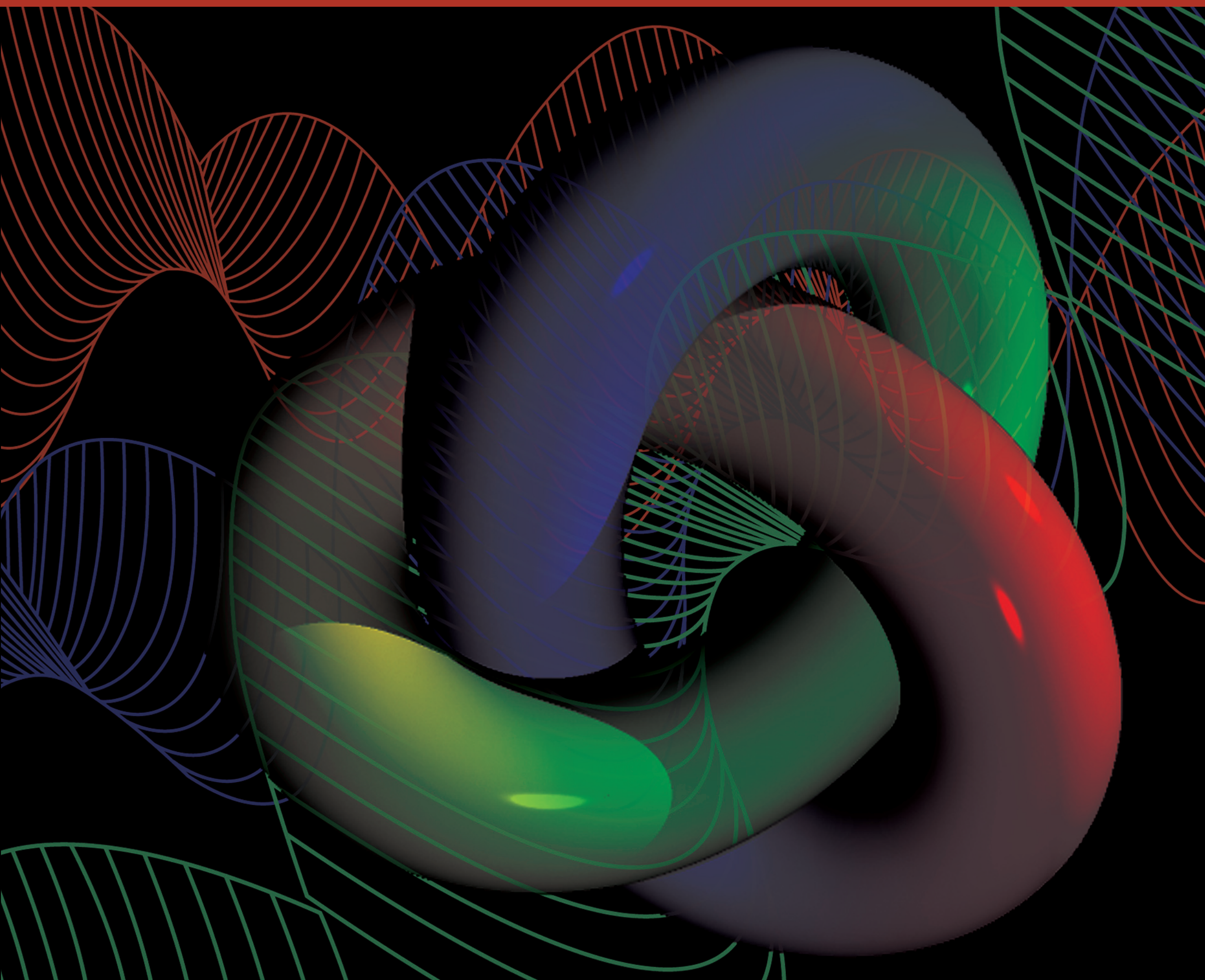
Topología básica

Carlos Prieto de Castro



EDICIONES
CIENTÍFICAS
UNIVERSITARIAS

TEXTO CIENTÍFICO
UNIVERSITARIO

EDICIONES CIENTÍFICAS UNIVERSITARIAS

Serie Texto Científico Universitario

TOPOLOGÍA BÁSICA

CARLOS PRIETO DE CASTRO

Topología básica

FONDO DE CULTURA ECONÓMICA

Primera edición (Ciencia y Tecnología), 2003
Segunda edición (Ediciones Científicas Universitarias), 2013
Primera edición electrónica (PDF), 2017

