Vinicio Villani • Claudio Bernardi
Sergio Zoccante • Roberto Porcaro

CONVERGENZE

Non solo calcoli

Domande e risposte sui perché della matematica

UMI - CIIM

Springer

Convergenze

a cura di

G. Bolondi, L. Giacardi, B. Lazzari

Vinicio Villani
Claudio Bernardi
Sergio Zoccante
Roberto Porcaro

Non solo calcoli

Domande e risposte sui perché della matematica

Springer

Vinicio Villani
Dipartimento di Matematica
Università di Pisa

Claudio Bernardi
Dipartimento di Matematica
Sapienza Università di Roma

Sergio Zoccante
Centro Ricerche Didattiche
“Ugo Morin”
Paderno del Grappa (TV)

Roberto Porcaro
Liceo Scientifico Statale
“A. Pacinotti”
La Spezia

ISBN 978-88-470-2609-4
ISBN 978-88-470-2610-0 (eBook)
DOI 10.1007/978-88-470-2610-0

Springer Milan Dordrecht Heidelberg London New York

FSC
www.fsc.org
MISTO
Carta da fonti gestite in maniera responsabile
FSC® C007287

Questo libro è stampato su carta FSC amica delle foreste. Il logo FSC identifica prodotti che contengono carta proveniente da foreste gestite secondo i rigorosi standard ambientali, economici e sociali definiti dal Forest Stewardship Council

Layout copertina: Valentina Greco, Milano
Progetto grafico e impaginazione: CompoMat S.r.l., Configni (RI)
Stampa: GECA Industrie Grafiche, Cesano Boscone (MI)

Springer-Verlag Italia S.r.l., Via Decembrio 28, I-20137 Milano
Springer fa parte di Springer Science + Business Media (www.springer.com)

Prefazione

La principale molla per l'acquisizione di nuove conoscenze in qualsiasi ambito deriva dalla nostra curiosità, che ci induce a formulare domande e a cercare risposte. Fin dalla prima infanzia impariamo ad esprimere tali domande ponendo i classici interrogativi "cosa?", "come?" e "perché?".

Purtroppo, però , l'interesse per le risposte ai più svariati "perché" tende a diminuire con l'avanzare dell'età. E in ambito scolastico non è raro constatare già all'inizio della Scuola secondaria di primo grado il manifestarsi di una disaffezione per lo studio della matematica e per i suoi "perché".

Una decina di anni fa, partendo da queste riflessioni, confermate dalla mia pluriennale esperienza di docente di didattica della matematica all'Università di Pisa e alla SSIS Toscana, decisi di affrontare l'argomento in due libri, il primo sui "perché" dell'aritmetica e dell'algebra (cfr. [Villani, 2003]), il secondo sui "perché" della geometria (cfr. [Villani, 2006]).

Per completare un'analisi critica degli argomenti matematici normalmente affrontati nelle nostre scuole secondarie e nei corsi universitari di primo livello, mancava la trattazione di tre importanti settori: *TEORIA DEGLI INSIEMI E LOGICA MATEMATICA, ANALISI MATEMATICA, PROBABILITÀ E STATISTICA MATEMATICA*[1].

Non avendo la pretesa di atteggiarmi a tuttologo, mi sono allora rivolto a tre carissimi amici e valenti colleghi, invitandoli a collaborare ad un completamento del mio precedente lavoro. I loro nomi, elencati nell'ordine in cui si susseguono i rispettivi contributi, sono: Claudio Bernardi (per Teoria degli insiemi e Logica matematica), Sergio Zoccante (per Analisi matematica), Roberto Porcaro (per Probabilità e Statistica). Li ringrazio sentitamente per aver accettato il mio invito.

Per la precisione aggiungo che il piano generale del lavoro è stato concordato collegialmente, mentre la stesura dei singoli contributi è stata curata dai singoli collaboratori. Pertanto il testo risulta suddiviso in tre parti.

Naturalmente, è stata collegiale anche l'organizzazione e la revisione di tutto il materiale. Abbiamo quindi ritenuto opportuno usare un'unica numerazione progressiva per tutti i capitoli, un unico indice analitico e un'unica bibliografia.

Quanto al titolo del libro, abbiamo inteso compendiarvi sinteticamente il seguente messaggio. Nella Logica si affronta il Calcolo delle proposizioni e il Calcolo dei predicati, l'Analisi matematica è conosciuta anche col nome di Calcolo infinitesimale o brevemente Calcolo (in inglese Calculus), la Probabilità viene detta

[1]Nei programmi scolastici, nei corsi universitari e nei libri di testo l'ordine nel quale i tre argomenti si susseguono è variabile. A volte la teoria degli insiemi e la logica matematica vengono considerate come propedeutiche all'analisi e alla probabilità, altre volte vengono invece intese come spunti per una riflessione critica conclusiva, altre volte ancora la teoria degli insiemi risulta scissa dalla logica matematica.

spesso Calcolo delle probabilità. In tutti e tre i casi si potrebbe essere quindi indotti a focalizzare l'attenzione sulla sola parola "Calcolo". E ciò sarebbe gravemente riduttivo. Il calcolo è in tutti e tre i casi una componente importante, ma altrettanto importante è e deve essere la comprensione dei ragionamenti che stanno alla base di tali calcoli, nonché la capacità di scegliere di volta in volta le schematizzazioni più appropriate per affrontare e risolvere problemi teorici e applicativi anche in situazioni non stereotipate.

Infine esprimo, anche a nome dei tre coautori del libro, il nostro più vivo ringraziamento all'UMI, ai revisori (anonimi) che ci hanno fornito numerosi spunti per migliorare una precedente stesura del libro, e alla casa editrice per avere curato i non facili aspetti tipografici.

Pisa, maggio 2012 *Vinicio Villani*

Indice

Parte I

Teoria degli insiemi e Logica matematica

Capitolo 1
Qual è, o quale dovrebbe essere, il ruolo della teoria degli insiemi nell'insegnamento della matematica?

1.1 La teoria degli insiemi e la "matematica moderna"

Iniziamo precisando, una volta per tutte, che è molto meglio parlare di *teoria degli insiemi* piuttosto che di *insiemistica* (termine che si riferisce solo a un ambito didattico elementare e che, per fortuna, sta cadendo in disuso).

In questo capitolo parliamo della teoria *intuitiva* degli insiemi (in inglese: *naïve set theory*). Per cenni alla teoria *assiomatica*, rinviamo ai capitoli 4 e 10. Nella teoria intuitiva non si dà una definizione precisa di insieme: si cerca di spiegare il concetto parlando di aggregati, raccolte, classi, ..., ma è chiaro che queste parole non sono che sinonimi di insieme.

Accettiamo dunque insieme come termine primitivo, non nel senso che è precisato da assiomi, ma come una parola che viene data per buona, perché da un lato è ragionevolmente nota e dall'altro sarebbe troppo difficile precisarla.

Nei decenni passati, gli insiemi sono stati al centro delle polemiche, spesso vivaci ed accese, sulla cosiddetta "matematica moderna": c'era chi vedeva negli insiemi uno strumento insostituibile per insegnare un qualunque argomento matematico e chi riteneva che si trattasse di concetti inutili o addirittura fuorvianti, perché in realtà avevano ben poco a che fare con la matematica. Negli anni intorno al 1960, in numerosi Paesi e specialmente in Francia e in Belgio, ci sono state indubbie esagerazioni (specialmente a livello delle Scuole Elementari), seguite da nette inversioni di marcia. Per informazioni a proposito della "moda" degli insiemi, si possono consultare gli articoli di Piaget e di Thom riportati in [Sitia, 1979].

