N. BOURBAKI

ÉLÉMENTS DE MATHÉMATIQUE

Topologie générale

Chapitres 5 à 10

Springer

N. BOURBAKI

ÉLÉMENTS DE MATHÉMATIQUE

N. BOURBAKI

ÉLÉMENTS DE
MATHÉMATIQUE

TOPOLOGIE GÉNÉRALE

Chapitres 5 à 10

Springer

Réimpression inchangée de l'édition originale de 1974
© Hermann, Paris, 1974
© N. Bourbaki, 1981

© N. Bourbaki et Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2007
(décembre 2006; nouveau tirage février 2007)

ISBN 978-3-540-34399-8 Springer Berlin Heidelberg New York

Tous droits de traduction, de reproduction et d'adaptation réservés pour tous pays.
La loi du 11 mars 1957 interdit les copies ou les reproductions destinées à une utilisation collective.
Toute représentation, reproduction intégrale ou partielle faite par quelque procédé que ce soit, sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants cause, est illicite et constitue une contrefaçon sanctionnée par les articles 425 et suivants du Code pénal.

Springer est membre du Springer Science+Business Media
springer.com

Maquette de couverture: WMXDesign GmbH, Heidelberg
Imprimé sur papier non acide 41/3100/YL - 5 4 3 2 1 0 -

Mode d'emploi de ce traité

NOUVELLE ÉDITION

1. Le traité prend les mathématiques à leur début, et donne des démonstrations complètes. Sa lecture ne suppose donc, en principe, aucune connaissance mathématique particulière, mais seulement une certaine habitude du raisonnement mathématique et un certain pouvoir d'abstraction. Néanmoins, le traité est destiné plus particulièrement à des lecteurs possédant au moins une bonne connaissance des matières enseignées dans la première ou les deux premières années de l'Université.

2. Le mode d'exposition suivi est axiomatique et procède le plus souvent du général au particulier. Les nécessités de la démonstration exigent que les chapitres se suivent, en principe, dans un ordre logique rigoureusement fixé. L'utilité de certaines considérations n'apparaîtra donc au lecteur qu'à la lecture de chapitres ultérieurs, à moins qu'il ne possède déjà des connaissances assez étendues.

3. Le traité est divisé en Livres et chaque Livre en chapitres. Les Livres actuellement publiés, en totalité ou en partie, sont les suivants:

Théorie des Ensembles	désigné par	E
Algèbre	,,	A
Topologie générale	,,	TG
Fonctions d'une variable réelle	,,	FVR
Espaces vectoriels topologiques	,,	EVT
Intégration	,,	INT
Algèbre commutative	,,	AC
Variétés différentielles et analytiques	,,	VAR
Groupes et algèbres de Lie	,,	LIE
Théories spectrales	,,	TS

Dans les *six premiers* Livres (pour l'ordre indiqué ci-dessus), chaque énoncé ne fait appel qu'aux définitions et résultats exposés précédemment dans ce Livre ou dans les Livres *antérieurs*. A partir du septième Livre, le lecteur trouvera éventuellement, au début de chaque Livre ou chapitre, l'indication précise des autres Livres ou chapitres utilisés (les six premiers Livres étant toujours supposés connus).

4. Cependant, quelques passages font exception aux règles précédentes. Ils sont placés entre deux astérisques: * . . . *. Dans certains cas, il s'agit seulement de faciliter la compréhension du texte par des exemples qui se réfèrent à des faits que le lecteur peut déjà connaître par ailleurs. Parfois aussi, on utilise, non seulement les résultats supposés connus dans tout le chapitre en cours, mais des résultats démontrés ailleurs dans le traité. Ces passages seront employés librement dans les parties qui supposent connus les chapitres où ces passages sont insérés et les chapitres auxquels ces passages font appel. Le lecteur pourra, nous l'espérons, vérifier l'absence de tout cercle vicieux.

5. A certains Livres (soit publiés, soit en préparation) sont annexés des *fascicules de résultats*. Ces fascicules contiennent l'essentiel des définitions et des résultats du Livre, mais aucune démonstration.

6. L'armature logique de chaque chapitre est constituée par les *définitions*, les *axiomes* et les *théorèmes* de ce chapitre; c'est là ce qu'il est principalement nécessaire de retenir en vue de ce qui doit suivre. Les résultats moins importants, ou qui peuvent être facilement retrouvés à partir des théorèmes, figurent sous le nom de « propositions », « lemmes », « corollaires », « remarques », etc.; ceux qui peuvent être omis en première lecture sont imprimés en petits caractères. Sous le nom de « scholie », on trouvera quelquefois un commentaire d'un théorème particulièrement important.

Pour éviter des répétitions fastidieuses, on convient parfois d'introduire certaines notations ou certaines abréviations qui ne sont valables qu'à l'intérieur d'un seul chapitre ou d'un seul paragraphe (par exemple, dans un chapitre où tous les anneaux considérés sont commutatifs, on peut convenir que le mot « anneau » signifie toujours « anneau commutatif »). De telles conventions sont explicitement mentionnées à la tête du *chapitre* dans lequel elles s'appliquent.

7. Certains passages sont destinés à prémunir le lecteur contre des erreurs graves, où il risquerait de tomber; ces passages sont signalés en marge par le signe ☡ (« tournant dangereux »).

8. Les exercices sont destinés, d'une part, à permettre au lecteur de vérifier qu'il a bien assimilé le texte; d'autre part, à lui faire connaître des résultats qui n'avaient pas leur place dans le texte; les plus difficiles sont marqués du signe ¶.

9. La terminologie suivie dans ce traité a fait l'objet d'une attention particulière. *On s'est efforcé de ne jamais s'écarter de la terminologie reçue sans de très sérieuses raisons.*

10. On a cherché à utiliser, sans sacrifier la simplicité de l'exposé, un langage rigoureusement correct. Autant qu'il a été possible, les *abus de langage ou de notation*, sans lesquels tout texte mathématique risque de devenir pédantesque et même illisible, ont été signalés au passage.

11. Le texte étant consacré à l'exposé dogmatique d'une théorie, on n'y trouvera qu'exceptionnellement des références bibliographiques; celles-ci sont groupées dans des *notes historiques*. La bibliographie qui suit chacune de ces Notes ne comporte le plus souvent que les livres et mémoires originaux qui ont eu le plus d'importance dans l'évolution de la théorie considérée; elle ne vise nullement à être complète.

Quant aux exercices, il n'a pas été jugé utile en général d'indiquer leur provenance, qui est très diverse (mémoires originaux, ouvrages didactiques, recueils d'exercices).

12. Dans la nouvelle édition, les renvois à des théorèmes, axiomes, définitions, remarques, etc. sont donnés en principe en indiquant successivement le Livre (par l'abréviation qui lui correspond dans la liste donnée au n° 3), le chapitre et la page où ils se trouvent. A l'intérieur d'un même Livre la mention de ce Livre est supprimée; par exemple, dans le Livre d'Algèbre,

E, III, p. 32, cor. 3

renvoie au corollaire 3 se trouvant au Livre de Théorie des Ensembles, chapitre III, page 32 de ce chapitre;

II, p. 23, *Remarque* 3

renvoie à la Remarque 3 du Livre d'Algèbre, chapitre II, page 23 de ce chapitre.

Les fascicules de résultats sont désignés par la lettre R; par exemple: EVT, R signifie « fascicule de résultats du Livre sur les Espaces vectoriels topologiques ».

Comme certains Livres doivent seulement être publiés plus tard dans la nouvelle édition, les renvois à ces Livres se font en indiquant successivement le Livre, le chapitre, le paragraphe et le numéro où se trouve le résultat en question; par exemple:

AC, III, § 4, n° 5, cor. de la prop. 6.

Au cas où le Livre cité a été modifié au cours d'éditions successives, on indique en outre l'édition.

Groupes à un paramètre

§ 1. SOUS-GROUPES ET GROUPES QUOTIENTS DE **R**

1. Sous-groupes fermés de R

PROPOSITION 1. — *Tout sous-groupe fermé du groupe additif* **R**, *distinct de* **R** *et de* $\{0\}$, *est un groupe discret de la forme* $a.\mathbf{Z}$, *où* $a > 0$ (autrement dit, est formé des multiples entiers de a).

Montrons d'abord que tout sous-groupe non discret de **R** est partout dense. Si un sous-groupe G de **R** n'est pas discret, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un point $x \neq 0$ de G appartenant à l'intervalle $\left]-\varepsilon, +\varepsilon\right[$; comme les multiples entiers de x appartiennent à G, tout intervalle de longueur $> \varepsilon$ contient un tel multiple, c'est-à-dire que G est partout dense dans **R**.

Tout sous-groupe fermé distinct de **R** est donc discret. Reste à montrer que tout sous-groupe discret G de **R**, non réduit à 0, est de la forme $a.\mathbf{Z}$, où $a > 0$. Or, la relation $-G = G$ montre que l'ensemble H des éléments >0 de G n'est pas vide; si $b \in H$, l'intersection de l'intervalle $\left]0, b\right]$ et de G est un ensemble *compact* et *discret*, donc *fini*; soit a le plus petit des éléments de H contenus dans $\left]0, b\right]$; pour tout $x \in G$, posons $m = [x/a]$ (partie entière de x/a); on a $x - ma \in G$ et $0 \leqslant x - ma < a$; d'après la définition de a, $x - ma = 0$, ce qui prouve que $G = a.\mathbf{Z}$.

2. Groupes quotients de R

Tout groupe quotient *séparé* de **R** est de la forme $\mathbf{R}/H$, où H est un sous-groupe *fermé* de **R** (III, p. 13, prop. 18); donc, d'après la prop. 1 de V, p. 1:

PROPOSITION 2. — *Les groupes quotients séparés de* **R**, *non réduits à l'élément neutre, sont les groupes* $\mathbf{R}/a\mathbf{Z}$ $(a \geqslant 0)$.

Si a et b sont des nombres >0, l'automorphisme $x \mapsto (b/a)x$ de $\mathbf{R}$ transforme $a\mathbf{Z}$ en $b\mathbf{Z}$; donc (III, p. 17, *Remarque* 3) les groupes quotients $\mathbf{R}/a\mathbf{Z}$ et $\mathbf{R}/b\mathbf{Z}$ sont isomorphes; en d'autres termes:

PROPOSITION 3. — *Tout groupe quotient séparé de* $\mathbf{R}$, *distinct de* $\mathbf{R}$ *et non réduit à l'élément neutre, est isomorphe au groupe* $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$.

DÉFINITION 1. — *Le groupe topologique* $\mathbf{R}/a\mathbf{Z}$ $(a > 0)$ *est appelé groupe additif des nombres réels modulo a. On désigne par* $\mathbf{T}$ *le groupe topologique* $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$; *en tant qu'espace topologique,* $\mathbf{T}$ *est appelé tore à une dimension* (par abus de langage, on appelle aussi « tore à une dimension » le *groupe topologique* $\mathbf{T}$).

Remarques. — 1) La relation $x \equiv y$ (mod. $a\mathbf{Z}$) s'écrit plus souvent $x \equiv y$ (mod. a) ou simplement $x \equiv y$ (a), et se lit « x et y sont congrus modulo a »; elle signifie donc que $x - y$ est un *multiple entier* de a. Lorsque a est entier, la relation induite sur $\mathbf{Z}$ par cette relation d'équivalence n'est autre que la congruence modulo a (A, I, p. 46), ce qui justifie la notation précédente.