Prieto de Castro, Carlos
Topología básica / Carlos Prieto de Castro. — 2ª ed. — México : FCE, 2013
573 p. ; ilus. ; 23 x 16 cm — (Colec. Ediciones Científicas Universitarias)
ISBN 978-607-16-1390-5

1. Topología 2. Matemáticas I. Ser. II. t.

LC QA611 Dewey 514 P667t

Diseño de portada: *Paola Álvarez Baldit*

Carretera Picacho-Ajusco, 227; 14738 México, D. F.

Comentarios: editorial@fondodeculturaeconomica.com
www.fondodeculturaeconomica.com
Tel. (55) 5227-4672

ISBN 978-607-16-1390-5 (impreso)
ISBN 978-607-16-5349-9 (PDF)

Hecho en México • *Made in Mexico*

A mi madre, SARA ELENA
A mi padre, CARLOS
A mi esposa, VIOLA
A mis hijos, SEBASTIÁN *y* ADRIÁN

ÍNDICE GENERAL

Segunda Parte

Nociones de topología algebraica

PRÓLOGO

Hoy en día se habla cada vez más de la especialización en la ciencia moderna. No obstante, esta afirmación es válida sólo hasta cierto punto. Podría decirse que una característica de la ciencia actual es la interacción cada vez mayor entre las diferentes disciplinas que la conforman. De manera análoga a lo que sucede en la ciencia en general, en cada disciplina se procura tener una relación más amplia entre las distintas ramas que la integran. En matemáticas, por ejemplo, se espera de un geómetra diferencial o de un analista complejo un conocimiento común más amplio que el que se requería hace medio siglo. Esto sucede así debido a la cada vez mayor ubicuidad que algunos conceptos matemáticos tienen ahora. Uno de estos conceptos es el de espacio topológico, que incluye todo lo relativo a "cercanía", "continuidad", "vecindad", "deformación", etcétera.

Por muchos años ya, la topología ha sido una de las ramas más importantes y de mayor influencia en las matemáticas modernas. Sus orígenes datan de hace varios siglos, aunque sin duda fue Poincaré quien le imprimió el gran ímpetu que ha caracterizado a la topología a través del siglo XX. Hay otros grandes nombres entre los creadores de la topología de conjuntos, cuya existencia se justifica por el gran progreso de la topología algebraica. Por otro lado, la efectividad de la topología de conjuntos, más que en teoremas profundos, radica en primer lugar en su simpleza conceptual y en su conveniente terminología. Esto se debe a que, en cierto sentido, establece un vínculo entre problemas abstractos, no muy intuitivos, y nuestra capacidad de visualizar fenómenos geométricos en el espacio. Esta capacidad intelectual de captar lo que ocurre en el espacio tridimensional, que a través de la topología nos permite penetrar en el pensamiento matemático y en el mundo de los objetos abstractos, es muy independiente de la abstracción y del pensamiento lógico. Este reforzamiento de nuestro talento matemático es quizá la causa más profunda de la efectividad y simpleza de los métodos topológicos.

Como ocurre con muchas de las ramas básicas de las matemáticas, la topología tiene una historia intrincada. Si marcamos el comienzo de la topología cuando se estableció el marco conceptual de la topología de conjuntos, habremos de hacer referencia al libro de Felix Hausdorff, *Grundzüge der Mengenlehre* (Fundamentos de la teoría de conjuntos), Leipzig, 1914, en cuyo capítulo 7, "Conjuntos de puntos en espacios generales", establece los conceptos básicos más importantes de la topología de conjuntos. Ya en 1906, en su artículo

Sur quelques points du calcul fonctionnel (Sobre algunos temas del cálculo de funciones), Maurice Fréchet introdujo el concepto de espacio métrico y trató de establecer el concepto de espacio topológico, dando un enfoque axiomático al concepto de convergencia. Lo que en realidad creó Fréchet fueron los fundamentos topológicos del análisis funcional.