Negli ultimi decenni, la teoria degli insiemi è stata molto ridimensionata nella didattica sia in Italia sia all'estero. Vediamo rapidamente la situazione in Italia.

Nelle Indicazioni per le Medie emanate in seguito alla legge 53/2003 (la "Legge Moratti"), compare una sola frase sugli insiemi: *Intuizione della nozione di insieme e introduzione delle operazioni elementari tra essi.* C'è qualche riga in più nelle Indicazioni per il Liceo Scientifico: *Linguaggio naturale e linguaggio simbolico (linguaggio degli insiemi, dell'algebra elementare, delle funzioni, della logica matematica). Utilizzare il linguaggio degli insiemi e delle funzioni ...*

Nelle Indicazioni del 2007 per la Scuola Primaria e per la Scuola Media (il cosiddetto Decreto Fioroni) gli insiemi non sono nemmeno nominati.

Infine, nelle Indicazioni per i Licei del 2010 (Ministro Gelmini) si legge una sola frase non troppo diversa dalle precedenti, che si ritrova quasi identica nelle In-

Villani V., Bernardi C., Zoccante S., Porcaro R.: Non solo calcoli. Domande e risposte sui perché della matematica
DOI 10.1007/978-88-470-2610-0_1, © Springer-Verlag Italia 2012

dicazioni per gli Istituti Tecnici e Professionali: *Obiettivo di studio sarà il linguaggio degli insiemi e delle funzioni (dominio, composizione, inversa, ecc.)*.

Un punto su cui sono ormai quasi tutti d'accordo è *che un capitolo sugli insiemi, staccato dal resto e confinato all'inizio o alla fine di un ciclo di studi, serve a ben poco*. Un discorso analogo si applica, del resto, a tutta la logica: si tratta di concetti che possono risultare utili ed efficaci nell'insegnamento *solo* se si riesce a integrarli con argomenti usualmente affrontati.

Un altro punto che va onestamente riconosciuto riguarda i primi concetti sugli insiemi, come le operazioni di unione e intersezione, o la relazione di sottoinsieme. Questi si ritrovano ripetuti, senza sostanziali differenze, nei libri di testo di tutti gli ordini scolastici, dalla Scuola Primaria all'Università. Mentre gli altri rami della matematica ad ogni livello sono sviluppati basandosi su conoscenze che si suppongono acquisite ai livelli precedenti, sembra che nella teoria degli insiemi si debba ogni volta ripartire da zero. Una tale impostazione è forse un dato di fatto, ma è difficilmente difendibile.

Il nostro parere è che, passati gli anni in cui gli insiemi erano ingenuamente visti come panacea della didattica, non occorre cadere nell'eccesso opposto. Un uso moderato e ragionato degli insiemi è da incoraggiare. Nelle pagine seguenti vedremo come e in quali contesti possano risultare utili concetti di teoria degli insiemi.

Naturalmente occorre evitare quelle improprietà e quegli errori in cui si incorre (anche in libri di testo) più facilmente nella teoria degli insiemi che non negli altri settori. Alcuni di questi errori sono entrati nel folklore, diventando fin troppo famosi, come l'esempio secondo cui l'intersezione fra l'insieme dei gatti neri e l'insieme dei gatti bianchi è l'insieme dei gatti grigi, o secondo un'altra versione l'insieme dei gatti a strisce …

Al di là degli errori, consigliamo comunque di *evitare* sottigliezze sostanzialmente fini a sé stesse; ad esempio, parlando di funzioni, una distinzione fra *campo di definizione* e *dominio* non è né utile né convincente, né alle Superiori né all'Università.

Va anche evitata una *terminologia superflua*. Per esempio, in vari testi sono chiamati "*sottoinsiemi impropri* di un insieme A" l'insieme vuoto e l'insieme A. Questa definizione è inutile (non serve mai nel seguito) e anche ambigua perché non è coerente con l'espressione "un insieme è contenuto propriamente in un altro": infatti, con quest'ultima espressione non si esclude affatto che il primo insieme sia vuoto. Altri termini sostanzialmente superflui, ma meno diffusi, sono: "rappresentazione *sagittale*" e "funzione *univoca*[1]".

---

[1]Parleremo fra poco della definizione di funzione. È invece opportuno sottolineare il concetto di funzione biiettiva da un insieme A ad un insieme B (o biiezione, o corrispondenza biunivoca fra A e B), in cui non soltanto ad ogni elemento di A corrisponde uno e un solo elemento di B, ma anche, viceversa, ogni elemento di B proviene da uno e un solo elemento di A. Volendo, ogni funzione è una corrispondenza univoca, ma non pensiamo che valga la pena introdurre questo aggettivo.

1.2 Applicazioni della teoria degli insiemi. Confronto di definizioni

La teoria degli insiemi è una teoria ricca e potente. In particolare la teoria degli insiemi è più forte dell'aritmetica di Peano (di cui parleremo nel capitolo 12, nel senso che nella teoria degli insiemi si riescono a costruire i numeri naturali, mentre in una teoria dei numeri naturali non si riesce a parlare in generale di insiemi.

In un certo periodo si è sperato che gli insiemi potessero fornire una fondazione logica per l'intera matematica. Si può discutere se e in che misura questo obiettivo sia stato raggiunto, ma è fuori discussione che la teoria degli insiemi offre oggi un linguaggio comune a tutti i rami della matematica. Di conseguenza, alcuni concetti, come quelli di funzione, ordine, relazione di equivalenza, sono concetti base in analisi, in algebra, in geometria e in probabilità.

Così, è normale parlare dell'*insieme ordinato* $\mathbb{R}$ dei numeri reali con i suoi *sottoinsiemi* (intervalli, semirette, ...), di funzione *biiettiva* e di funzione *inversa*, di *coppie* ordinate o non ordinate, di un gruppo o un anello o uno spazio vettoriale come *insieme* con opportune *operazioni* binarie (dove un'operazione in un insieme A va vista come una *funzione* da $A \times A$ ad A), di *sottoinsiemi* dello spazio degli eventi in probabilità, di *relazioni di equivalenza* e del conseguente *passaggio al quoziente*, ecc.

Si potrebbe obiettare che molte di queste idee siano in realtà più antiche (si veda la parte di Analisi per il concetto di funzione), ma solo una trattazione all'interno della teoria degli insiemi permette definizioni chiare e non ambigue.

A proposito dell'ultimo punto vediamo ora, in due esempi significativi, un confronto tra *definizioni diverse* di una stessa nozione matematica. In ciascun caso abbiamo due definizioni corrette, ma nella prima definizione non entrano in gioco concetti della teoria degli insiemi, che invece sono alla base della seconda definizione.

Iniziamo con uno fra i concetti più importanti, quello di funzione.