*2) Comme nous le verrons dans VI, p. 12, l'espace topologique $\mathbf{T}$ est homéomorphe au *cercle* $x^2 + y^2 = 1$ du plan numérique $\mathbf{R}^2$; le produit $\mathbf{T}^2$ est homéomorphe à un *tore de révolution* dans $\mathbf{R}^3$ (VII, p. 22, exerc. 15); d'où le nom de « tore à une dimension » employé pour désigner $\mathbf{T}$ (au chap. VII, p. 9, nous appellerons de même $\mathbf{T}^n$ le « tore à n dimensions »).*

PROPOSITION 4. — *Le tore* $\mathbf{T}$ *est un espace homéomorphe à l'espace quotient d'un intervalle fermé quelconque* $[a, a + 1]$ *de* $\mathbf{R}$, *obtenu en identifiant les extrémités de cet intervalle; il est compact, connexe et localement connexe.*

En effet, tout $x \in \mathbf{R}$ est congru (mod. 1) à un nombre de l'intervalle $[a, a + 1]$, savoir $x - [x - a]$; donc $\mathbf{T}$ est image de cet intervalle par l'application canonique φ de $\mathbf{R}$ sur $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$, et par suite est compact et connexe (I, p. 62, th. 2 et I, p. 82, prop. 4). D'autre part, deux éléments distincts de l'intervalle $[a, a + 1]$ ne peuvent être congrus (mod. 1) que si ce sont les extrémités; de la compacité de $\mathbf{T}$, on conclut donc que $\mathbf{T}$ est homéomorphe à l'espace quotient de $[a, a + 1]$ obtenu en identifiant ses extrémités (I, p. 63, cor. 4 et I, p. 78, prop. 8). Enfin, comme $\mathbf{Z}$ est un sous-groupe discret de $\mathbf{R}$, $\mathbf{T} = \mathbf{R}/\mathbf{Z}$ est *localement isomorphe* à $\mathbf{R}$ (III, p. 13, prop. 19), et en particulier localement connexe (ce qui est aussi conséquence de I, p. 85, prop. 12).

Remarque. — On observera que l'application canonique φ de $\mathbf{R}$ sur $\mathbf{T} = \mathbf{R}/\mathbf{Z}$, restreinte à l'intervalle semi-ouvert $[a, a + 1[$, est une application *bijective* et *continue* de cet intervalle sur $\mathbf{T}$; son application réciproque est *continue* en tout point de $\mathbf{T}$ distinct de $\varphi(a)$, *discontinue* au point $\varphi(a)$. On identifie parfois l'espace $\mathbf{T}$ avec l'intervalle $[a, a + 1[$, muni de la topologie image réciproque par φ de celle de $\mathbf{T}$ (I, p. 13); cette topologie est bien entendu distincte de la topologie induite sur $[a, a + 1[$ par celle de $\mathbf{R}$.

3. Homomorphismes continus de R dans lui-même

PROPOSITION 5. — *Tout homomorphisme continu f du groupe topologique* $\mathbf{R}$ *dans lui-même est de la forme* $x \mapsto ax$, *où* $a \in \mathbf{R}$; *c'est un automorphisme du groupe topologique* $\mathbf{R}$ *si* $a \neq 0$.

En effet, pour tout $x \in \mathbf{R}$ et tout entier $p \in \mathbf{Z}$, on a $f(px) = pf(x)$; en remplaçant x par $(1/p)x$, on en tire $f\left(\frac{1}{p}x\right) = \frac{1}{p}f(x)$, si $p \neq 0$; d'où quels que soient les entiers p et $q \neq 0$, $f\left(\frac{p}{q}x\right) = \frac{p}{q}f(x)$; autrement dit, pour tout nombre rationnel r, $f(rx) = rf(x)$. Si maintenant t est un nombre réel quelconque, on a, en vertu de la continuité de f dans **R**,

$$f(tx) = \lim_{r \to t,\, r \in \mathbf{Q}} f(rx) = \lim_{r \to t,\, r \in \mathbf{Q}} rf(x) = \left(\lim_{r \to t,\, r \in \mathbf{Q}} r\right).f(x) = tf(x).$$

En particulier, si $a = f(1)$, on a $f(t) = at$, d'où la proposition.

Le *groupe des automorphismes* du groupe topologique **R** est donc isomorphe au *groupe multiplicatif* $\mathbf{R}^*$ des nombres réels non nuls.

Corollaire. — *Soit* G *un groupe topologique isomorphe à* **R**; *pour tout* $a \in$ G, *il existe un homomorphisme continu et un seul* f_a *de* **R** *dans* G, *tel que* $f_a(1) = a$; *cet homomorphisme est un isomorphisme de* **R** *sur* G *si* a *est distinct de l'élément neutre de* G.

4. Définition locale d'un homomorphisme continu de R dans un groupe topologique

Étant donnés un groupe G et une partie A de G *engendrant* G, il est clair que, si deux homomorphismes f, g de G dans un groupe G′ prennent la même valeur en tout point de A, ils sont égaux. Mais les valeurs dans A d'un homomorphisme f de G dans G′ ne peuvent en général être prises arbitrairement; G et G′ étant notés multiplicativement, ces valeurs doivent satisfaire à la condition

$$f(xy) = f(x)f(y)$$

pour tout couple (x, y) tel que $x \in$ A, $y \in$ A et $xy \in$ A; cette condition nécessaire n'est d'ailleurs pas suffisante en général.

En particulier, un *isomorphisme local* d'un groupe topologique G à un groupe topologique G′ ne peut pas toujours se prolonger en un homomorphisme (continu ou non) de G dans G′. Par exemple, un isomorphisme local f de **T** à **R** ne peut se prolonger en un homomorphisme de **T** dans **R**: en effet, si f est défini dans un voisinage V de 0, il existe un entier $p > 0$ tel que la classe x (mod. **Z**) de $1/p$ appartienne à V; comme x est un élément d'ordre p dans **T**, son image par tout homomorphisme de **T** dans **R** est nécessairement 0, donc distincte de $f(x)$ par hypothèse.

Le groupe topologique **R** jouit à cet égard de la propriété suivante:

Proposition 6. — *Soit* I *un intervalle de* **R**, *contenant* 0 *et non réduit à ce point; soit* f *une application continue de* I *dans un groupe topologique* G (noté multiplicativement), *telle que* $f(x + y) = f(x)f(y)$ *pour tout couple de points* x, y *tels que* $x \in$ I, $y \in$ I *et* $x + y \in$ I. *Il existe un homomorphisme continu et un seul de* **R** *dans* G *qui prolonge* f.

L'unicité du prolongement de f (s'il existe) résulte des remarques qui précèdent, puisque I engendre le groupe $\mathbf{R}$; reste à en démontrer l'existence.

Si n est un entier >0, et si on a $x \in \mathrm{I}$ et $nx \in \mathrm{I}$, on a $f(nx) = (f(x))^n$, comme on le voit par récurrence sur n, en observant que, dans ces conditions, on a $mx \in \mathrm{I}$ pour tout entier m tel que $1 \leqslant m \leqslant n$. Posons $\mathrm{J} = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} n\mathrm{I}$; J est la droite $\mathbf{R}$, ou bien l'un des intervalles $[0, +\infty[$ ou $]-\infty, 0]$, suivant que 0 est ou non intérieur à I; si $x \in \mathrm{J}$, on a $x/n \in \mathrm{I}$ dès que n est un entier >0 assez grand. Soit $x \in \mathrm{J}$, et soient m, n deux entiers >0 tels que $x/n \in \mathrm{I}$ et $x/m \in \mathrm{I}$; on a $x/mn \in \mathrm{I}$, donc

$$f\left(\frac{x}{m}\right) = \left(f\left(\frac{x}{mn}\right)\right)^n, \quad \text{et} \quad f\left(\frac{x}{n}\right) = \left(f\left(\frac{x}{mn}\right)\right)^m;$$

par conséquent, l'élément $(f(x/n))^n$ de G est le même pour tous les entiers $n > 0$ satisfaisant à la condition $x/n \in \mathrm{I}$. Désignons cet élément par $f_1(x)$; f_1 est une application de J dans G, qui coïncide avec f dans I et est donc continue au point 0 (par rapport à J). Soient x, y deux éléments de J, n un entier >0 assez grand pour que l'on ait $x/n \in \mathrm{I}$, $y/n \in \mathrm{I}$, $(x + y)/n \in \mathrm{I}$; on a

$$f\left(\frac{x+y}{n}\right) = f\left(\frac{x}{n}\right)f\left(\frac{y}{n}\right) = f\left(\frac{y}{n}\right)f\left(\frac{x}{n}\right),$$

ce qui prouve que $f(x/n)$ et $f(y/n)$ sont permutables; par définition de f_1, on a donc $f_1(x + y) = f_1(x)f_1(y)$. Si $\mathrm{J} = \mathbf{R}$, la proposition est démontrée. Sinon, supposons par exemple qu'on ait $\mathrm{J} = [0, +\infty[$; pour tout $x < 0$, posons

$$f_1(x) = (f_1(-x))^{-1}.$$

La relation $f_1(x + y) = f_1(x)f_1(y)$ reste alors valable quels que soient $x \in \mathbf{R}$, $y \in \mathbf{R}$; c'est immédiat pour $x < 0$ et $y < 0$; pour $x \geqslant 0$, $y < 0$, $x + y \geqslant 0$, on a $f_1(x) = f_1(x + y)f_1(-y)$, d'où la propriété annoncée; de même pour $x \geqslant 0$, $y < 0$, $x + y < 0$, car on a alors $f_1(-y) = f_1(-x - y)f_1(x)$; démonstrations analogues pour $x < 0$ et $y \geqslant 0$. On voit donc que f_1 est un homomorphisme de $\mathbf{R}$ dans G; on a par suite $f_1(0) = e$ (élément neutre de G), et comme f_1 est une fonction continue par rapport à J, elle a au point 0 une limite à droite égale à e; comme $f_1(-x) = (f_1(x))^{-1}$, f_1 a aussi au point 0 une limite à gauche égale à e; elle est donc continue en 0, ce qui achève la démonstration.

Corollaire. — *Soit f un isomorphisme local de* $\mathbf{R}$ *à un groupe topologique* G; *il existe un morphisme strict et un seul de* $\mathbf{R}$ *sur un sous-groupe ouvert de* G, *qui coïncide avec f en tous les points d'un voisinage de* 0.

En effet, soit $\bar{f}$ l'homomorphisme continu de $\mathbf{R}$ dans G qui coïncide avec f en tous les points d'un intervalle ouvert I contenant 0 et contenu dans l'ensemble où est défini f; $\bar{f}(\mathbf{R})$ contient par hypothèse un voisinage de l'élément neutre de G, donc (III, p. 7, corollaire) est un sous-groupe ouvert de G; en outre, $\bar{f}$ est un morphisme strict de $\mathbf{R}$ sur $\bar{f}(\mathbf{R})$, d'après III, p. 16, prop. 24.

Proposition 7. — *Tout groupe topologique connexe* G, *localement isomorphe à* **R**, *est isomorphe à* **R** *ou à* **T**.