Pero, por supuesto, la historia se remonta más atrás en los tiempos en que la efervescencia de la geometría bullía durante el siglo XIX. A principios de ese siglo se tenía la idea clásica de que la geometría era el ámbito matemático en el que se desarrollan los conceptos del espacio físico. Hacia finales de ese siglo, como lo muestra Felix Klein en su *Erlanger Programm* (Programa de Erlangen. Consideraciones comparativas acerca de las nuevas investigaciones geométricas[1]), la proyección fue más allá del espacio físico e incluso llegó a considerar espacios tan abstractos como las n-variedades, los espacios proyectivos, las superficies de Riemann, o incluso los espacios de funciones.

Entre las obras decisivas para el surgimiento de la topología se encuentra la obra monumental de Georg Cantor. En ella estableció las bases en las que descansa el concepto abstracto de espacio topológico como "un conjunto provisto de una colección de subconjuntos tales que ..." Efectivamente, ya en 1870 Cantor había mostrado que si dos series de Fourier convergen puntualmente y tienen el mismo límite, entonces deben tener los mismos coeficientes. El propio Cantor mejoró este resultado en 1871 probando que la coincidencia de los coeficientes también puede lograrse requiriendo convergencia puntual o igualdad de los límites, salvo para un conjunto finito en el intervalo $[0, 2\pi]$. En 1872 analizó ciertos conjuntos infinitos, que son los únicos para los cuales la afirmación no es válida. Fue entonces cuando introdujo su famoso *conjunto de Cantor* (véase II.2.7-2), que a pesar de "sólo" ser un subconjunto de un intervalo, no sólo es un objeto interesante topológicamente, sino de gran importancia en varias ramas de las matemáticas.

El problema de decidir si dos espacios son homeomorfos o no es, sin duda, uno de los problemas centrales en la topología. Lo designaremos como el *problema de homeomorfismo*. Sólo a partir de la creación de la topología algebraica fue posible dar una respuesta razonable a tal problema. En ella no se trata solamente de la sencillez conceptual de la topología de conjuntos y de su adecuada simbología, sino que, gracias a la poderosa herramienta que el álgebra proporciona y a su harto conveniente relación funtorial con la topología, es como se logra tal eficacia. Por ejemplo, si dos espacios tienen invariantes algebraicos distintos, entonces no pueden ser equivalentes desde el punto de vista homotópico. Por tanto, tampoco serán homeomorfos.

[1] Véase la traducción de C. Prieto en *Mathesis* 11 (1995) 331–370.

La descripción analítica de los sistemas dinámicos en la mecánica clásica representó los primeros pasos hacia la necesidad de generar un lenguaje geométrico en dimensiones más altas que las usuales. Ya Lagrange en el siglo XVIII había pensado en la posibilidad de considerar una especie de cuarta dimensión en su *Mécanique analytique* (Mecánica analítica), París, 1788. Fue Riemann, en su famoso *Habilitationsvortrag: Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen* (Sobre las hipótesis que subyacen a la geometría), Gotinga, 1854, quien presentó las primeras ideas sobre la geometría de las variedades.

El mismo Lagrange, en sus *Leçons sur le calcul des fonctions* (Lecciones sobre el cálculo de funciones), París, 1806, introduce el concepto de perturbación, u homotopía, de curvas en problemas de cálculo variacional para detectar ciertas curvas mínimas. Lo que hoy conocemos por topología algebraica quizás haya comenzado con el *Analysis Situs*, París, 1895, y sus cinco *Compléments* (Complementos), Palermo, 1899; Londres, 1900; París, 1902; París, 1902, y Palermo, 1904, de Henri Poincaré. En el primero anota que "*geometría es el arte de razonar bien con figuras mal hechas*". Y abunda diciendo

> Sí, sin duda, pero con una condición. Las proporciones de las figuras pueden alterarse mucho, pero sus elementos no deben intercambiarse y deben conservar su ubicación relativa. En otros términos, no hay que preocuparse por las propiedades cuantitativas, sino que hay que respetar las propiedades cualitativas, es decir, precisamente aquellas de las que se ocupa el Analysis Situs.