Definizione 1 *Si chiama* ***funzione*** *da un insieme A ad un insieme B una legge di natura qualsiasi che ad ogni elemento x di A fa corrispondere uno e un solo elemento y di B.*

Definizione 2 *Si chiama* ***corrispondenza*** *fra un insieme A e un insieme B un sottoinsieme del prodotto cartesiano A × B, cioè un insieme di coppie ordinate con il primo elemento in A e il secondo in B.*

Si chiama ***funzione*** *da un insieme A ad un insieme B una corrispondenza fra A e B in cui per ogni elemento x di A esiste uno e un solo elemento y di B tale che la coppia* (x, y) *faccia parte della corrispondenza.*

Qualunque sia la definizione scelta, l'insieme A si dice **dominio** della funzione.

Commento La definizione 1 appare più semplice: in casi particolari avremo a che fare con una legge di natura algebrica, in generale con un metodo per passare dal primo elemento al secondo. In effetti, anche nei primi anni universitari si preferisce spesso la definizione 1.

Se però ci viene chiesto che cosa significa *legge*, ci troviamo in difficoltà. Sembra quasi che si tratti di un altro termine “primitivo”, che viene dato per noto e che si può spiegare solo ricorrendo a sinonimi.

La definizione 2 ha forse il difetto di non mettere in evidenza l’aspetto operativo della funzione, ma è chiara e rigorosa perché non contiene parole ambigue[2]. Inoltre, il concetto di legge si applica in modo convincente al caso in cui gli elementi considerati siano numeri, mentre non sempre a funzioni fra generici insiemi A e B.

In sostanza: a livello didattico si può discutere (e probabilmente in molti contesti è meglio limitarsi per semplicità alla definizione 1), ma sul piano del rigore la definizione 2 è preferibile alla 1.

Che cos’è un *angolo*? Il concetto di angolo è notoriamente delicato. Senza entrare nel merito dei problemi didattici e delle ambiguità discusse per esempio in [Villani, 2006], pag. 133 ss, confrontiamo due fra le definizioni più diffuse.

Definizione 3 *Date nel piano due semirette con la stessa origine (che non giacciono sulla stessa retta), si chiama* ***angolo convesso*** *la regione convessa compresa fra le due semirette; si chiama* ***angolo concavo*** *la regione concava compresa fra le due semirette.*

Definizione 4 *Date nel piano due rette incidenti, si chiama* ***angolo convesso*** *l’intersezione fra due semipiani individuati dalle due rette; si chiama* ***angolo concavo*** *l’unione di due semipiani individuati dalle due rette.*

Commento La definizione 3 è chiara, ma …che cosa significa *compresa*? Ci troviamo ancora di fronte a un concetto che, di per sé, non sembra porre problemi di comprensione, ma che non si riesce a spiegare, se non facendo una figura e indicando la regione voluta.

La definizione 4 è rigorosa, almeno se è stato introdotto il concetto di semipiano. In proposito, si enuncia spesso un postulato del tipo seguente. Ogni retta r suddivide il piano in tre sottoinsiemi a due a due disgiunti: r, H e K. I sottoinsiemi H e K sono tali che un segmento i cui estremi appartengono entrambi ad H (o entrambi a K) non ha alcun punto in comune con r, mentre un segmento i cui estremi appartengono l’uno ad H e l’altro a K ha un punto in comune con r.[3] In

---

[2] Disquisire sulla parola legge può sembrare un eccesso di scrupolo. Ma la parola è davvero ambigua, tanto che talvolta, anche a livello elementare, si distingue fra legge algebrica (o legge matematica) e legge empirica; e poi, coerentemente, si contrappongono le funzioni matematiche alle funzioni empiriche, quasi ci fossero due tipi diversi di funzioni! Si pongono anche problemi linguistici e di cardinalità: legge è qualcosa che, almeno in linea di principio, è descrivibile in formule o a parole? Se la risposta è affermativa, allora esiste solo un’infinità numerabile di leggi, e quindi solo un’infinità numerabile di funzioni. Invece, si accetta comunemente che ci sia un’infinità più che numerabile di funzioni da $\mathbb{R}$ ad $\mathbb{R}$ (basta pensare alle funzioni costanti!).

[3] Per quanto riguarda la definizione 3, la parola compresa si potrebbe precisare facendo riferimento al concetto topologico di componente connessa, ma il discorso si complica.

trattazioni meno elementari si introduce l'assioma di Pasch, equivalente a quello citato, che è riportato nel paragrafo 10.3.

Nei due casi esaminati, riteniamo che ogni insegnante possa tranquillamente scegliere la definizione che preferisce. La nostra preferenza va alla seconda possibilità in entrambi i casi, non tanto per il rigore della singola definizione, quanto perché la scelta si ripropone per altri concetti (in geometria basta pensare ai triangoli) e la definizione 4 permette un inquadramento generale più coerente.

1.3 La teoria degli insiemi nella didattica

Abbiamo detto che non ha molto senso presentare la teoria degli insiemi come argomento a sé stante, da aggiungere agli argomenti tradizionali. Vediamo allora in quali occasioni è utile parlare di insiemi a Scuola.

Ci sono almeno due aspetti per cui la teoria degli insiemi riveste oggi un ruolo importante nella didattica della matematica:

1. la teoria degli insiemi offre un linguaggio molto generale, utile per un'introduzione rigorosa e per un inquadramento chiaro di concetti elementari;
2. i diagrammi di Eulero Venn permettono di confrontare insiemi, e quindi di classificare concetti, in modo rapido ed efficace.

Esempi per il punto 1) - Geometria Nella geometria a due dimensioni, il piano è usualmente visto come insieme di punti; le rette sono sottoinsiemi del piano, così come le figure più comuni (il discorso è analogo nella geometria dello spazio). Sono così corrette espressioni come: "le due rette r, s hanno un punto in comune", "il triangolo ABC è contenuto nel cerchio Γ", ecc.

Abbiamo già parlato di angoli. Varie altre figure si possono presentare come *unione* o *intersezione* di figure più semplici. Per esempio:

- il contorno di un poligono è l'unione dei suoi lati;
- il luogo dei punti che hanno una distanza fissata da una retta è l'unione di due rette;
- un settore circolare è l'intersezione fra un cerchio e un angolo con il vertice nel centro;
- un trapezio si può introdurre come intersezione fra un angolo e una striscia con i lati incidenti ai lati dell'angolo;
- una retta è tangente ad un cerchio se l'intersezione fra le due figure contiene un sol punto.

Si noti che espressioni come "il contorno di un poligono è l'insieme dei suoi lati" ricorrono nell'uso corrente, ma non sono del tutto corrette: il contorno, in quanto figura, è un sottoinsieme del piano e, quindi, è un insieme di punti, non un insieme di segmenti.

Una situazione più interessante si incontra a proposito del parallelismo fra rette nel piano. Accettando la definizione secondo cui due rette sono *parallele* quando sono *disgiunte* (l'intersezione è vuota) oppure coincidono ([Villani, 2006], pag.

50-51]), si dimostra che il parallelismo è una relazione di equivalenza, perché gode delle proprietà riflessiva, simmetrica, transitiva; le classi di equivalenza sono i fasci di rette parallele. Ebbene, ogni classe di equivalenza si può chiamare (per definizione!) *punto improprio* o *punto all'infinito* di ciascuna delle rette appartenenti al fascio.

Esempi per il punto 1) - Aritmetica e Algebra Unione e intersezione di insiemi compaiono di frequente anche in campo algebrico.