En effet, un isomorphisme local de **R** à G se prolonge en un morphisme strict de **R** sur un sous-groupe ouvert de G (cor. de la prop. 6), donc sur G lui-même puisque G est connexe. Il s'ensuit que G est isomorphe à un groupe quotient de **R**; comme il est séparé et non réduit à l'élément neutre (puisqu'il est localement isomorphe à **R**), il est isomorphe à **R** ou à **T** d'après la prop. 3 de V, p. 2.

§ 2. MESURE DES GRANDEURS

On a vu (cf. Note historique du chap. IV) que le problème de la *mesure des grandeurs* est à l'origine de la notion de nombre réel; plus précisément, les diverses espèces de grandeurs dont l'étude s'imposa peu à peu, pour des raisons pratiques ou théoriques, furent d'abord considérées séparément; et la possibilité de les mesurer toutes par un même système de nombres apparut comme une constatation expérimentale bien avant que les mathématiciens grecs n'eussent conçu l'idée hardie d'en faire l'objet d'une démonstration rigoureuse. Dans la théorie axiomatique établie par ces derniers, l'idée de grandeur apparaît liée à une loi de composition (l'« addition » des grandeurs de même espèce) et à une relation d'ordre (la relation « A est plus petit que B », dite relation de comparaison des grandeurs). Nous allons, dans ce qui suit, examiner le même problème, c'est-à-dire rechercher les conditions auxquelles doivent satisfaire une loi de composition interne et une relation d'ordre sur un ensemble E pour que celui-ci soit *isomorphe* à une partie E′ de **R**, munie de la structure induite par l'addition et la relation $\leqslant$ dans **R**. Comme nous ne supposerons pas *a priori* que la loi de composition donnée sur E soit commutative, nous la noterons multiplicativement; à cela près, nous ne nous écarterons guère des raisonnements classiques sur la mesure des grandeurs.

Soit E un ensemble *totalement ordonné* par une relation d'ordre notée $x \leqslant y$, et possédant un plus petit élément ω. Soit I une partie de E telle que $\omega \in \mathrm{I}$, et que les relations $x \in \mathrm{I}$, $y \leqslant x$ entraînent $y \in \mathrm{I}$; supposons donnée dans E une loi de composition non partout définie $(x, y) \mapsto xy$, le composé xy étant défini pour tout couple d'éléments de I (xy appartient à E, mais non nécessairement à I; cf. A, I, p. 1). Faisons en outre les hypothèses suivantes:

($\mathrm{GR_I}$) ω *est élément neutre* ($\omega x = x\omega = x$ pour tout $x \in \mathrm{I}$) *et la loi de composition est associative* (au sens suivant: chaque fois que $x \in \mathrm{I}$, $y \in \mathrm{I}$, $z \in \mathrm{I}$, $xy \in \mathrm{I}$ et $yz \in \mathrm{I}$, on a $x(yz) = (xy)z$).

($\mathrm{GR_{II}}$) *La relation* $x < y$ *entre éléments de* I *entraîne, pour tout* $z \in \mathrm{I}$, *les relations* $xz < yz$ *et* $zx < zy$.

(GR_{III}) *L'ensemble des éléments* $>\omega$ *de* I *n'est pas vide et n'a pas de plus petit élément, et, quels que soient les éléments* x, y *de* I *tels que* $x < y$, *il existe* $z > \omega$ *tel que* $xz \leqslant y$.

La condition (GR_{II}) entraîne qu'on peut multiplier membre à membre les inégalités entre éléments de I: $x < y$ et $x' < y'$ entraînent $xx' < yy'$ (car $xx' < yx'$ et $yx' < yy'$). En particulier on a $y < yx$ pour tout $x > \omega$ ($x \in \mathrm{I}, y \in \mathrm{I}$).

Étant donnée une suite finie $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ d'éléments de I, on peut définir par récurrence sur p le composé $\prod_{i=1}^{p} x_i$ de cette suite comme égal à $\left(\prod_{i=1}^{p-1} x_i\right)x_p$, pourvu que le composé $\prod_{i=1}^{p-1} x_i$ soit défini et appartienne à I; si $\prod_{i=1}^{p} x_i$ est défini, chacun des composés $\prod_{i=1}^{q} x_i$ est donc défini et appartient à I pour $2 \leqslant q \leqslant p-1$. Lorsqu'on prend tous les x_i égaux à un même élément $x \in \mathrm{I}$, on voit en particulier que si x^p est défini, x^q est défini et appartient à I pour $2 \leqslant q \leqslant p-1$; par convention, on pose $x^0 = \omega$ pour tout $x \in \mathrm{I}$. D'après (GR_{II}), si $x > \omega$, on a $\omega < x^q < x^p$ pour $1 \leqslant q \leqslant p-1$ si x^p est défini; si $x < y$ et si y^p est défini, on voit, par récurrence sur p, que x^p est défini et que $x^p < y^p$. D'autre part, la condition d'associativité (GR_I) entraîne, par récurrence sur n, que, si x^{m+n} est défini, il en est de même de $x^m x^n$, et que $x^{m+n} = x^m x^n$. Inversement, en vertu de (GR_I) et (GR_{II}), si $x^m x^n$ est défini et appartient à I, x^{m+n} est défini et $x^{m+n} = x^m x^n$: on le voit encore par récurrence sur n, car on a $x^{n-1} \leqslant x^n$, donc $x^m x^{n-1}$ est défini et appartient à I; par hypothèse $x^m x^{n-1} = x^{m+n-1} \in \mathrm{I}$, donc $(x^{m+n-1})x = x^{m+n}$ est défini et égal à $x^m x^n$ d'après le résultat précédent. De même, on voit par récurrence sur n que, si x^{mn} est défini, $(x^m)^n$ est défini et $x^{mn} = (x^m)^n$; inversement, si $(x^m)^n$ est défini et appartient à I, x^{mn} est défini et égal à $(x^m)^n$.

Enfin, l'axiome (GR_{III}) entraîne que, pour tout $x \in \mathrm{I}$ tel que $x > \omega$, il existe $y > \omega$ tel que $y^2 \leqslant x$. En effet, si $x > \omega$, il existe $z > \omega$ tel que $z < x$, puis $t > \omega$ tel que $zt \leqslant x$; on prendra pour y le plus petit des éléments z, t. Par récurrence sur n, on en déduit qu'il existe $u > \omega$ tel que $u^{2^n} \leqslant x$.

Introduisons maintenant l'hypothèse suivante:

(GR_{IV}) (« Axiome d'Archimède ») *Quels que soient* $x \in \mathrm{I}$, $y \in \mathrm{I}$, *tels que* $x > \omega$, *il existe un entier* $n > 0$ *tel que* x^n *soit défini et que* $x^n > y$.

Si on prend pour E un ensemble de nombres réels $\geqslant 0$, contenant 0 et des nombres >0 arbitrairement petits, pour I l'intersection de E et d'un intervalle de **R** d'origine 0 et non réduit à un point, pour loi de composition l'addition de deux nombres de I, et si on suppose que $x + y \in \mathrm{E}$ pour $x \in \mathrm{I}$, $y \in \mathrm{I}$, il est clair que les axiomes (GR_I), (GR_{II}), (GR_{III}) et (GR_{IV}) sont vérifiés.[1] Réciproquement:

[1] Dans les ensembles de « grandeurs » qui interviennent dans les sciences expérimentales, les axiomes (GR_I) et (GR_{II}) sont en général susceptibles de vérification expérimentale, au moins avec

PROPOSITION 1. — *Soit* E *un ensemble totalement ordonné, possédant un plus petit élément* ω ; *soit* I *une partie de* E, *telle que* $\omega \in \mathrm{I}$, *et que les relations* $x \in \mathrm{I}$, $y \leqslant x$ *entraînent* $y \in \mathrm{I}$; *soit* $(x, y) \mapsto xy$ *une application de* $\mathrm{I} \times \mathrm{I}$ *dans* E. *Alors, si les axiomes* $(\mathrm{GR_I})$, $(\mathrm{GR_{II}})$, $(\mathrm{GR_{III}})$ *et* $(\mathrm{GR_{IV}})$ *sont satisfaits, il existe une application f strictement croissante de* I *dans l'ensemble* $\mathbf{R}_+$ *des nombres réels* $\geqslant 0$, *telle que l'on ait*

$$f(xy) = f(x) + f(y)$$

chaque fois que $x \in \mathrm{I}$, $y \in \mathrm{I}$ *et* $xy \in \mathrm{I}$; *en outre, pour tout* $b \in \mathrm{I}$, *l'intersection de* $f(\mathrm{I})$ *et de l'intervalle* $[0, f(b)]$ *de* $\mathbf{R}$ *est dense dans cet intervalle.*

Étant donnés deux éléments quelconques x, y de I tels que $y \neq \omega$, notons $(x : y)$ le plus grand des entiers $n \geqslant 0$ tels que y^n soit défini et $\leqslant x$ [1]; cet entier existe d'après $(\mathrm{GR_{IV}})$; si $(x : y) = p$, y^{p+1} est défini et $> x$. Si $x \in \mathrm{I}$, $y \in \mathrm{I}$ et $xy \in \mathrm{I}$, on a

$$(x : z) + (y : z) \leqslant (xy : z) \leqslant (x : z) + (y : z) + 1. \tag{1}$$

En effet, soit $(x : z) = p$, $(y : z) = q$; on a $z^p \leqslant x$, $z^q \leqslant y$; comme $xy \in \mathrm{I}$, $z^p z^q$ est défini et appartient à I, donc z^{p+q} est défini et on a $z^{p+q} = z^p z^q \leqslant xy$; en outre, si z^{p+q+2} est défini, on a $z^{p+q+2} > xy$, puisque $z^{p+1} > x$ et $z^{p+1} > y$.

Démontrons maintenant les inégalités

$$\begin{cases}(x:y)(y:z) \leqslant (x:z) \\ ((x:y) + 1)((y:z) + 1) \geqslant (x:z) + 1.\end{cases} \tag{2}$$

Soit $(x:y) = p$ et $(y:z) = q$; on a $y^p \leqslant x$ et $z^q \leqslant y$, donc $(z^q)^p$ est défini et $\leqslant x$; il appartient donc à I et par suite z^{pq} est défini et on a $z^{pq} = (z^q)^p \leqslant x$; d'où la première inégalité. D'autre part, si $z^{(p+1)(q+1)}$ est défini on a $z^{(p+1)(q+1)} > x$, puisque $y^{p+1} > x$ et $z^{q+1} > y$; d'où la seconde inégalité.

Désignons par $\mathfrak{F}$ le filtre des sections de l'ensemble ordonné des éléments $> \omega$ de I, filtrant pour la relation $\geqslant$; une base de $\mathfrak{F}$ est formée des intervalles $]\omega, z]$, où z parcourt l'ensemble des éléments $> \omega$. Étant donnés deux éléments a et x de I tels que $a > \omega$, nous allons voir que le rapport $(x:z)/(a:z)$, qui est défini pour $z \leqslant a$ et est un nombre rationnel > 0, est une fonction de z qui a une *limite* suivant $\mathfrak{F}$. C'est évident si $x = \omega$, car alors $(x:z) = 0$ quel que soit z. Si $x > \omega$, nous allons montrer que l'image $\mathfrak{G}$ de $\mathfrak{F}$ par l'application

$$z \mapsto (x:z)/(a:z)$$

(restreinte à l'ensemble des $z > \omega$ qui sont $\leqslant x$ et $\leqslant a$) est une base de filtre de Cauchy pour la structure uniforme du groupe *multiplicatif* $\mathbf{R}_+^*$, et converge par

---

une certaine approximation. Par contre l'axiome $(\mathrm{GR_{III}})$, qui postule l'existence de grandeurs « aussi petites qu'on veut », ne peut évidemment être fondé de la même manière; il constitue une pure exigence *a priori*. Quant à l'axiome $(\mathrm{GR_{IV}})$, il peut être considéré comme une « extrapolation » d'un fait vérifiable expérimentalement pour des grandeurs qui ne sont pas « trop petites ».