En efecto, otras obras de Poincaré contienen tanta topología interesante, como las obras citadas; es el caso de su memoria sobre la teoría cualitativa de las ecuaciones diferenciales, que incluye la famosa fórmula del índice de Poincaré, que describe en términos topológicos la famosa fórmula de Euler. Ésta constituye uno de los primeros pasos de la topología algebraica. En estas obras Poincaré ya considera funciones sobre variedades, como, por ejemplo, los campos vectoriales, cuyos índices determinan la característica de Euler en su fórmula del índice. Es también Poincaré quien generaliza la pregunta sobre la clasificación de variedades, teniendo en mente la clasificación de las superficies orientables tratada por Moebius en su *Theorie der elementaren Verwandtschaft* (Teoría del parentesco elemental), Leipzig, 1863, y resuelta también por Jordan en *Sur la déformation des surfaces* (Sobre la deformación de las superficies), París, 1866, quienes, al clasificar superficies, resuelven un importante problema de homeomorfismo.

Jordan también estudió clases de homotopía de trayectorias cerradas, es decir, las primeras nociones del grupo fundamental inspirado por Riemann, quien ya había analizado el comportamiento de integrales de formas diferenciales holomorfas y, con ello, el concepto de equivalencia homológica entre trayectorias cerradas.

Por supuesto, no son sólo Cantor, Fréchet, Klein, Hausdorff, Riemann, Jordan, Moebius y Poincaré los creadores de los conceptos básicos de la topología. Toda esta historia es, en sí misma, objeto de otro texto. Sin duda la obra editada por I. M. James (1999) es una excelente referencia en esta dirección.

El presente texto es una versión corregida y aumentada del libro *Topología básica,* publicado por el Fondo de Cultura Económica en 2003. Como el original, este texto está dividido en dos partes. El propósito de la primera es presentar los temas de topología de conjuntos que, desde mi punto de vista, son básicos para cualquier alumno de la licenciatura que esté interesado en esta rama de las matemáticas y en otras afines. La segunda parte se destina a presentar los temas fundamentales de la topología algebraica cuyo ámbito de uso va más allá de la topología.

El diseño del texto es como sigue. Cada capítulo se divide en varias secciones, que se distinguen por su doble numeración (I.1, I.2, II.1, …). Las definiciones, proposiciones, teoremas, observaciones, fórmulas, ejercicios, etc., se designan con triple numeración (I.1.1, I.1.2, II.1.1, …). Los ejercicios forman una parte importante del texto, ya que muchos de ellos están destinados a llevar al lector a profundizar en las líneas ya desarrolladas, o a probar resultados con interés propio o que son relevantes para temas posteriores. La mayor parte están numerados, aunque ocasionalmente se les identifica dentro del texto por el uso de letras cursivas (*ejercicio*).

Comenzamos la primera parte con un pequeño capítulo I, de carácter motivacional, seguido de ocho capítulos sustanciales. Se empieza estudiando los espacios métricos, a partir de los cuales se llega a las propiedades abstractas de sus conjuntos abiertos. Esto nos conduce al concepto abstracto de espacio topológico. Más adelante se estudian varias condiciones adicionales a los axiomas básicos, que garantizan propiedades útiles y convenientes de los espacios. Se hace especial hincapié en la cuestión de la compacidad, por tratarse de un tema de particular importancia en muchas de las aplicaciones de la topología. Concluimos esta primera parte del libro con los teoremas de metrizabilidad y la compactación de Stone-Čech. A lo largo de ella se resaltan las propiedades universales que tienen las muy diversas construcciones. Particularmente, las propiedades universales que caracterizan la suma topológica y el producto topológico. También damos las propiedades universales de las identificaciones y de la compactación de Stone-Čech. (Una referencia complementaria muy útil para leer con mayor detalle estas propiedades universales es el libro de Graciela Salicrup, 1993.) Se destina todo un capítulo al importante tema de límites y colímites de espacios topológicos y dos secciones a los espacios compactamente generados y a los k-espacios, pues tienen mucha importancia en la topología algebraica.