Per esempio, se A è l'insieme delle soluzioni dell'equazione $p(x) = 0$ e B è l'insieme delle soluzioni dell'equazione $q(x) = 0$, allora:

- l'insieme delle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} p(x) = 0 \\ q(x) = 0 \end{cases} \qquad \text{è } A \cap B,$$

- l'insieme delle soluzioni dell'equazione $p(x) \cdot q(x) = 0$ è $A \cup B$.

In aritmetica, consideriamo l'insieme degli interi positivi e chiamiamo M_n l'insieme dei multipli del numero n. Allora $M_a \cap M_b$ è l'insieme dei multipli del $\mathrm{mcm}(a, b)$. Si può poi caratterizzare il $\mathrm{MCD}(a, b)$ come il più piccolo numero n tale che M_n contenga $M_a \cup M_b$. Se si estende il concetto di multiplo all'insieme $\mathbb{Z}$ degli interi relativi, allora $M_{\mathrm{MCD}(a,b)} = M_a + M_b$, dove la somma di insiemi indica l'insieme di tutte le somme fra un elemento di M_a e un elemento di M_b. Per esempio, $M_2 = M_4 + M_6$.

Le successive *estensioni dei sistemi numerici*, cioè l'introduzione (partendo dall'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali) degli interi relativi, dei razionali, dei reali e dei complessi, si ottengono attraverso procedimenti di teoria degli insiemi.

Richiamiamo brevemente tali procedimenti, anche se non riteniamo opportuno parlarne a Scuola, se non in circostanze particolari.

Per introdurre gli *interi relativi*, si definisce nel prodotto cartesiano $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ la relazione R ponendo $(a, b)R(c, d)$ se e solo se $a + d = b + c$ (l'idea è di scrivere $a - b = c - d$, ma questo non sempre è lecito in $\mathbb{N}$). Dopo aver dimostrato che R è una relazione di equivalenza, si chiama $\mathbb{Z}$ l'insieme quoziente. È facile dimostrare che ogni classe di equivalenza o contiene una coppia del tipo $(a, 0)$, e allora sarà indicata con il simbolo $+a$, ovvero contiene una coppia del tipo $(0, a)$, e allora verrà indicata con $-a$.

Il procedimento per introdurre i razionali è analogo. Precisamente, detto $\mathbb{Z}_*$ l'insieme $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$, si considera l'insieme $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_*$ (insieme delle *frazioni*); in questo insieme si introduce la relazione S (proporzionalità) così definita: $(a, b)S(c, d)$ se e solo se $a \cdot d = b \cdot c$ (l'idea è di scrivere $a/b = c/d$, ma questo non sempre è lecito in $\mathbb{Z}$). Dopo aver dimostrato che S è una relazione di equivalenza, si chiama $\mathbb{Q}$ l'insieme quoziente. Questo approccio permette di distinguere con chiarezza tra *frazione* (coppia di interi) e *numero razionale* (elemento di $\mathbb{Q}$, classe di equivalenza di frazioni).

Ci sono poi vari procedimenti per definire i *numeri reali*: le *sezioni* di Dedekind, le *successioni fondamentali* di Cantor, le *classi contigue*. Più semplicemente, in una Scuola Superiore i numeri reali si possono introdurre come *allineamenti decimali illimitati*: un numero reale r viene cioè presentato come un numero intero a seguito da infinite cifre decimali $r_1, r_2, \ldots$, cioè $r = a, r_1 r_2 \ldots$ In sostanza, presentare un numero reale come allineamento decimale significa rifarsi a un caso particolare di classi contigue: ad esempio, scrivere $\pi = 3,141\ldots$ equivale ad individuare π mediante le classi contigue (3; 3,1; 3,14; 3,141; ...) e (4; 3,2; 3,15; 3,142; ...).

Infine, per introdurre i *numeri complessi*, si considera il prodotto cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ con opportune operazioni fra coppie.

Esempi per il punto 2) Oggi i diagrammi di Eulero Venn sono probabilmente meno di moda di una ventina di anni fa. Il problema, al solito, è l'uso che se ne fa. Disegnare un diagramma fine a sé stesso, solo per dire che quel diagramma rappresenta un certo insieme, serve a poco. Se invece ci proponiamo di confrontare più insiemi, e quindi di classificare più concetti, i diagrammi di Eulero Venn offrono uno strumento rapido ed efficace. Vediamo un esempio con la classificazione dei triangoli rispetto agli angoli e rispetto ai lati. Altri classici esempi riguardano altre figure geometriche, insiemi numerici, ecc.

In Fig. 1.1 è rappresentato l'insieme T dei triangoli. L'insieme è diviso in tre sottoinsiemi: l'insieme A dei triangoli acutangoli, l'insieme R dei triangoli rettangoli, l'insieme O dei triangoli ottusangoli. Sono poi indicati altri due sottoinsiemi di T: l'insieme I dei triangoli isosceli e, all'interno di questo, l'insieme E dei triangoli equilateri.

Questo diagramma si può presentare alle Superiori e forse anche alle Medie; in ogni caso, richiede una certa attenzione da parte dello studente. Il diagramma riassume varie informazioni: in particolare dice che un triangolo isoscele può essere acutangolo, rettangolo o ottusangolo, mentre un triangolo equilatero è necessariamente acutangolo.

Nel disegno, può essere utile indicare (con un puntino o con altro accorgimento) che nessuna delle 7 zone risulta vuota. Un utile esercizio consiste nel disegnare, per ciascuna di queste 7 zone, un triangolo che appartenga a tale zona.

I diagrammi furono usati da Eulero, in un ambito strettamente logico, nelle *Lettere a una principessa tedesca* per spiegare la teoria del sillogismo. L'opera originale, scritta in francese, risale al 1770; una traduzione italiana, a cura di G. Cantelli, è stata pubblicata da Boringhieri nel 1958.

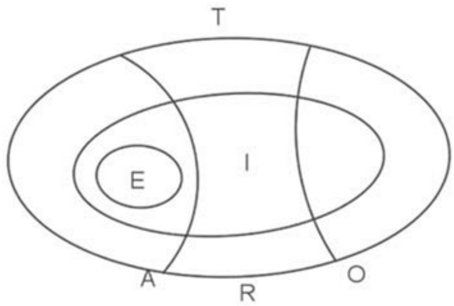

Figura 1.1

Eulero correda la sua trattazione con numerose ed efficaci figure. L'esposizione è chiara e dettagliata; tuttavia, l'idea di usare figure per rappresentare i sillogismi è sicuramente precedente. Eulero prima introduce le quattro specie di proposizioni (affermative universali, affermative particolari, negative universali, negative particolari), poi aggiunge:

> Queste quattro specie di proposizioni si possono rappresentare per mezzo di figure. [...] Ciò è di grandissimo aiuto per spiegare in modo distinto in che cosa consiste un ragionamento. Poiché una nozione generale comprende in sé un'infinità di oggetti individuali, la si considera come uno spazio in cui sono contenuti tutti questi individui.

Vediamo un esempio di sillogismo, con il commento e con la figura originari:

> ogni A è B;
> ora, alcuni C non sono B;
> dunque, alcuni C non sono A.
> Se la nozione C ha una parte fuori della nozione B, questa stessa parte sarà certamente fuori dalla nozione A, perché quest'ultima è tutta intera nella nozione B.