[1] Lorsque $\mathrm{E} = \mathrm{I}$ est l'ensemble des entiers naturels, la loi de composition étant l'addition, $(x:y)$ n'est autre que la partie entière de x/y, ou, comme on dit encore, le « quotient approché par défaut à une unité près » de x par y.

suite vers un nombre réel >0. En effet, remarquons d'abord que, $u > \omega$ étant donné, $(u:z)$ a pour limite $+\infty$ suivant $\mathfrak{F}$; car il existe $z > \omega$ tel que $z^{2^n} \leqslant u$, d'où $(u:z) \geqslant 2^n > n$. Donnons-nous alors un nombre $\varepsilon > 0$ arbitraire; il existe $t > \omega$ tel que $(x:t) \geqslant 1/\varepsilon$ et $(a:t) \geqslant 1/\varepsilon$; écrivons la double inégalité

$$\frac{(x:t)}{(a:t)+1}\cdot\frac{(t:z)}{(t:z)+1} \leqslant \frac{(x:z)}{(a:z)} \leqslant \frac{(x:t)+1}{(a:t)}\cdot\frac{(t:z)+1}{(t:z)},$$

qui résulte immédiatement des inégalités (2). Il existe $z_0 > \omega$ tel que $z \leqslant z_0$ entraîne $(t:z) \geqslant 1/\varepsilon$, donc

$$\frac{1}{(1+\varepsilon)^2}\frac{(x:t)}{(a:t)} \leqslant \frac{(x:z)}{(a:z)} \leqslant (1+\varepsilon)^2\frac{(x:t)}{(a:t)},$$

ce qui prouve que $\mathfrak{G}$ est une base de filtre de Cauchy pour la structure uniforme multiplicative

Fixons désormais l'élément $a > \omega$ (« unité de mesure »), et posons, pour tout $x \in \mathrm{I}$,

$$f(x) = \lim_{\mathfrak{F}} \frac{(x:z)}{(a:z)}.$$

D'après ce qui précède, on a $f(\omega) = 0$, $f(x) > 0$ pour $x > \omega$, et $f(a) = 1$. Si on divise les trois membres de (1) par $(a:z)$, et qu'on passe à la limite suivant $\mathfrak{F}$, on voit que $f(xy) = f(x) + f(y)$ pour $x \in \mathrm{I}$, $y \in \mathrm{I}$. De même, la relation $x \leqslant y$ entraîne $(x:z) \leqslant (y:z)$, d'où, en divisant par $(a:z)$ et passant à la limite, $f(x) \leqslant f(y)$; f est *croissante* dans I. On en déduit que f est *strictement croissante* dans I; en effet, si $x < y$, il existe $z > \omega$ tel que $xz \leqslant y$, d'où $f(xz) \leqslant f(y)$, et comme $xz \in \mathrm{I}$, $f(x) + f(z) = f(xz) \leqslant f(y)$; comme $f(z) > 0$, il s'ensuit bien que $f(x) < f(y)$.

Enfin, si $b \in \mathrm{I}$, l'intersection de $f(\mathrm{I})$ et de l'intervalle $[0, f(b)]$ de $\mathbf{R}$ est dense dans cet intervalle; pour tout entier $n > 0$, il existe en effet $x > \omega$ tel que $f(x) \leqslant 2^{-n}$: il suffit de prendre x tel que $x^{2^n} \leqslant a$; si p est le plus petit entier tel que $x^{p+1} > b$, on a $(p+1)f(x) > f(b)$ et $qf(x) \leqslant f(b)$ pour $1 \leqslant q \leqslant p$; donc tout intervalle contenu dans $[0, f(b)]$ et de longueur $> 2^{-n}$ contient au moins un point de la forme $qx = f(x^q) \in f(\mathrm{I})$. La proposition 1 est par suite entièrement démontrée.

Remarques. — 1) Les relations $x \in \mathrm{I}$, $y \in \mathrm{I}$, $xy \in \mathrm{I}$, $yx \in \mathrm{I}$ entraînent

$$f(xy) = f(x) + f(y) = f(yx),$$

donc $yx = xy$, puisque f est strictement croissante; autrement dit, la loi induite par la loi de composition de E sur un intervalle $[\omega, b]$ convenable (b étant pris par exemple tel que $b^2 \leqslant a$) est *commutative*.

2) Toute application g de I dans $\mathbf{R}_+$, satisfaisant aux mêmes conditions que f, est de la forme $x \mapsto \lambda f(x)$ où $\lambda > 0$. En effet, soit $\lambda = g(a) > 0$; les relations $z^p \leqslant x \leqslant z^{p+1}$, $z^q \leqslant a \leqslant z^{q+1}$ entraînent, par hypothèse,

$$pg(z) \leqslant g(x) \leqslant (p+1)g(z), \qquad qg(z) \leqslant g(a) \leqslant (q+1)g(z),$$

d'où

$$\lambda \frac{(x:z)}{(a:z)+1} \leqslant g(x) \leqslant \lambda \frac{(x:z)+1}{(a:z)},$$

et, en passant à la limite suivant $\mathfrak{F}$, on a $g(x) = \lambda f(x)$.

Cherchons à quelles conditions $f(\mathrm{I})$ est un *intervalle* de $\mathbf{R}_+$. On a évidemment deux conditions nécessaires:

($\mathrm{GR}_{\mathrm{III}a}$) *L'ensemble des éléments* $> \omega$ *de* I *n'est pas vide et n'a pas de plus petit élément, et, quels que soient les éléments* x, y *de* I *tels que* $x < y$, *il existe* $z \in \mathrm{I}$ *tel que* $xz = y$ (« soustraction » des grandeurs).

($\mathrm{GR}_{\mathrm{IV}a}$) *Toute suite croissante d'éléments de* I, *majorée par un élément de* I, *admet une borne supérieure dans* I.

Nous allons montrer que ces conditions sont suffisantes, et qu'en outre elles dispensent de postuler l'axiome ($\mathrm{GR}_{\mathrm{IV}}$) (axiome d'Archimède). D'une façon précise, nous allons démontrer la proposition suivante:

Proposition 2. — *Si un ensemble totalement ordonné* E *et une partie* I *satisfont aux axiomes* (GR_{I}), ($\mathrm{GR}_{\mathrm{II}}$), ($\mathrm{GR}_{\mathrm{III}a}$) *et* ($\mathrm{GR}_{\mathrm{IV}a}$), *il existe une application strictement croissante* f *de* I *sur un intervalle de* $\mathbf{R}$ *d'origine* 0, *telle que l'on ait* $f(\omega) = 0$ *et* $f(xy) = f(x) + f(y)$ *chaque fois que* x, y *et* xy *appartiennent à* I.

Montrons d'abord que l'axiome ($\mathrm{GR}_{\mathrm{IV}}$) est vérifié. Raisonnons par l'absurde: soient $x \in \mathrm{I}$, $y \in \mathrm{I}$ tels qu'on ait $x > \omega$ et $x^n \leqslant y$ pour tout entier $n > 0$ tel que x^n soit défini. On voit, par récurrence sur n, que x^n est défini et appartient à I pour tout $n > 0$: en effet, si x^n est défini, c'est un élément de I puisque $x^n \leqslant y$, donc x^{n+1} est défini. Alors la suite croissante (x^n) possède une borne supérieure $b \in \mathrm{I}$ d'après ($\mathrm{GR}_{\mathrm{IV}a}$). Puisque $x < b$, il existe $c \in \mathrm{I}$ tel que $xc = b$, d'après ($\mathrm{GR}_{\mathrm{III}a}$), et on a $c < b$ puisque $x > \omega$. Or, pour tout n, on a $x^{n+1} \leqslant b = xc$, d'où $x^n \leqslant c$ d'après ($\mathrm{GR}_{\mathrm{II}}$); la borne supérieure b des x^n est donc $\leqslant c$, ce qui est contradictoire.

Les conditions d'application de la prop. 1 (V, p. 7) sont donc remplies. Reste à montrer que, si $\gamma = f(c)$ $(c > \omega)$ est un élément quelconque de $f(\mathrm{I})$, et β un nombre réel tel que $0 < \beta < \gamma$, il existe $b \in \mathrm{I}$ tel que $f(b) = \beta$ (IV, p. 7, prop. 1). Comme l'intersection de $f(\mathrm{I})$ et de $(0, \gamma)$ est dense dans cet intervalle, il existe une suite croissante (x_n) d'éléments de I telle que $f(x_n)$ ait pour limite β. Soit b la borne supérieure de la suite (x_n) dans I; on a $f(b) \geqslant f(x_n)$ quel que soit n, donc $f(b) \geqslant \beta$; mais $f(b) > \beta$ est impossible, sinon il existerait $y \in \mathrm{I}$ tel que $\beta < f(y) < f(b)$, et comme β est la borne supérieure de la suite $(f(x_n))$, on aurait $f(x_n) < f(y) < f(b)$ quel que soit n, d'où $x_n < y < b$ quel que soit n, ce qui est absurde. Donc $f(b) = \beta$.

La proposition 2 est ainsi démontrée.

Remarque. — Lorsque $\mathrm{I} = \mathrm{E}$, l'image $f(\mathrm{I}) = f(\mathrm{E})$ est $\mathbf{R}_+$ tout entier, car pour un $b > \omega$, b^n est défini pour tout n, donc $n.f(b)$ appartient à $f(\mathrm{E})$ quel que soit n, ce qui entraîne que $f(\mathrm{E})$ n'est pas borné, puisque $f(b) > 0$.

§ 3. CARACTÉRISATION TOPOLOGIQUE DES GROUPES **R** ET **T**

Théorème 1. — *Un groupe topologique* G, *dans lequel il existe un voisinage ouvert de l'élément neutre homéomorphe à un intervalle ouvert de* **R**, *est localement isomorphe à* **R**.

L'intérêt de ce théorème est qu'il permet de conclure d'une propriété purement topologique d'un groupe G à une propriété de la *structure de groupe* de G.