La segunda parte del texto cambia de sabor para adquirir uno de tintes más de la topología algebraica. Tiene el propósito de presentar los que, desde mi punto de vista, son los temas básicos de la topología algebraica que de una forma u otra deben ser aprendidos por un estudiante de licenciatura interesado en esta área o en áreas afines de las matemáticas. Comenzamos con un pequeño capítulo x, que trata algunas construcciones básicas que se requieren en la topología algebraica. Después de éste, el libro estudia en el capítulo xi el concepto de variedad topológica, donde se construyen todas las superficies cerradas, y se hace hincapié en la importancia de los invariantes algebraicos como herramientas para distinguir espacios topológicos, aunque aún no se demuestra en ese capítulo que ellas son todas ni que son distintas. Se analizan otras variedades de dimensión baja; en particular, se prueba que las únicas variedades son el intervalo, el círculo, la semirrecta y la recta. Después, usando la descomposición de Heegaard se muestra cómo pueden analizarse las variedades tridimensionales. Formulamos, aunque sin demostración, el importante teorema de Freedman sobre la clasificación de las 4-variedades simplemente conexas y terminamos presentando otras variedades importantes para distintas ramas de las matemáticas, tales como las variedades de Stiefel y de Grassmann. En el siguiente capítulo, el xii, se retorna al problema de clasificación de superficies. Haciendo uso de teoría de gráficas se demuestra el teorema de Jordan–Schönflies y con él se prueba que toda superficie cerrada es triangulable. Esto permite probar que cualquier superficie cerrada es homeomorfa a alguna de las superficies construidas en el capítulo anterior.

Más adelante, en el capítulo xiii presentamos los elementos de la teoría de homotopía. En particular, analizamos las aplicaciones del círculo en sí mismo, introduciendo el importante concepto de grado. Se introduce la equivalencia homotópica de espacios, como un concepto más burdo que el de homeomorfismo. El grupo fundamental es el primer invariante propiamente algebraico que introducimos en el capítulo xiv. Damos más adelante la demostración del teorema de Seifert–van Kampen, que permite calcular el grupo fundamental de un espacio conociendo los grupos de algunas de sus partes. Utilizamos este importante teorema para calcular los grupos fundamentales de todas las superficies cerradas, así como los de algunas 3-variedades orientables, cuya descomposición de Heegaard se conoce. Con el cálculo de los grupos fundamentales de las superficies cerradas construidas en el capítulo xi concluimos la demostración del teorema de clasificación. Más adelante, en el capítulo xv se introducen las aplicaciones cubrientes. Son ellas una herramienta esencial para analizar, desde un punto de vista distinto, el grupo fundamental. En el último capítulo, el XVI, se presenta una breve introducción a la teoría de los nudos, en donde se ve la utilidad de varios invariantes algebraicos. Por un lado, se presenta el polinomio de Jones y, por el otro, como aplicación del grupo fundamental, se define el grupo de un nudo.

El libro está planeado para usarse en dos cursos semestrales hacia la segunda mitad de la licenciatura en matemáticas. Para el primer curso, pueden leerse los capítulos I-VI, pero puede dejarse fuera el capítulo V, referente a límites y colímites. Del capítulo VII puede omitirse la sección VII.6, dedicada a redes. En el capítulo VIII, la sección VIII.7 —que de trata espacios compactamente generados— y la sección VIII.8 —sobre k-espacios— pueden omitirse. Finalmente, en el capítulo IX, las secciones IX.5 y IX.6, que tratan sobre espacios paracompactos y las relaciones entre diversas propiedades, pueden pasarse por alto. Esta ruta crítica propuesta cumple con el propósito del libro de comenzar con los espacios métricos y, después de agregar condiciones adecuadas a los espacios topológicos generales, retornar a los espacios metrizables. Por otro lado, las secciones omitidas pueden ser utilizadas para que los alumnos desarrollen diferentes proyectos. En particular, las secciones VIII.7 y VIII.8 representan proyectos muy interesantes para buenos estudiantes.

El segundo curso puede conformarse leyendo los capítulos XI, sobre variedades, XIII, sobre los conceptos básicos de la homotopía, XIV, sobre el grupo fundamental, y XV, sobre aplicaciones cubrientes. Los capítulos XII —sobre el teorema de Schönflies— y el XVI —sobre nudos— pueden proporcionar material para proyectos que desarrollen los alumnos.