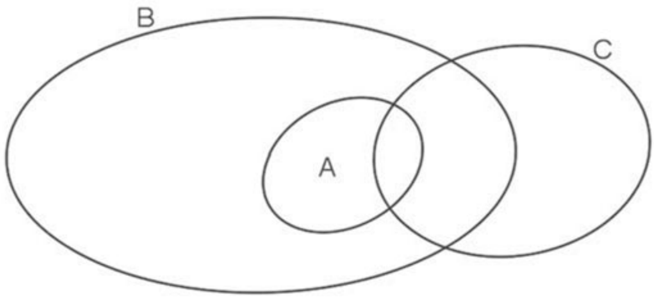

Figura 1.2

1.4 Confronto fra insiemi infiniti

La teoria degli insiemi permette di "studiare l'infinito" in termini matematici. Il confronto fra insiemi infiniti era esplicitamente citato nei programmi PNI (*Piano Nazionale Informatica*) per il triennio del Liceo Scientifico e del Liceo Classico. Si tratta di concetti specifici della teoria degli insiemi, anzi dei concetti su cui Cantor costruì la sua nuova teoria. La teoria di Cantor deve il suo successo proprio al fatto che permette di studiare l'infinito, superando gli antichi paradossi, e di confrontare la grandezza di due insiemi infiniti. Oggi gli insiemi infiniti sono usati con disinvoltura e sicurezza, ma non è stato sempre così (si vedano alcune citazioni nel paragrafo 3.3).

I risultati principali di Cantor riguardano l'*esistenza di cardinali infiniti diversi* (in particolare, la differenza fra numerabile e continuo) e la *non esistenza di un cardinale maggiore di tutti gli altri*. Cerchiamo di spiegare la situazione. Il numero cardinale (o la cardinalità) di un insieme finito non è altro che il numero dei suoi elementi; è chiaro che due insiemi finiti hanno lo stesso numero di elementi se e solo se si possono porre in corrispondenza biunivoca.

Quando si passa agli insiemi infiniti, il discorso diventa complesso e insidioso. Sostanzialmente, Cantor riesce ad associare un numero cardinale anche ad ogni insieme infinito (intuitivamente, si tratta ancora del numero dei suoi elementi), conservando la proprietà secondo cui *due insiemi hanno lo stesso numero cardinale se e solo se si possono porre in corrispondenza biunivoca*. Cantor dimostra che non tutti gli insiemi infiniti hanno lo stesso numero cardinale, cioè un insieme infinito può avere più elementi oppure "meno elementi" di un altro; torneremo sull'argomento parlando dei paradossi di Cantor e di Russell nel capitolo 4.

Questi risultati sono profondi; nonostante il rischio concreto di una comprensione superficiale da parte degli studenti, riteniamo che, almeno in certi contesti, sia utile parlarne con gli studenti delle Superiori per la loro valenza culturale e per l'indubbio "fascino dell'infinito".

Qui ci limitiamo a un riassunto schematico delle principali proprietà. Una trattazione più completa si trova con facilità, anche in manuali scolastici.

Un insieme A è *numerabile* se si può porre in corrispondenza biunivoca con l'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali, cioè se esiste una funzione biiettiva da $\mathbb{N}$ ad A. Sono numerabili i sottoinsiemi infiniti di $\mathbb{N}$, come gli insiemi dei numeri pari o dei numeri primi. Sono numerabili anche insiemi di cui $\mathbb{N}$ è sottoinsieme, come $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$ (vedi seguito).

Per illustrare in modo convincente la differenza fra insiemi finiti e numerabili, si ricorre spesso all'*albergo di Hilbert*. Si tratta di un albergo immaginario che contiene un'infinità numerabile di stanze singole, contrassegnate con i numeri 0, 1, 2, ... L'albergo è al completo. Contrariamente a quello che avviene negli alberghi reali, è possibile ospitare un nuovo cliente, facendo traslocare opportunamente i clienti già presenti (basta spostare il cliente della camera n nella camera $n + 1$: la camera 0 resta libera per il nuovo cliente). Si riesce facilmente a sistemare anche un'infinità numerabile di nuovi clienti, perché basta spostare il cliente della camera n nella camera $2n$ (e restano libere tutte le camere dispari). Un problema più difficile consiste nel mostrare che è possibile ospitare un'infinità numerabile di amici per ognuno dei clienti già presenti. La situazione è concettualmente analoga all'osservazione che segue ($\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ è numerabile): guardando lo schema con le coppie di naturali (Fig. 1.3), si può pensare la prima riga come l'insieme dei clienti alloggiati inizialmente e ogni colonna come l'insieme degli amici di ciascun cliente.

Sorprendente è il fatto che anche $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ è numerabile. In Fig. 1.3 è illustrata una nota dimostrazione di tipo geometrico.

Seguendo le frecce, si dispongono tutte le coppie ordinate di numeri naturali in una successione; si ottiene così la seguente funzione biiettiva f da $\mathbb{N}$ a $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$:

$$f(0) = (0;0);\ f(1) = (0;1);\ f(2) = (1;1);\ f(3) = (1;0);\ f(4) = (2;0);\ldots$$

dove le coppie corrispondenti ai vari numeri non si determinano mediante una formula, ma si ottengono seguendo appunto le frecce illustrate in Fig. 1.3.

Ci sono anche dimostrazioni che si basano sull'esistenza di una funzione iniettiva da $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ad $\mathbb{N}$, come la funzione $g(a,b) = 2^a 3^b$, che associa un numero

$$
\begin{array}{ccccccccc}
(0;0) & & (1;0) & \rightarrow & (2;0) & & (3;0) & \rightarrow & \dots \\
\downarrow & & \uparrow & & \downarrow & & \uparrow & & \dots \\
(0;1) & \rightarrow & (1;1) & & (2;1) & & (3;1) & & \dots \\
 & & & & \downarrow & & \uparrow & & \dots \\
(0;2) & \leftarrow & (1;2) & \leftarrow & (2;2) & & (3;2) & & \dots \\
\downarrow & & & & & & \uparrow & & \dots \\
(0;3) & \rightarrow & (1;3) & \rightarrow & (2;3) & \rightarrow & (3;3) & & \dots \\
\dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots
\end{array}
$$

Figura 1.3

naturale ad ogni coppia di naturali, in modo che coppie diverse abbiano immagini diverse. Se ne deduce che l'insieme $\mathbb{Q}$ dei razionali è numerabile, perché ogni razionale è individuato da una frazione (con numeratore e denominatore primi fra loro) e quindi da una coppia di interi.

Anche l'insieme dei numeri algebrici è numerabile (si ricordi che un numero è *algebrico* se è soluzione dell'equazione che si ottiene uguagliando a 0 un polinomio a coefficienti interi).

L'insieme dei reali $\mathbb{R}$, così come l'insieme dei punti di una retta, non è numerabile.

Più precisamente, applicando il *procedimento diagonale* di Cantor, si dimostra che l'intervallo $[0,1]$ non è numerabile: una successione di numeri appartenenti all'intervallo non può esaurire l'intervallo stesso. L'idea della dimostrazione consiste nel costruire un numero che abbia come n-esima cifra decimale una cifra diversa dall'n-esima cifra decimale dell'n-esimo numero. La cardinalità di $\mathbb{R}$ si chiama *potenza del continuo*.

