) Matemático y filósofo alemán.

[11] Alfred North Whitehead (Ramsgate, 1861-1947) Matemático y filósofo británico.

[12] Bertrand Arthur William Russell (Trelleck, 1872 - 1970), Matemático, filósofo y lógico británico, alumno de Whitehead. Premio nobel de Literatura en 1950.

Durante la segunda mitad del siglo XX se dieron los principales avances en lo que hoy se denomina lógica matemática; a diferencia de lo anterior, ahora se estudian los sistemas formales, lo que da origen a la usualmente denominada Metamatemática. Uno de los problemas a considerar es la axiomatización de las teorías matemáticas, es decir, preguntarse si existe para toda teoría un conjunto finito de axiomas a partir de los cuales se pudiese derivar formalmente todos los teoremas de la teoría considerada.

Uno de los principales exponentes de esta parte de la teoría fue D. Hilbert,[13] quien durante el congreso internacional de 1900, presentó en París una lista de problemas, entre los que se destacó la importancia de dar formalidad a la noción de algoritmo. De un modo concreto Hilbert planteó el problema de la decisión del sistema axiomático (**Entscheidungsproblem**), el cual consistía en encontrar un algoritmo que decidiera en un número finito de pasos si un teorema era o no deducible formalmente a partir de un conjunto de axiomas.

Un papel central jugó K. Gödel[14]: a los 24 años de edad como estudiante de la Universidad de Viena presentó su tesis doctoral sobre un conjunto de axiomas de lógica elemental con los cuales se demostró que es posible derivar todas y solamente las verdades de la lógica. La demostración del teorema de completitud para el cálculo de predicados trajo la falsa esperanza a los matemáticos que trabajaban en esa área de que el programa de axiomatización de Hilbert sería viable. No obstante, un año después, en 1931, el mismo Gödel publicó en la revista alemana **Monatshefte für Mathematik und Physik** el extremadamente difícil y brillante artículo titulado **Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme** (Sobre proposiciones formalmente indecidibles de Principia Mathematica y sistemas afines) con el cual echó por tierra el sueño hilbertiano.

El trabajo de Gödel es sin duda uno de los más famosos de la historia de la matemática. Sin embargo, distaba del alcance de muchos miembros de la comunidad matemática de la época. En esta joya de la matemática moderna, el término **proposiciones indecidibles** indicaba la existencia de proposiciones que no pueden ser demostradas ni refutadas dentro de un sistema dado. Como notamos antes, la expresión **Principia Mathematica** se refería a la obra de Whitehead y Russell.

[13] David Hilbert (Wehlan, 1862 - Göttingen, 1943) Matemático alemán. Estudió en Königsber, Heidelberg y Berlín; en esta última asistió a los cursos de Weierstrass, Kummer, Helmholtz y Kronecker.

[14] Kurt Gödel (Brünn, 1906 - Princeton, USA, 1978) Lógico austriaco. Por su origen judío se vio obligado a abandonar la ciudad durante la ocupació nazi y emigrar a Estados Unidos, donde ocupó una plaza como profesor en el Instituto de Estudios Avanzados de Princeton.

Una de las primeras consecuencias negativas del teorema de incompletitud era que resultaba imposible encontrar un sistema axiomatizado consistente con el cual puede deducirse toda la aritmética elemental de los números naturales. Por consiguiente, existirán verdades matemáticas no susceptibles de obtenerse como teoremas, es decir, no existe siempre una equivalencia entre los conceptos de verdad matemática y teorema. Otra consecuencia del teorema de incompletitud era la no existencia de un algoritmo de decisión, ya que toda teoría decidible es axiomatizable. Podemos decir, sin embargo, que con Hilbert se colocaron las bases para las relevantes aplicaciones de la lógica matemática en la informática.

Entre las múltiples aplicaciones podemos destacar el problema de la calculabilidad y los problemas de inteligencia artificial. Los personajes centrales en el desarrollo de la calculabilidad fueron E. L. Post[15], A. Church[16] y A. Turing[17]. Entre los aportes de Post se encuentran la elaboración de un sistema para controlar la validez de las fórmulas de la lógica sentencial mediante tablas de verdad. Este cofundador de la teoría moderna de la computación introdujo el concepto de grado de indecidibilidad y creó el sistema formal llamado **máquina de Post**, equivalente a la posteriormente denominada máquina de Turing. Por otra parte, en los trabajos de Church fue notable su concepto de calculabilidad y su demostración de la indecidibilidad de la lógica de primer orden. Desarrolló el cálculo de conversión lambda que permitió efectuar operaciones lógicas con variables generalizadas. Por otro lado, lo que hoy se conoce como **máquina de Turing** suministró una influencia enorme a la formalización de los conceptos de algoritmo y computación. Ésta no solo era un ejemplo de su teoría de computación sino también una prueba de que tal tipo de máquina computadora podía ser construida.

Aunque menos conocido por las circunstancias propias de la Segunda Guerra Mundial, K. Zuse[18] podría considerarse como otro de los grandes en esta dirección. Zuse construyó las máquinas Z1, Z2 y la Z3. Esta última, denominada por él la primera **computadora funcional** del mundo, fue destruida durante los bombardeos a Berlín y reconstruida veinte años después para el Deutsches Museum (Museo Alemán) de Munich.

[15] Emil Leon Post (Augustow 1897- Nueva York 1954) Matemático norteamericano de origen polaco especializado en Lógica Matemática.

[16] Alonzo Church (Washington, 1903 - Hudson, 1995) Matemático norteamericano. Profesor en la Universidad de Princeton.

[17] Alan Mathison Turing (Londres, 1912 - 1954) Matemático y lógico británico. Estudió en el King's College y tras su graduación viajó a Estados Unidos; y se vinculó a la Universidad de Princeton, donde trabajó con A. Church.

[18] Konrad Zuse (Berlín, 1910 - Hünfeld, 1995) Ingeniero e informático alemán.