Il s'agit là d'un phénomène tout à fait particulier au groupe **R**, et qui n'a pas d'analogue pour les groupes $\mathbf{R}^n$ lorsque $n > 1$ (cf. VIII, p. 7). Les groupes localement isomorphes à **R** sont parfois appelés *groupes à un paramètre.*

Pour démontrer le th. 1, nous allons nous ramener à la prop. 2 de V, p. 9. Par hypothèse, il existe un homéomorphisme φ d'un voisinage ouvert U de l'élément neutre e de G, sur un intervalle ouvert de **R**. Par l'application réciproque de φ, on peut transporter à U la structure d'ensemble totalement ordonné de l'intervalle $\varphi(\mathrm{U})$; la topologie de U (induite par celle de G) a alors pour base l'ensemble des intervalles ouverts de U (IV, p. 5, prop. 5). On peut trouver un voisinage *symétrique* V de e, tel que $\mathrm{V}.\mathrm{V} \subset \mathrm{U}$, et que V soit un intervalle ouvert; en effet, il existe un intervalle ouvert V′, contenant e, et tel que l'on ait $\mathrm{V}'.\mathrm{V}' \subset \mathrm{U} \cap \mathrm{U}^{-1}$, $\mathrm{V}'.\mathrm{V}'^{-1} \subset \mathrm{U}$ et $\mathrm{V}'^{-1}.\mathrm{V}' \subset \mathrm{U}$; en prenant $\mathrm{V} = \mathrm{V}' \cup \mathrm{V}'^{-1}$, V est ouvert, symétrique, satisfait à $\mathrm{V}.\mathrm{V} \subset \mathrm{U}$ et est connexe, donc est un intervalle (IV, p. 8, th. 4).

Montrons que, si x, y, z appartiennent à V, la relation $x < y$ entraîne $xz < yz$ et $zx < zy$; en effet, les fonctions $f_1(z) = \varphi(yz) - \varphi(xz)$ et $f_2(z) = \varphi(zy) - \varphi(zx)$ sont continues dans V; elles sont >0 pour $z = e$, et ne s'annulent pas dans V (car $\varphi(yz) = \varphi(xz)$, par exemple, entraînerait $yz = xz$, donc $y = x$). Comme $f_1(\mathrm{V})$ et $f_2(\mathrm{V})$ sont connexes (I, p. 82, prop. 4), donc sont des intervalles de **R** (IV, p. 8, th. 4), et que ces intervalles contiennent un nombre >0 et ne contiennent pas 0, ils sont contenus dans $\mathbf{R}_+^*$, autrement dit, on a $f_1(z) > 0$ et $f_2(z) > 0$ quel que soit $z \in \mathrm{V}$.

Si x et y sont deux éléments de V tels que $x \geqslant e$, $y \geqslant e$, on a en particulier $xy \geqslant e$. Appelons E l'ensemble (totalement ordonné) des éléments de U qui sont $\geqslant e$, et I l'ensemble des éléments de V qui sont $\geqslant e$; les axiomes $(\mathrm{GR_I})$, $(\mathrm{GR_{II}})$, $(\mathrm{GR}_{\mathrm{III}a})$ et $(\mathrm{GR}_{\mathrm{IV}a})$ du § 2 sont vérifiés (en prenant pour ω l'élément e, et pour loi de composition celle du groupe G); c'est immédiat pour $(\mathrm{GR_I})$, $(\mathrm{GR_{II}})$ et $(\mathrm{GR}_{\mathrm{IV}a})$ d'après ce qui précède; pour $(\mathrm{GR}_{\mathrm{III}a})$, il suffit de remarquer que, si $e < x < y$ $(x \in \mathrm{V}, y \in \mathrm{V})$, on a $x^{-1} \in \mathrm{V}$, donc $x^{-1} < e < x^{-1}y$, et $x^{-1}y < y$; par suite $z = x^{-1}y$ appartient à I et on a bien $xz = y$. D'après la prop. 2 de V, p. 9, il existe donc une application strictement croissante f de I sur un intervalle de $\mathbf{R}_+$ d'origine 0, telle que $f(e) = 0$ et $f(xy) = f(x) + f(y)$ chaque fois que x, y et xy appartiennent à I (ce qui sera le cas si x et y appartiennent à $\mathrm{W} \cap \mathrm{I}$, où W est un voisinage de e tel que $\mathrm{W}.\mathrm{W} \subset \mathrm{V}$).

Pour tout élément $x \in \mathrm{V}$ n'appartenant pas à I, on a $x < e$, donc $x^{-1} > e$; on prolonge par suite f en une application *strictement croissante* f de V *sur* un intervalle de **R** en posant $\bar{f}(x) = -f(x^{-1})$ pour tout $x < e$ de V. L'image réciproque par $\bar{f}$ d'un intervalle ouvert contenu dans $\bar{f}(V)$ est un intervalle ouvert de V, donc $\bar{f}$ est continue dans V; inversement, l'image par $\bar{f}$ d'un intervalle ouvert de V est un intervalle ouvert de $\bar{f}(V)$, donc $\bar{f}$ est un *homéomorphisme* de V sur un voisinage de 0 dans le groupe **R**. D'autre part, on vérifie aisément (comme dans la prop. 6 de V, p. 3, en examinant les divers cas possibles) qu'on a $\bar{f}(xy) = \bar{f}(x) + \bar{f}(y)$ chaque fois que x, y et xy appartiennent à V; on en conclut que $\bar{f}$, restreint à un voisinage convenable de e dans G, est un isomorphisme local de G à **R** (III, p. 6, prop. 3).

THÉORÈME 2. — *Un groupe connexe* G, *dans lequel il existe un voisinage ouvert de l'élément neutre homéomorphe à un intervalle ouvert de* **R**, *est isomorphe à* **R** *ou à* **T**.

C'est une conséquence immédiate du théorème précédent, et de la prop. 7 de V, p. 5.

Remarques. — 1) Pour décider si un groupe G, qui remplit les conditions du th. 2, est isomorphe à **T** ou isomorphe à **R**, il suffit de voir si G est compact ou ne l'est pas.

2) Le th. 2 montre en particulier que tout groupe topologique *homéomorphe* au groupe **R** lui est nécessairement *isomorphe*.

3) La caractérisation topologique précédente des groupes **R** et **T** fait intervenir l'espace topologique **R** comme ensemble auxiliaire. Il est possible de caractériser les structures de groupe topologique de **R** et de **T** par des axiomes ne faisant intervenir aucun ensemble auxiliaire (voir V, p. 16 et 17, exerc. 4 et 6).

§ 4. EXPONENTIELLES ET LOGARITHMES

1. Définition de a^x et de $\log_a x$

THÉORÈME 1. — *Le groupe multiplicatif* $\mathbf{R}_+^*$ *des nombres réels* >0 *est un groupe topologique isomorphe au groupe additif* **R** *des nombres réels.*

En effet, $\mathbf{R}_+^* = \left]0, +\infty\right[$ est un intervalle ouvert de **R**, donc est *homéomorphe à* **R** (IV, p. 13, prop. 1); d'après le th. 2 de V, p. 11, c'est donc un groupe topologique *isomorphe à* **R**.

D'après le corollaire de V, p. 3, pour tout nombre $a > 0$, il existe un homomorphisme continu et un seul f_a de **R** dans $\mathbf{R}_+^*$, tel que $f_a(1) = a$. Quels que soient $x \in \mathbf{R}$, $y \in \mathbf{R}$, on a donc

$$f_a(x + y) = f_a(x)f_a(y), \qquad f_a(-x) = \frac{1}{f_a(x)},$$

d'où en particulier, pour tout entier $n \in \mathbf{Z}$,

$$f_a(n) = a^n.$$

En raison de cette relation, on note, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f_a(x) = a^x$; les fonctions a^x

(pour toutes les valeurs >0 de a) sont dites *fonctions exponentielles*. On a $1^x = 1$ quel que soit $x \in \mathbf{R}$; pour $a \neq 1$, a^x est un *isomorphisme* du groupe $\mathbf{R}$ sur le groupe $\mathbf{R}_+^*$.

Pour $a \neq 1$, l'isomorphisme de $\mathbf{R}_+^*$ sur $\mathbf{R}$, réciproque de a^x, s'appelle *logarithme de base* a, et sa valeur pour $x \in \mathbf{R}_+^*$ se note $\log_a x$. On a donc, avec ces notations,

$$a^{x+y} = a^x a^y \quad \text{pour} \quad x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}, a > 0; \tag{1}$$

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x} \quad \text{pour} \quad x \in \mathbf{R}, a > 0; \tag{2}$$

$$\log_a 1 = 0, \qquad \log_a a = 1 \quad \text{pour} \quad a > 0 \text{ et } \neq 1; \tag{3}$$

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y \quad \text{pour} \quad x > 0, y > 0; \tag{4}$$

$$\log_a\left(\frac{1}{x}\right) = -\log_a x \qquad \text{pour} \quad x > 0; \tag{5}$$

$$a^{\log_a x} = x \quad \text{pour } x > 0; \tag{6}$$

$$\log_a(a^x) = x \quad \text{pour } x \in \mathbf{R}. \tag{7}$$

D'après la prop. 5 de V, p. 2, tout homomorphisme continu de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}_+^*$ est de la forme $y \mapsto a^{xy}$, où $x \in \mathbf{R}$; comme sa valeur pour $y = 1$ est a^x, on a identiquement

$$(a^x)^y = a^{xy} \quad \text{pour } x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}, a > 0 \tag{8}$$

ou, en changeant les notations,

$$x^y = a^{y.\log_a x} \quad \text{pour } x > 0, y \in \mathbf{R}, a > 0 \text{ et } \neq 1. \tag{9}$$

La formule (8) montre que pour tout entier $n > 0$, on a $(a^{1/n})^n = a$, donc $a^{1/n}$ est la *racine n-ième* $\sqrt[n]{a}$, définie dans IV, p. 12.

Les formules (7) et (9) montrent que

$$\log_a(x^y) = y.\log_a x \quad \text{pour } x > 0 \text{ et } y \in \mathbf{R}, \tag{10}$$

ou, en changeant les notations,

$$\log_a x = \log_a b.\log_b x \quad \text{pour } x > 0, a > 0, b > 0, a \neq 1, b \neq 1 \tag{11}$$

(formule dite « du changement de base »).

Cherchons enfin tous les *homomorphismes continus* du groupe topologique $\mathbf{R}_+^*$ dans lui-même; si g est un tel homomorphisme, $\log_a(g(a^x))$ est un homomorphisme continu de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, donc (V, p. 2, prop. 5) il existe $\alpha \in \mathbf{R}$ tel que $\log_a(g(a^x)) = \alpha x$ quel que soit $x \in \mathbf{R}$; d'où on tire, en vertu de (8), l'identité $g(x) = x^\alpha$ quel que soit $x > 0$. On a donc identiquement

$$(xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha \quad \text{quels que soient } x > 0, y > 0, \alpha \in \mathbf{R}. \tag{12}$$

En raison de la formule (4), qui ramène toute multiplication à une addition (seule opération à laquelle soit vraiment adapté le système de numération en usage), les logarithmes ont longtemps été un instrument indispensable pour le calcul numérique (voir la Note historique de ce chapitre).

Lorsqu'on les utilise à cette fin, on choisit la base $a = 10$; et il existe des tables donnant les valeurs de la fonction $\log_{10} x$ (avec une certaine approximation). En Analyse, on est conduit, comme nous le verrons ultérieurement (FVR, III, §1, n° 1), à un autre choix de la base, celle-ci (qu'on note e) étant prise telle qu'on ait $\lim\limits_{x \to 1,\, x \neq 1} \dfrac{\log_e x}{x - 1} = 1$ (cf. V, p. 18, exerc. 1).