Sorprendentemente, $\mathbb{R}$ si può porre in corrispondenza biunivoca sia con un qualunque segmento (purché non degenere), sia con $\mathbb{R}^n$ (per ogni n intero positivo). Questo si può esprimere dicendo che un piano ha tanti punti quanti una retta, o tanti quanti un segmento; quindi, la cardinalità di uno spazio geometrico reale non è legata alla sua dimensione.

Ricordiamo, infine, che anche l'insieme dei sottoinsiemi di $\mathbb{N}$ ha la potenza del continuo.

Tabella 1.1 Cardinalità di alcuni insiemi infiniti

Insiemi numerabili	*Insiemi con la cardinalità del continuo*	*Insiemi con la cardinalità maggiore del continuo*
$\mathbb{N}$ = insieme dei naturali	$\mathbb{R}$ = insieme dei reali	insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$
$\mathbb{Z}$ = insieme degli interi	$[a,b]$ intervallo sulla retta (con $a < b$)	$P(\mathbb{R})$ l'insieme dei sottoinsiemi di $\mathbb{R}$
$\mathbb{Q}$ = insieme dei razionali	insieme dei punti del piano	
insieme dei numeri primi	$P(\mathbb{N})$ l'insieme dei sottoinsiemi di $\mathbb{N}$	

Capitolo 2
Che cosa significa che due insiemi sono uguali? La parola "uguale" e il simbolo "=" hanno un unico significato in matematica?

Due insiemi sono **uguali** quando sono lo stesso insieme, cioè quando hanno gli stessi elementi, indipendentemente dal modo in cui sono indicati i due insiemi (in particolare, dall'ordine con cui sono elencati i loro elementi). Questa definizione è coerente con l'idea generale di uguaglianza. Ma il discorso non si può concludere qui.

Nel linguaggio corrente si usa spesso l'aggettivo *uguali* con un significato più ampio. Se uno dice a un amico "ho comperato una camicia uguale alla tua", intende dire che le due camicie hanno gli stessi colori, sono fatte con lo stesso tessuto, hanno il collo della stessa forma, ... Ma, sicuramente, *non* intende dire che si tratta della stessa camicia; abbiamo a che fare con due camicie che, anzi, possono differire per aspetti che si ritengono meno significativi, come la taglia.

Torniamo agli insiemi e alla matematica. In generale, il segno = collega due scritture che indicano uno stesso oggetto:

$$\{\, n \in \mathbb{N} \mid n \text{ è un divisore di } 8 \,\} = \{\, 1, 2, 4, 8 \,\}$$
$$11 = \text{ il minimo numero primo maggiore di } 10.$$

Quindi, il segno = non stabilisce l'uguaglianza delle notazioni e dei simboli, ma degli oggetti indicati dai simboli.

Scriviamo anche $3/2 = 6/4$, intendendo che il segno = si riferisca non alle frazioni (che, a rigore, sono equivalenti e non uguali), ma ai numeri razionali corrispondenti.

In algebra, usiamo il segno = scrivendo, ad esempio, $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$. Le due espressioni sono formalmente diverse e corrispondono a diversi algoritmi di calcolo. Se, tuttavia, pensiamo ciascuno dei due membri come *funzione* (in due variabili), le due funzioni sono uguali, nel senso che assumono lo stesso valore per ogni coppia (a, b). Il discorso è un po' diverso nel caso di un'equazione. Consideriamo per esempio l'equazione $2x + 3 = x - 1$ e pensiamo ancora i due membri come funzioni (ad ogni x la prima associa il valore $2x + 3$, mentre la seconda associa $x - 1$. Con la scrittura precedente non pretendiamo di affermare che le due funzioni sono uguali, ma vogliamo dire che si cercano i valori di x per cui le due funzioni assumono lo stesso valore.

Naturalmente, con gli studenti il simbolo = e la parola uguale si usano per lo più in modo operativo, senza troppe discussioni.

Proprio dal punto di vista operativo, il simbolo = spesso significa solo *uguale per quanto ci interessa, per i nostri scopi*. Quando eseguiamo operazioni, le frazioni $3/2$ e $6/4$ sono interscambiabili, così come in algebra possiamo sostituire $a^2 - b^2$ con $(a - b)(a + b)$ ogni volta che lo riteniamo utile.

Villani V., Bernardi C., Zoccante S., Porcaro R.: Non solo calcoli. Domande e risposte sui perché della matematica
DOI 10.1007/978-88-470-2610-0_2, © Springer-Verlag Italia 2012

Passiamo alla geometria. In alcune trattazioni vengono considerate *uguali* solo le figure coincidenti, cioè si stabilisce che "ogni figura è uguale solo a sé stessa"; si chiamano, poi, *congruenti* due figure che si ottengono l'una dall'altra mediante un movimento rigido. Se si pensa una figura come insieme di punti, questa scelta terminologica è in accordo con la precedente definizione di uguaglianza di insiemi: due triangoli sono uguali solo se hanno gli stessi punti.

Tuttavia, si può discutere su quale terminologia sia da preferirsi. Sul piano didattico, riteniamo che l'aggettivo *uguale*, proprio per il suo uso nel linguaggio corrente, indichi più direttamente l'idea geometrica che si vuole trasmettere: come diciamo che sono uguali due monete da 1 euro (italiane e dello stesso anno), in un senso del tutto analogo parliamo di triangoli uguali. Del resto, come abbiamo già notato, a rigore non dovremmo nemmeno dire che la frazione $6/4$ è uguale alla frazione $3/2$, ma, in questo come in altri casi, un atteggiamento di eccessivo rigore complica le cose senza alcun sostanziale vantaggio. Anche su un piano teorico si parla spesso di "*uguaglianza a meno di ...*", cioè di uguaglianza per gli scopi che interessano in quel momento. Anzi, per questa via si arriva al programma di Erlangen di Felix Klein [[Villani, 2006], pag. 217], che inquadra il problema in modo molto convincente, con riferimento a un gruppo di trasformazioni: in un certo contesto una figura è identificabile con ("uguale a") tutte quelle che si ottengono applicando opportune trasformazioni.

In sostanza riteniamo che, dal punto di vista sia teorico sia didattico, la parola *uguale* vada interpretata con riferimento allo studio che si sta facendo; e, in geometria elementare, la scelta più spontanea ci sembra quella di pensare all'uguaglianza a meno di movimenti rigidi. Qualunque sia la terminologia preferita dall'insegnante (o dagli autori del libro di testo), è importante che si spieghi agli alunni la situazione.

Sempre in geometria, e soprattutto in geometria analitica, qualora si voglia esprimere la coincidenza di due punti A e B, è frequente l'uso del simbolo $\equiv$. Il discorso è analogo al precedente: basta scrivere $A = B$; se, tuttavia, attribuiamo al simbolo $=$ un valore più ampio, allora può essere opportuno modificare il simbolo quando si ha a che fare con due punti coincidenti.

C'è differenza fra le espressioni "dati due punti A e B" e "dati due punti distinti A e B"?