2. Variation des fonctions a^x et $\log_a x$

D'après le th. 5 de IV, p. 9, pour $a \neq 1$, $x \mapsto a^x$ est une application *strictement monotone* de $\mathbf{R}$ sur l'intervalle $\mathbf{R}_+^* =]0, +\infty[$. Si $a > 1$, $a^1 = a > 1 = a^0$, donc a^x est *strictement croissante*; en outre, $\mathbf{R}_+^*$ n'étant pas borné supérieurement, a^x n'est pas bornée supérieurement dans $\mathbf{R}$, donc

$$\lim_{x \to +\infty} a^x = +\infty \qquad (a > 1) \tag{13}$$

et, d'après (2) (V, p. 12),

$$\lim_{x \to -\infty} a^x = 0 \qquad (a > 1). \tag{14}$$

Au contraire, si $a < 1$, la fonction a^x est strictement décroissante dans $\mathbf{R}$, tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$, vers $+\infty$ lorsque x tend vers $-\infty$ (fig. 1).

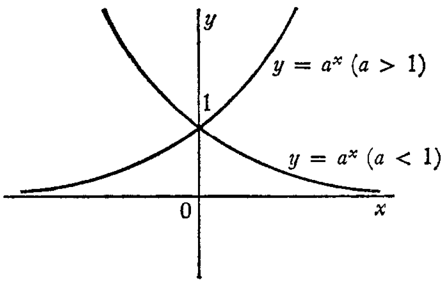

FIGURE 1

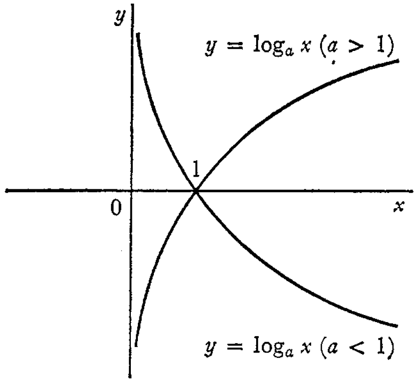

FIGURE 2

De ces propriétés, et de (12), on déduit que si $0 < a < b$, on a $a^x < b^x$ pour $x > 0$, $a^x > b^x$ pour $x < 0$; cela revient en effet à constater que $(b/a)^x > 1$ pour $x > 0$, $(b/a)^x < 1$ pour $x < 0$.

La variation de $\log_a x$ dans $\mathbf{R}_+^*$ se déduit de celle de a^x dans $\mathbf{R}$; si $a > 1$, la fonction $\log_a x$ est strictement croissante, tend vers $-\infty$ quand x tend vers 0, vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$; si $a < 1$, la fonction $\log_a x$ est strictement décroissante, tend vers $+\infty$ quand x tend vers 0, vers $-\infty$ quand x tend vers $+\infty$ (fig. 2).

La fonction a^x (resp. $\log_a x$) étant considérée comme définie sur une partie de la droite achevée $\overline{\mathbf{R}}$ et prenant ses valeurs dans $\overline{\mathbf{R}}$, on peut la *prolonger par continuité* à $\overline{\mathbf{R}}$ (resp. à l'intervalle $[0, +\infty]$ de $\overline{\mathbf{R}}$), en lui donnant aux points $+\infty$ et $-\infty$ (resp. 0 et $+\infty$) ses valeurs limites en ces points.

Plus généralement, la formule (9) (V, p. 12) montre que la fonction x^y est continue dans le sous-espace $\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}$ de $\overline{\mathbf{R}}^2$, et tend vers une limite lorsque (x, y) tend vers un point (a, b) de $\overline{\mathbf{R}}^2$ adhérent à $\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}$, à l'exception des points $(0, 0)$, $(+\infty, 0)$, $(1, +\infty)$, $(1, -\infty)$. On peut donc encore prolonger par continuité x^y aux points de $\overline{\mathbf{R}}^2$ où sa limite existe; d'après le principe de prolongement des identités (I, p. 53, cor. 1), les formules (1), (4) et (8) de V, p. 12 sont encore valables lorsque chacun des deux membres a un sens.

On notera que le prolongement par continuité de x^y ne permet pas de retrouver la formule $0^0 = 1$ qui résultait des conventions faites en Algèbre (A, I, p. 13); il convient d'éviter toute confusion à cet égard.

On remarquera aussi que la définition de l'exponentielle permet de prolonger à $\mathbf{R}$ la fonction $n \mapsto a^n$ définie dans $\mathbf{Z}$, pour tout $a > 0$; mais nous n'obtenons ainsi aucun prolongement de cette fonction lorsque $a < 0$; un prolongement « naturel » de cette fonction ne pourra être défini qu'avec la théorie des fonctions analytiques.

3. Familles multipliables de nombres >0

L'isomorphie des groupes topologiques $\mathbf{R}$ et $\mathbf{R}_+^*$ montre aussitôt que, pour qu'une famille (x_ι) de nombres réels finis et >0 soit *multipliable* (IV, p. 35), il faut et il suffit que la famille $(\log_a x_\iota)$ soit *sommable* (a étant un nombre quelconque >0 et $\neq 1$); on a en outre

$$\prod_\iota x_\iota = a^{\sum_\iota \log_a x_\iota} \tag{15}$$

De même, pour qu'un produit infini défini par une suite $(1 + u_n)$ de nombres finis et >0 soit *convergent* (IV, p. 39), il faut et il suffit que la série de terme général $\log_a(1 + u_n)$ soit *convergente*, et on a

$$\prod_{n=0}^{\infty} (1 + u_n) = a^{\sum_{n=0}^{\infty} \log_a(1+u_n)}$$

L'étude des produits infinis de nombres réels >0 est donc ramenée à celle des sommes infinies de nombres réels, dont les termes se présentent sous forme de logarithmes; nous verrons plus tard comment les sommes de cette nature s'étudient au moyen des propriétés différentielles du logarithme (cf., par exemple, FVR, V, § 5, n° 3).

Exercices

§ 1

1) $_*a)$ Soit f un homomorphisme du groupe additif $\mathbf{R}$ dans lui-même. Montrer que si le graphe de f n'est pas dense dans $\mathbf{R}^2$, f est de la forme $x \mapsto ax$ (considérer dans $\mathbf{R}^2$ l'adhérence du graphe de f, et utiliser le théorème de structure des sous-groupes fermés de $\mathbf{R}^2$ (VII, p. 5, th. 2)).$_*$ (Comparer exerc. 12b) et à IV, p. 55, exerc. 2.)

b) Si le graphe de f est dense dans $\mathbf{R}^2$, l'image réciproque de la topologie de $\mathbf{R}^2$ par l'application $x \mapsto (x, f(x))$ est compatible avec la structure de groupe de $\mathbf{R}$ et strictement plus fine que la topologie usuelle de $\mathbf{R}$. Si en outre f est injective, l'image réciproque par f de la topologie usuelle de $\mathbf{R}$ est compatible avec la structure de groupe de $\mathbf{R}$ et n'est pas comparable à la topologie usuelle de $\mathbf{R}$.

¶ 2) Soit $\mathscr{T}$ une topologie séparée sur $\mathbf{R}$, compatible avec la structure de groupe de $\mathbf{R}$ et *strictement moins fine* que la topologie usuelle $\mathscr{T}_0$ de $\mathbf{R}$.

a) Montrer que tout voisinage ouvert de 0 pour $\mathscr{T}$ est non borné dans $\mathbf{R}$ (remarquer qu'une topologie séparée moins fine qu'une topologie d'espace compact lui est nécessairement identique).

b) Soit $V \neq \mathbf{R}$ un voisinage ouvert symétrique de 0 pour $\mathscr{T}$, et soit W un voisinage ouvert symétrique de 0 pour $\mathscr{T}$ tel que $W + W \subset V$. Montrer que si a est la longueur de la composante connexe de V (pour $\mathscr{T}_0$) contenant 0, toute composante connexe (pour $\mathscr{T}_0$) de W a une longueur $\leqslant a$. En outre, l'ensemble des longueurs des composantes connexes de l'intérieur de $\mathbf{R} - W$ (pour $\mathscr{T}_0$) est borné (utiliser a) et le fait qu'il existe un voisinage ouvert symétrique W_1 de 0 pour $\mathscr{T}$ tel que $W_1 + W_1 \subset W$).

c) Déduire de b) que $\mathbf{R}$ est *précompact* et non localement compact pour la topologie $\mathscr{T}$.

d) Montrer de même que $\mathbf{Z}$ est précompact et non localement compact pour toute topologie $\mathscr{T}$ compatible avec sa structure de groupe et distincte de la topologie discrète.

e) Soit f un homomorphisme continu d'un sous-groupe Γ de $\mathbf{R}$ non réduit à 0 (muni de la topologie induite par $\mathscr{T}_0$), dans un groupe séparé et complet G. Montrer que si f n'est pas un isomorphisme de Γ sur le sous-groupe $f(\Gamma)$ de G, $f(\Gamma)$ est relativement compact dans G (utiliser *c*) et *d*)).

f) *Pour tout entier $n \geqslant 2$, donner des exemples de représentations continues injectives f de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{T}^n$ telles que $f(\mathbf{R})$ soit dense dans $\mathbf{T}^n$ (cf. VII, p. 7, cor. 1).$_*$

3) Montrer que le groupe $\mathbf{T}$ est algébriquement isomorphe au produit $\mathbf{R} \times (\mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ (prendre dans $\mathbf{R}$ une base de Hamel convenable). En déduire qu'il y a sur $\mathbf{R}$ une topologie séparée compatible avec sa structure de groupe, non comparable à la topologie usuelle, et pour laquelle $\mathbf{R}$ est précompact.

§ 2

1) Soient E un ensemble totalement ordonné ayant un plus petit élément ω, I un intervalle de E d'origine ω et contenant ω. On suppose que E et I vérifient les axiomes $(\mathrm{GR_I})$, $(\mathrm{GR_{II}})$, $(\mathrm{GR_{IV}})$ et l'axiome suivant:

$(\mathrm{GR_{IIIb}})$ L'ensemble des éléments $x > \omega$ de I n'est pas vide, et quel que soit $x > \omega$ dans I, il existe $y > \omega$ dans I tel que $y^2 \leqslant x$.

Montrer qu'il existe une application croissante f de I dans $\mathbf{R}$, telle que $f(\omega) = 0$ et $f(xy) = f(x) + f(y)$ pour $x \in \mathrm{I}$, $y \in \mathrm{I}$ et $xy \in \mathrm{I}$; en outre $f(\mathrm{I}) \cap [0, f(b)]$ est dense dans $[0, f(b)]$ pour tout $b \in \mathrm{I}$.

2) Soit G un groupe non commutatif totalement ordonné non réduit à l'élément neutre (par exemple le groupe multiplicatif K* d'un corps ordonné non commutatif; cf. A, VI, § 1, exerc. 1 et § 2, exerc. 23). On considère, dans l'ensemble $\mathbf{R}_+ \times \mathrm{G}$, l'ensemble E formé du couple $(0, e)$ (où e est l'élément neutre de G) et des couples (x, y), où x parcourt l'ensemble des nombres réels >0 et y parcourt G. On prend dans E la loi de composition $(x, y)(x', y') = (x + x', yy')$, et on ordonne E lexicographiquement (en posant $(x, y) < (x', y')$ si $x < x'$ ou si $x = x'$ et $y < y'$). Si on prend $\mathrm{I} = \mathrm{E}$, montrer que les axiomes $(\mathrm{GR_I})$, $(\mathrm{GR_{II}})$, $(\mathrm{GR_{IIIb}})$ (exerc. 1) et $(\mathrm{GR_{IV}})$ sont vérifiés; mais si f est une application croissante de E dans $\mathbf{R}_+$ telle que $f(zz') = f(z) + f(z')$ pour z, z' dans E, f n'est pas strictement croissante.