Il problema riguarda la parola *due*. Se la intendiamo come numero degli elementi di un insieme (cioè se stiamo considerando un insieme di punti con cardinalità due), allora l'aggettivo *distinti* è superfluo: se un insieme ha due elementi (punti, numeri, ...), i due elementi sono necessariamente distinti. In quest'ordine di idee, all'inizio dei *Fondamenti della Geometria*, Hilbert afferma che, quando parla di due o più punti $A, B, \ldots$, "si deve sempre intendere punti distinti".

Questa precisazione è giustamente sparita nei testi attuali, perché molto spesso non conviene escludere il caso di due oggetti coincidenti: per esempio, scrivendo la formula che esprime la proprietà associativa o la formula risolutiva delle equazioni di secondo grado, non si esclude affatto che lettere diverse indichino uno stesso numero. Del resto, quando sommiamo *due* numeri, accettiamo senz'altro il caso particolare in cui i due addendi sono uguali.

Che cosa significa, allora, la parola due? Se vogliamo essere pignoli (con il rischio di complicare le cose), in questa accezione dobbiamo interpretare il *due* come *dominio di una funzione*. Per chiarire il discorso, pensiamo al fatto che i due numeri, o i due punti ..., vengono spesso indicati con una scrittura del tipo a_1, a_2. Noi usiamo correntemente scritture del tipo a_i; in queste scritture l'indice i rappresenta una variabile indipendente: potremmo scrivere $a(i)$, anche se la notazione risulterebbe indubbiamente più pesante. In sostanza, abbiamo una funzione che associa al numero 1 l'oggetto a_1 e al numero 2 l'oggetto a_2: i due oggetti possono essere diversi (la funzione è iniettiva) oppure coincidere.

Un problema analogo si incontra quando diciamo che l'equazione $x^2+2x+1 = 0$ ha *due soluzioni coincidenti*, oppure che una retta tangente a una circonferenza Γ ha *due punti coincidenti* di intersezione con Γ. È corretto questo modo di esprimersi? Crediamo che la risposta dipenda dal contesto.

A rigore, se consideriamo l'insieme delle soluzioni dell'equazione, oppure l'intersezione fra retta e circonferenza, allora questi insiemi hanno un solo elemento.

D'altra parte, noi possiamo indicare, come in effetti si fa, con x_1, x_2 le due soluzioni di un'equazione di secondo grado e notare che, in casi particolari, le due soluzioni assumono lo stesso valore. Questo modo di esprimersi è giustificato dall'uso delle formule risolutive delle equazioni e, soprattutto, dal teorema fondamentale dell'algebra, dove ogni radice va considerata con un'opportuna molteplicità.

Analogamente, ci pare meglio dire che una circonferenza e una retta tangente hanno un solo punto in comune. Tuttavia, parlare di due punti coincidenti è accettabile quando si considerano le due intersezioni fra la circonferenza e una retta secante, e si pensa alla retta tangente come limite di una retta secante.

Torniamo al simbolo =, che ha molti significati non sempre facili da distinguere. Noi scriviamo uguaglianze come $3 + 7 = 10$, così come usiamo il simbolo = fra i vari passaggi mediante i quali semplifichiamo un'espressione algebrica. In questi casi la relazione di uguaglianza gode della *proprietà simmetrica*?

Dal punto di vista matematico la risposta è affermativa: se $3 + 7 = 10$ allora $10 = 3 + 7$. Tuttavia, nelle intenzioni di chi sta svolgendo un calcolo, quel simbolo = indica che il primo membro *si riduce* al secondo, che risulta più semplice del primo; del resto, nel linguaggio parlato si dice "tre più sette fa dieci", e quel fa non è simmetrico.

Lo stesso segno = si usa anche quando si attribuisce un valore a una lettera o si definisce una funzione, ad esempio dicendo "poniamo $a = 2^{32} - 1$", oppure "$f(x) = 3x^2 + 2$". In questi casi, c'è chi preferisce il simbolo :=, che sicuramente rappresenta una notazione più precisa perché chiarisce che l'uguaglianza corrisponde a una definizione (si veda anche il capitolo 11). Ancora una volta, rimane il dubbio didattico se valga la pena appesantire il discorso, correndo talora il rischio di qualche incongruenza.

Riassumendo: il simbolo = e la parola *uguale* hanno vari significati, che è utile analizzare e discutere, ma che non crediamo siano causa di confusione.

Capitolo 3
Che cosa significa che un insieme è infinito, oppure che è finito?

3.1 La definizione di Dedekind

Pur con tutte le problematiche filosofiche legate al concetto di infinito, la distinzione fra insiemi finiti e insiemi infiniti è chiara da un punto di vista intuitivo. Ma, in questo come in altri casi, è difficile tradurre l'idea intuitiva in termini rigorosi. Così, capita che, su libri di testo per le Scuole Secondarie, si leggano frasi del tipo "un insieme si dice *infinito* se l'elenco dei suoi elementi non ha termine". Queste non sono naturalmente definizioni rigorose, ma sono accettabili come spiegazioni, se non altro perché non è facile proporre alternative.

Per una definizione matematica di insieme infinito occorre arrivare a Richard Dedekind (1872), secondo cui *un insieme A si dice* ***infinito*** *se può essere messo in corrispondenza biunivoca con un suo sottoinsieme proprio cioè con un insieme B contenuto in A ma diverso da A*. Un'idea non troppo diversa era stata enunciata da Bernard Bolzano nel 1848.

Per chiarire la definizione, è bene fare un passo indietro. Da molti secoli è noto che c'è una corrispondenza biunivoca fra l'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali e l'insieme P dei numeri pari, perché basta far corrispondere ad ogni numero il suo doppio. La situazione è strana: da un lato, i numeri pari sono tanti quanti i numeri naturali, dall'altro i numeri pari sono solo una parte dei naturali ($P \subset \mathbb{N}$) e quindi sembrano di meno dei naturali.

Galileo, nella prima giornata dei *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze*, presenta il paradosso dei *numeri quadrati*: "converrà dire che i numeri quadrati siano tanti quanti tutti i numeri, poiché tanti sono quante le lor radici [...] e pur dicemmo tutti i numeri esser assai più che tutti i quadrati, essendo la maggior parte non quadrati." L'esempio di Galileo è analogo al precedente, ma è più raffinato, perché "si va la moltitudine de i quadrati sempre con maggior proporzione diminuendo, quanto a maggior numeri si trapassa". In termini rigorosi, oggi si dice che la *densità asintotica* dei quadrati è 0, mentre quella dei pari è 1/2.

Galileo prosegue dicendo, in sostanza, che è meglio rinunciare a confrontare due insiemi infiniti: "Queste son di quelle difficoltà che derivano dal discorrer che noi facciamo col nostro intelletto finito intorno a gli infiniti, dandogli quegli attributi che noi diamo alle cose finite e terminate; il che penso che sia inconveniente, perché stimo che questi attributi di maggioranza minorità ed ugualità non convenghino a gl'infiniti, de i quali non si può dire, uno essere maggiore o minore o eguale all'altro."

Con l'opera di Dedekind e soprattutto di Cantor (si veda il capitolo 4), si superano le difficoltà di cui parlava Galileo. L'idea di Dedekind è molto bella, quasi coraggiosa: per *definire* gli insiemi infiniti, usiamo proprio la caratteristica para-

Villani V., Bernardi C., Zoccante S., Porcaro R.: Non solo calcoli. Domande e risposte sui perché della matematica
DOI 10.1007/978-88-470-2610-0_3, © Springer-Verlag Italia 2012

dossale prima discussa. L'insieme $\mathbb{N}$ è infinito appunto perché si può porre in corrispondenza biunivoca con l'insieme P dei numeri pari; anche P è infinito perché si può porre in corrispondenza biunivoca con l'insieme dei multipli di 4 (basta ancora far corrispondere ad ogni numero pari il suo doppio).

Partendo dalla definizione citata, si ottiene una buona trattazione matematica degli insiemi infiniti. Ci limitiamo qui ad enunciare un solo teorema.

Teorema 1 *Un insieme A è infinito se e solo se esiste una funzione iniettiva da $\mathbb{N}$ in A.*

Di conseguenza, sono infiniti gli insiemi numerici $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ (come, del resto, si potrebbe verificare direttamente).

Ma il discorso non si può considerare concluso.

In primo luogo, chi ci assicura che la definizione di Dedekind catturi la nostra idea intuitiva? Dopo tutto, almeno a priori, la definizione non è in alcun modo legata all'idea di infinito. Ci sono situazioni analoghe in altri rami della matematica, cioè situazioni in cui, per tradurre un concetto intuitivo, si dà una definizione rigorosa, ma non ci sono motivi evidenti per sostenere che la definizione rappresenti una traduzione fedele del concetto intuitivo. Esaminiamo due di queste situazioni: la continuità di una funzione da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ e le funzioni ricorsive.

Nel primo caso, per dire che riusciamo a tracciare il grafico di una funzione senza staccare la penna dal foglio, ci inventiamo una frase complicata in cui compaiono ε e δ (si veda il capitolo 15). La definizione è indubbiamente difficile e, anche per gli studenti migliori, è necessario un po' di tempo per "capire" che la definizione è adeguata a quello che si vuole dire. D'altra parte, è interessante notare che la definizione rigorosa permette poi di affrontare nuove situazioni (funzioni in più variabili, o fra spazi diversi da $\mathbb{R}$) in cui sarebbe difficile dare un senso alla definizione intuitiva.

È forse più chiaro il secondo caso, in cui si vogliono caratterizzare le funzioni computabili, cioè le funzioni che, almeno in linea teorica, si possono effettivamente calcolare (ad esempio con un computer). Prima si introduce la definizione di funzione parziale ricorsiva[1] ed è chiaro che le funzioni parziali ricorsive sono computabili; poi si dice che le funzioni computabili sono *soltanto* quelle parziali ricorsive, e che non ce ne sono altre. Quest'ultima affermazione è nota come *Tesi di Church*: la Tesi di Church asserisce appunto che l'idea intuitiva di funzione computabile è tradotta fedelmente dalla definizione rigorosa. Non si tratta di un

---

[1]Accenniamo a una definizione di funzione parziale ricorsiva; una definizione equivalente si può dare ricorrendo alle macchine di Turing. È importante far riferimento alle funzioni parziali, cioè definite in un sottoinsieme A di $\mathbb{N}$ ovvero di $\mathbb{N}^n$ (senza escludere, naturalmente, il caso $A = \mathbb{N}$). Si parte dalle funzioni base (la costante 0, la funzione successivo, le proiezioni) che sono sicuramente computabili. Si introducono i procedimenti di composizione e recursione per costruire, a partire da funzioni computabili, altre funzioni computabili. Si introduce poi un altro procedimento per costruire funzioni a partire da funzioni note: la minimalizzazione, che fa passare da una funzione $g\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ alla funzione che ad ogni x associa il minimo y, se esiste, tale che $g(x, y) = 0$. A questo punto, si chiamano parziali ricorsive tutte le funzioni da A ad $\mathbb{N}$ (dove $A \subseteq \mathbb{N}^n$) che si ottengono dalle funzioni base applicando un numero finito di volte i procedimenti di composizione, recursione e minimalizzazione (quest'ultimo procedimento va applicato solo a funzioni che hanno per dominio $\mathbb{N}^2$ e non un suo sottoinsieme).

teorema (non si può dimostrare), ma di una tesi che esprime una nostra fiducia, supportata dalla considerazione di molti esempi e, almeno per ora, dalla mancanza di controesempi. Anche nel caso degli insiemi infiniti abbiamo a che fare con una tesi analoga, che tuttavia non viene esplicitata.

Oggi la definizione di Dedekind è comunemente accettata. A priori la definizione appare in qualche misura misteriosa; ma gli esempi e, soprattutto, la teoria successiva (come il teorema prima ricordato) confermano che la definizione è adeguata.

3.2 Finito e infinito. Limitato e illimitato

In alcune trattazioni si dà la definizione di *insieme finito* a partire da quella di insieme infinito: un insieme è finito se non è infinito. A prima vista, questo modo di procedere lascia dubbiosi: è del tutto spontaneo che i due concetti di finito e infinito siano l'uno la negazione dell'altro, ma sembra che si dovrebbe partire dal finito per poi introdurre l'infinito.

Ma come definiamo direttamente gli insiemi finiti? Ci sono varie possibilità, per lo più equivalenti fra loro, ma piuttosto complesse. Per esempio, possiamo dire che un insieme è finito se ha come cardinalità un numero naturale; questa definizione, tuttavia, presuppone che siano stati introdotti in teoria degli insiemi i numeri naturali (e la cosa non è facile, né breve).

In effetti, la strada più semplice consiste proprio nel rifarsi alla definizione di Dedekind: "un insieme è *finito* quando *non* si può porre in corrispondenza biunivoca con un suo sottoinsieme proprio". Questa strada lascia insoddisfatti almeno sul piano etimologico: in italiano, come pure in inglese, francese, tedesco, spagnolo …, infinito è la negazione di finito e non viceversa. Ma da un punto di vista filosofico e anche matematico si può discutere a lungo. A pensarci bene, è ragionevole che in ciascuno di noi nasca prima l'idea di infinito e, solo in un secondo tempo, quella di finito come negazione: sembra improbabile che uno abbia un'intuizione autonoma di finito e poi passi per negazione all'infinito.

Se ci riferiamo a insiemi di numeri, o a insiemi di punti del piano, occorre distinguere con attenzione i concetti di insieme infinito e insieme illimitato.

Un sottoinsieme A dell'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali si dice *limitato* se esiste un numero positivo M tale che $|x| < M$ per ogni x appartenente ad A. Analogamente, un sottoinsieme A di $\mathbb{R}^2$ (identificabile con l'insieme dei punti del piano) si dice *limitato* se esiste un numero M tale che $\sqrt{x^2 + y^2} < M$ per ogni coppia (x, y) appartenente ad A.

È chiaro che se un insieme non è limitato, allora è necessariamente infinito. D'altra parte, esistono insiemi limitati ma infiniti (limitato non implica finito o, se si preferisce, infinito non implica illimitato): basta pensare a un intervallo nella retta reale oppure, nel piano, all'insieme dei punti di un cerchio o di un poligono. Anche l'insieme delle frazioni con numeratore 1, cioè l'insieme $\{ 1/1, 1/2, 1/3, \cdots \}$ è limitato ma infinito (più precisamente numerabile).

Si noti che, invece, un sottoinsieme di $\mathbb{N}$ o di $\mathbb{Z}$ è limitato se e solo se è finito.