§ 3

1) On dit qu'un groupe totalement ordonné G (non nécessairement commutatif, cf. A, VI, § 1, exerc. 1) est *archimédien* si l'ensemble I des éléments $\geqslant e$ (élément neutre de G) vérifie l'axiome $(\mathrm{GR_{IV}})$ du § 2 (cf. A, VI, § 1, exerc. 33). Montrer que, pour qu'un groupe totalement ordonné G soit isomorphe à un sous-groupe du groupe additif $\mathbf{R}$, il faut et il suffit que G soit archimédien (distinguer deux cas suivant que l'ensemble des éléments $> e$ dans G a ou non un plus petit élément, et utiliser la prop. 1 de V, p. 7).

2) Soit G un groupe totalement ordonné (non nécessairement commutatif) non réduit à l'élément neutre; la topologie $\mathscr{T}_0(\mathrm{G})$ (I, p. 91, exerc. 5) est compatible avec la structure de groupe de G. Si, pour cette topologie, G est *connexe*, G est isomorphe au groupe additif $\mathbf{R}$ (utiliser l'exerc. 7 de IV, p. 48, et la prop. 2 de V, p. 9).

3) Soit G un groupe totalement ordonné (non nécessairement commutatif); si quand on munit G de la topologie $\mathscr{T}_0(\mathrm{G})$, G est *localement compact* et non discret, G est localement isomorphe à $\mathbf{R}$, et la composante neutre de G est un sous-groupe ouvert isomorphe à $\mathbf{R}$ (utiliser l'exerc. 6 de IV, p. 47, et la prop. 2 de V, p. 9).

¶ 4) Soit G un groupe topologique satisfaisant aux conditions suivantes:

$(\mathrm{R_I})$ G est connexe.

$(\mathrm{R_{II}})$ Le complémentaire G* de l'élément neutre e de G est non connexe.

Dans ces conditions, il existe un *homomorphisme continu bijectif* de G sur $\mathbf{R}$ (autrement dit, G est algébriquement isomorphe à **R** et sa topologie est plus fine que celle de **R**). On établira successivement les propriétés suivantes:

a) Soit $(U_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une partition de G^* formée d'ensembles ouverts *dans* G^* ($n \geqslant 2$). Montrer que chacun des ensembles U_i est ouvert dans G, que e est adhérent à chacun d'eux et que G est séparé. En déduire que les adhérences $\overline{U}_i = U_i \cup \{e\}$ dans G sont connexes (I, p. 115, exerc. 4).

b) Soit A une composante connexe de U_i; montrer que pour tout indice $j \neq i$, on a $A^{-1}\overline{U}_j = A^{-1}$ (observer que $A^{-1}\overline{U}_j$ est connexe et contient A^{-1}, et que $A^{-1}\overline{U}_j \subset G^*$ pour $j \neq i$).

c) Montrer qu'on a nécessairement $n = 2$ (prendre pour chaque indice i tel que $1 \leqslant i \leqslant n$, une composante connexe A_i de U_i; pour $j \neq i$, on a, par *b*), $A_i^{-1}A_j \subset A_i^{-1}$, $A_j^{-1}A_i \subset A_i^{-1} \subset U_i^{-1}$, d'où $A_j^{-1} \subset U_j$). En déduire que G^* a exactement *deux* composantes connexes A, B, que $B = A^{-1}$ et $\overline{A} = \complement(A^{-1})$.

d) La relation $yx^{-1} \in \overline{A}$ est une relation d'ordre faisant de G un groupe totalement ordonné (montrer que $\overline{A}^2 = \overline{A}$ et que $x\overline{A}x^{-1} = \overline{A}$ quel que soit $x \in G$).

e) La topologie $\mathscr{T}_0(G)$ est moins fine que la topologie donnée $\mathscr{T}$ sur G (remarquer que A est ouvert pour $\mathscr{T}$).

Conclure à l'aide de l'exerc. 2 ci-dessus et de I, p. 82, prop. 4. (Cf. VI, p. 23, exerc. 12*b*).)

f) Montrer que si on suppose en outre G *localement compact*, ou *localement connexe*, G est isomorphe à **R**.

*5) Donner un exemple d'une topologie sur **R**, compatible avec sa structure de groupe, pour laquelle **R** est connexe, localement compact, localement connexe, et le complémentaire de $\{0\}$ dans **R** est connexe (utiliser le fait que **R** et $\mathbf{R}^n$ sont algébriquement isomorphes).*

¶ 6) Soit G un groupe topologique satisfaisant aux conditions suivantes:

(LR_I) G est séparé et localement connexe.

(LR_{II}) Il existe un voisinage connexe U de l'élément neutre e de G tel que le complémentaire de e par rapport à U soit non connexe.

Dans ces conditions, montrer que G est un groupe topologique *localement isomorphe* à **R**.

(On établira d'abord que, pour tout voisinage connexe V de e dans G contenu dans U, $V \cap \complement\{e\}$ n'est pas connexe, que e est adhérent à toute composante connexe de $V \cap \complement\{e\}$, et que cet ensemble a exactement deux composantes connexes en raisonnant comme dans l'exerc. 4. Prendre ensuite le voisinage connexe V assez petit et définir sur V une structure d'ensemble totalement ordonné, de sorte que $\mathscr{T}_0(V)$ soit moins fine que la topologie induite sur V par celle de G, et que la prop. 2 de V, p. 9 soit applicable à l'ensemble E des éléments $\geqslant e$ de V.)

7) Soient G un groupe localement compact non discret ayant une base dénombrable d'ensembles ouverts, V_0 un voisinage compact de l'élément neutre e de G tel qu'il n'existe *aucun sous-groupe* de G distinct de $\{e\}$ contenu dans V_0.

a) Soit (x_n) une suite de points de V_0 qui converge vers e. Pour tout n, il existe un entier $p(n) > 0$ tel que $x_n^k \in V_0$ pour $k \leqslant p(n)$ et $x_n^{p(n)+1} \notin V_0$, et on a $\lim_{n \to \infty} p(n) = +\infty$. Montrer qu'il existe une suite (x_{k_n}) extraite de (x_n) telle que, pour tout nombre rationnel r tel que $|r| \leqslant 1$, la suite $(x_{k_n}^{[rp(k_n)]})$ ait une limite $f(r)$ dans V_0 (utiliser le procédé diagonal); pour deux nombres rationnels r, r' tels que $|r| \geqslant 1$, $|r'| \leqslant 1$ et $|r + r'| \leqslant 1$, on a $f(r + r') = f(r)f(r')$.

b) Montrer que f est continue dans un voisinage de 0 dans **Q**. (Raisonner par l'absurde: s'il existait une suite (r_n) de nombres rationnels tendant vers 0 et telle que $f(r_n)$ tende vers un élément $y \neq e$ dans V_0, prouver que l'on aurait $y^m \in V_0$ pour tout entier m.)

c) Déduire de *b*) qu'il existe un homomorphisme continu de **R** dans G non trivial (utiliser la prop. 6 de V, p. 3).

d) Soit H un sous-groupe fermé distingué de G, distinct de G, et supposons que G/H soit non discret, et que dans G/H il existe un voisinage de l'élément neutre ne contenant aucun sous-groupe non trivial. Montrer qu'il existe un homomorphisme continu f: $\mathbf{R} \to \mathrm{G}$ telle que l'homomorphisme composé $\mathbf{R} \xrightarrow{f} \mathrm{G} \to \mathrm{G/H}$ soit non trivial.

8) Soient G un groupe topologique séparé, H un sous-groupe fermé de G contenu dans le centre et tel qu'il existe un homomorphisme continu surjectif $\varphi\colon \mathbf{R} \to \mathrm{G/H}$. Montrer que G est commutatif (si a_0 est un élément de G non dans H, observer qu'il existe une suite d'éléments (a_n) de G et une suite d'éléments (c_n) de H tels que $a_n = c_n a_{n+1}^2$, et que le sous-groupe de G engendré par H et les a_n est dense dans G).

§ 4

1) *a*) Soit $(x_n, y_n)_{n \in \mathbf{Z}}$ une famille de points de $\mathbf{R}^2$, tels que, pour tout $n \in \mathbf{Z}$, on ait $x_n < x_{n+1}$ et

$$\frac{y_{n+1} - y_n}{x_{n+1} - x_n} < \frac{y_{n+2} - y_{n+1}}{x_{n+2} - x_{n+1}};$$

montrer que, quels que soient les entiers $n \in \mathbf{Z}$, $m > 0$, $p > 0$, on a

$$\frac{y_{n+m} - y_n}{x_{n+m} - x_n} < \frac{y_{n+m+p} - y_n}{x_{n+m+p} - x_n}.$$

b) Pour $a > 0$ et $x \neq 0$, on pose $f_a(x) = (a^x - 1)/x$; montrer que, pour $x < y$, $x \neq 0$, $y \neq 0$ et $a \neq 1$, on a $f_a(x) < f_a(y)$ (le démontrer d'abord pour x, y entiers, au moyen de *a*), puis pour x, y rationnels, et enfin en général).

c) En déduire que, quel que soit $a > 0$, la fonction $f_a(x)$, définie pour $x \neq 0$, a une limite à droite et une limite à gauche quand x tend vers 0; montrer que ces deux limites ont une valeur commune $\varphi(a)$, et que $\varphi(a) \neq 0$ pour $a \neq 1$. Montrer que pour $a \neq 1$, la fonction $(\log_a x)/(x - 1)$, définie pour $x \neq 1$, a pour limite $1/\varphi(a)$ quand x tend vers 1.

d) Montrer que, quels que soient $a > 0$, $b > 0$, on a, si $a \neq 1$, $\varphi(b) = \varphi(a) \log_a b$; en déduire qu'il existe un nombre e, compris entre 2 et 4, tel que $\varphi(e) = 1$, et $\varphi(a) = \log_e a$ pour tout $a > 0$.

2) Montrer, par récurrence sur n, que pour tout entier $n > 0$, on a $2^n > n(n+1)/2$. En déduire que, pour $a > 1$ et $\alpha > 0$,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{a^x}{x^\alpha} = +\infty, \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{\log_a x}{x^\alpha} = 0$$

(démontrer d'abord la première de ces relations pour $a = 2$ et $\alpha = 1$).

3) Soit f une application *croissante* de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{R}$, telle que $f(mn) = f(m) + f(n)$ pour tout couple d'entiers *étrangers*.

a) Pour tout entier $a > 1$, et tout entier $k > 0$, on pose

$$\begin{aligned} \mathrm{R}_k(a) &= a^k + a^{k-1} + \cdots + a + 1 \\ \mathrm{S}_k(a) &= a^k - a^{k-1} - \cdots - a - 1. \end{aligned}$$

Montrer que l'on a $f(\mathrm{R}_k(a)) \geqslant kf(a)$, $f(\mathrm{S}_k(a)) \leqslant kf(a)$.

b) Déduire de *a*) que pour tout entier $n > 1$, on a

$$(\log_a n - 2) f(a) \leqslant f(n) \leqslant (\log_a n + 2) f(a)$$

(considérer l'entier $r \geqslant 0$ tel que $a^r < n \leqslant a^{r+1}$).

c) Conclure qu'il existe une constante $c \geqslant 0$ telle que $f(n) = c \,.\log n$ pour $n \geqslant 1$. (Observer que a et n sont arbitraires dans *b*), et en déduire que $f(a)/\log a$ est constante).

(N.-B. — Les chiffres romains entre parenthèses renvoient à la bibliographie placée à la fin de cette note.)

L'histoire de la théorie du groupe multiplicatif $\mathbf{R}_+^*$ des nombres réels >0 est étroitement liée à celle du développement de la notion des *puissances* d'un nombre >0, et des notations employées pour les désigner. La conception de la « progression géométrique » formée par les puissances successives d'un même nombre remonte aux Égyptiens et aux Babyloniens; elle était familière aux mathématiciens grecs, et on trouve déjà chez Euclide (*Eléments*, IX, 11), un énoncé général équivalent à la règle $a^m a^n = a^{m+n}$ pour des exposants entiers >0. Au Moyen Age, le mathématicien français N. Oresme (XIV^e siècle) retrouve cette règle; c'est aussi chez lui qu'apparaît pour la première fois la notion d'exposant fractionnaire >0, avec une notation déjà voisine de la nôtre et des règles de calcul (énoncées de façon générale) les concernant (par exemple les deux règles que nous écrivons maintenant $(ab)^{1/n} = a^{1/n}b^{1/n}$, $(a^m)^{p/q} = (a^{mp})^{1/q}$).[1] Mais les idées d'Oresme étaient trop en avance sur la Mathématique de son époque pour exercer une influence sur ses contemporains, et son traité sombra rapidement dans l'oubli. Un siècle plus tard, N. Chuquet énonce de nouveau la règle d'Euclide; il introduit en outre une notation exponentielle pour les puissances des inconnues de ses équations, et n'hésite pas à faire usage de l'exposant 0 et d'exposants entiers <0.[2] Cette fois (et bien que l'ouvrage de Chuquet soit resté manuscrit et ne paraisse pas avoir été très répandu), l'idée de l'isomorphie entre la « progression arithmétique » des exposants, et la « progression géométrique » des puissances, ne sera plus perdue de vue; étendue aux exposants négatifs et aux exposants fractionnaires par Stifel,[3] elle aboutit enfin à la définition des logarithmes et à la construction des premières tables, entreprise indépendamment par l'Écossais J. Neper, en 1614–1620, et le Suisse J. Bürgi (dont l'ouvrage ne parut qu'en 1620, bien que sa conception remontât aux premières années du XVII^e siècle). Chez Bürgi, la continuité de l'isomorphisme établi entre $\mathbf{R}$ et $\mathbf{R}_+^*$ est implicitement supposée par l'emploi de l'interpolation dans le maniement des tables; elle est au contraire explicitement formulée dans la définition de

---

[1] Cf. M. CURTZE, *Zeitschr. f. Math. u. Phys.*, t. XIII, Supplem., 1868, p. 65.

[2] Chuquet écrit par exemple 12^1, 12^2, 12^3, etc., pour $12x$, $12x^2$, $12x^3$, etc., 12^0 pour le nombre 12, et 12^{2m} pour $12x^{-2}$ (*Bull. bibl. storia math.*, t. XIII, 1880, p. 737–738).

[3] M. STIFEL, *Arithmetica integra*, Nuremberg, 1544, fol. 35 et 249–250.

Neper (aussi explicitement du moins que le permettait la conception assez vague qu'on se faisait de la continuité à cette époque).[1]

Nous n'avons pas à insister ici sur les services rendus par les logarithmes dans le Calcul numérique; du point de vue théorique, leur importance date surtout des débuts du Calcul infinitésimal, avec la découverte des développements en série de $\log(1 + x)$ et de e^x, et des propriétés différentielles de ces fonctions (voir FVR, Note historique des chap. I–III). En ce qui concerne la définition des exponentielles et des logarithmes, on se borna, jusqu'au milieu du XIX^e siècle, à admettre intuitivement la possibilité de prolonger par continuité à l'ensemble des nombres réels la fonction a^x définie pour tout x rationnel; et ce n'est qu'une fois la notion de nombre réel définitivement précisée et déduite de celle de nombre rationnel, qu'on songea à donner une justification rigoureuse de ce prolongement. C'est un principe de prolongement analogue, convenablement appliqué, qui est encore à la base du raisonnement par lequel nous avons établi les prop. 1 (V, p. 7) et 2 (V. p. 9), d'où découle non seulement la définition des exponentielles et des logarithmes, mais aussi, comme nous le verrons au chap. VIII, la mesure des angles.

[1] Neper considère deux points M, N mobiles simultanément sur deux droites, le mouvement de M étant uniforme, celui de N tel que la vitesse de N soit proportionnelle à son abscisse; l'abscisse de M est alors par définition le logarithme de celle de N ((II), p. 20–21).

BIBLIOGRAPHIE

(I) *Euclidis Elementa,* 5 vol., éd. J. L. Heiberg, Lipsiae (Teubner) 1883–88.

(II) J. Neper, *Mirifici logarithmorum canonis constructio,* Lyon, 1620.

Espaces numériques et espaces projectifs

§ 1. L'ESPACE NUMÉRIQUE $\mathbf{R}^n$

1. Topologie de $\mathbf{R}^n$

Définition 1. — *On appelle espace numérique à n dimensions ou de dimension n* (*plan numérique* lorsque $n = 2$), *et on note* $\mathbf{R}^n$, *l'espace topologique produit de n espaces identiques à la droite numérique* $\mathbf{R}$.

Remarque. — L'espace $\mathbf{R}^0$ est réduit à un point.

On sait (E, III, p. 49, cor. 1) que, si E est un ensemble infini, E^n est équipotent à E pour tout entier $n > 0$; donc, pour $n > 0$, $\mathbf{R}^n$ est équipotent à $\mathbf{R}$, autrement dit, *a la puissance du continu* (cf. VI, p. 21, exerc. 1 et 2).

Définition 2. — *On appelle pavé ouvert* (resp. *pavé fermé*) *de* $\mathbf{R}^n$ *toute partie de* $\mathbf{R}^n$ *qui est le produit de n intervalles ouverts* (resp. *de n intervalles fermés*) *de* $\mathbf{R}$.

Les pavés ouverts de $\mathbf{R}^n$ forment une *base* de la topologie de $\mathbf{R}^n$ (I, p. 24); les pavés fermés sont des parties fermées pour cette topologie; l'adhérence d'un pavé ouvert est un pavé fermé; l'intérieur d'un pavé fermé est un pavé ouvert; les pavés ouverts contenant un point $\mathbf{x} = (x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ de $\mathbf{R}^n$ forment un système fondamental de voisinages de $\mathbf{x}$; il en est de même des pavés fermés de $\mathbf{R}^n$ dont $\mathbf{x}$ est point intérieur.

Tout pavé ouvert non vide de $\mathbf{R}^n$ est *homéomorphe* à $\mathbf{R}^n$ (IV, p. 13, prop. 1).

On en conclut que, lorsque $n \geqslant 1$, tout ensemble ouvert non vide de $\mathbf{R}^n$ a la puissance du continu.

On appelle *cube ouvert* (resp. *fermé*) de $\mathbf{R}^n$ un pavé ouvert (resp. fermé) qui est le produit de n intervalles *bornés* et de *longueurs égales* (pour $n = 2$, on dit *carré* *ouvert* (resp. *fermé*)) ; la longueur commune de ces intervalles est appelée le *côté* du cube. Les cubes ouverts $K_m = \prod_{1 \leqslant i \leqslant n} \left]x_i - \frac{1}{m}, x_i + \frac{1}{m}\right[$ forment (lorsque m parcourt l'ensemble des entiers > 0, ou une suite d'entiers croissant indéfiniment) un système fondamental *dénombrable* de voisinages du point $\mathbf{x} = (x_i)$.

Tout pavé ouvert (ou fermé) de $\mathbf{R}^n$ est *connexe* (I, p. 83, prop. 8) ; en particulier, $\mathbf{R}^n$ est un espace *connexe* et *localement connexe*.

Si A est un ensemble ouvert non vide dans $\mathbf{R}^n$, ses composantes connexes sont donc des ensembles *ouverts* (I, p. 85, prop. 11) ; en outre, l'ensemble de ces composantes est *dénombrable*, car $\mathbf{R}^n$ contient une partie dénombrable dense (par exemple $\mathbf{Q}^n$).

Cherchons la condition pour qu'une partie A de $\mathbf{R}^n$ soit *relativement compacte*; d'après le th. de Tychonoff (I, p. 63, th. 3), il faut et il suffit que les projections de A sur les espaces facteurs de $\mathbf{R}^n$ soient relativement compactes; d'après le th. de Borel-Lebesgue (IV, p. 6, th. 2), cela équivaut à dire que ces projections sont des parties *bornées* de $\mathbf{R}$; lorsqu'il en est ainsi, on dit que A est une partie *bornée* de $\mathbf{R}^n$; donc:

PROPOSITION 1. — *Pour qu'une partie* A *de* $\mathbf{R}^n$ *soit relativement compacte, il faut et il suffit qu'elle soit bornée.*

COROLLAIRE. — *L'espace* $\mathbf{R}^n$ *est localement compact, et, pour* $n \geqslant 1$, *non compact.*

2. Le groupe additif $\mathbf{R}^n$

L'ensemble $\mathbf{R}^n$ muni de la structure de groupe *produit* des structures de groupe additif des n facteurs de $\mathbf{R}^n$, est un groupe commutatif qu'on note additivement, la somme de $\mathbf{x} = (x_i)$ et de $\mathbf{y} = (y_i)$ étant donc $\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_i + y_i)$. La topologie de l'espace numérique est compatible avec cette structure de groupe; muni de ces deux structures, $\mathbf{R}^n$ est un groupe topologique qu'on appelle *groupe additif de l'espace numérique à n dimensions.*

La structure uniforme de ce groupe, dite *structure uniforme additive* de $\mathbf{R}^n$, est le produit des structures uniformes des groupes facteurs de $\mathbf{R}^n$ (III, p. 21) ; si, pour chaque entier $p > 0$, on désigne par V_p l'ensemble des couples $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ de points de $\mathbf{R}^n$ tels que $\operatorname{Max}_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i - y_i| \leqslant 1/p$, les ensembles V_p forment un *système fondamental d'entourages* de cette structure uniforme. Lorsque nous considérons $\mathbf{R}^n$ comme un espace uniforme, ce sera toujours, sauf mention expresse du contraire, de la structure uniforme additive qu'il sera question. Muni de cette structure, $\mathbf{R}^n$ est un espace uniforme *complet* (II, p. 17, prop. 10).

3. L'espace vectoriel $\mathbf{R}^n$

Comme $\mathbf{R}$ est un *corps*, on peut définir sur $\mathbf{R}^n$ une structure d'*espace vectoriel* sur $\mathbf{R}$ (A, II, p. 3), le produit $t\mathbf{x}$ d'un scalaire $t \in \mathbf{R}$ et d'un point (ou vecteur) $\mathbf{x} = (x_i)$