No puedo dejar de reconocer la influencia en este libro de todos los expertos que directa o indirectamente tuvieron influencia en mi formación como matemático y como topólogo. En la Facultad de Ciencias de la UNAM fueron decisivos Guillermo Torres y Roberto Vázquez. Posteriormente, durante mis estudios de doctorado en Heidelberg, Alemania, tuve el privilegio de recibir en forma directa las enseñanzas de Albrecht Dold y Dieter Puppe. En forma indirecta, tuve la influencia de algunos textos alemanes de topología, entre los que destacan el de Klaus Jänich (1996) —sus efectos se ven reflejados, sobre todo, en este prólogo—. La influencia de Horst Schubert (1975) es clara en la primera parte del texto; la del libro de Ralph Stöcker y Heiner Zieschang (1988), así como la del de Tammo tom Dieck (1991) lo es en la segunda.

Muchísimo agradezco a todos los que a lo largo de la escritura de este libro y desde que apareció la primera edición han colaborado para mejorarlo. Desde Luis Valero, que tipografió las primeras etapas, los alumnos de muchas generaciones que han señalado errores, imprecisiones y carencias, Leonardo Espinosa, que siempre ha estado generosamente dispuesto a echarme la mano con las dificultades de LaTeX y hasta Axel Retif, que en la última etapa, tanto de la primera edición, como de ésta, ha estado al pie del cañón para que la obra quede impecable. Por supuesto expreso también mi agradecimiento al Fondo de Cultura Económica, que tan generosamente ha acogido mis libros.

Finalmente agradezco a mis hijos y a mi esposa por su tolerancia, pues buena parte del mucho tiempo que esta obra me ha demandado ha sido a costa del que a ellos debo.

Carlos Prieto*
Instituto de Matemáticas
Universidad Nacional Autónoma de México

Otoño de 2012

* El autor recibió apoyo de los proyectos PAPIIT IN101909 e IN108712 durante la preparación de esta obra.

INTRODUCCIÓN

El objetivo de este libro es introducir al lector en las ideas básicas de la topología de conjuntos y de la topología algebraica. Pero ¿qué es topología? Ésta no es una pregunta fácil de responder. Tratar de definir una rama de las matemáticas en una oración concisa es complicado. No obstante, como aproximación, podemos decir que topología es la rama de las matemáticas que estudia las deformaciones continuas de objetos geométricos. Uno de los propósitos de la topología es clasificar objetos o, al menos, dar métodos para distinguir entre objetos que no son homeomorfos. En otras palabras, para decidir qué objetos no pueden obtenerse uno del otro a través de una deformación continua. La topología también proporciona técnicas para estudiar estructuras topológicas en objetos que surgen en ramas muy diversas de las matemáticas. Los conceptos de "deformación", "continuidad" y "homeomorfismo" serán fundamentales y se definirán con precisión en el texto. No obstante, aun sin haberlos definido, manejaremos a continuación algunos ejemplos, en un nivel intuitivo, que los ilustran.

La figura 1 presenta tres espacios topológicos; a saber, una superficie esférica a la que se le removieron el polo norte y el polo sur, una esfera a la que se le removieron el casquete polar norte y el casquete polar sur (incluyendo los círculos polares) y un cilindro al que se le removieron los dos bordes. Estos tres objetos claramente pueden ser deformados uno en otro, por lo cual la topología no los distingue entre sí.

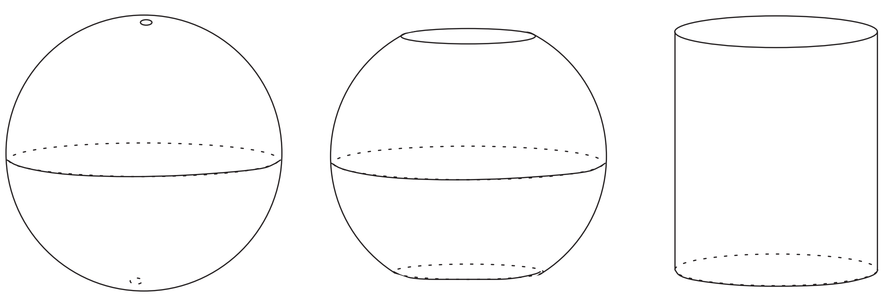


FIGURA 1. *Una esfera sin los polos; una esfera sin los casquetes polares ni los círculos polares; un cilindro sin los bordes*

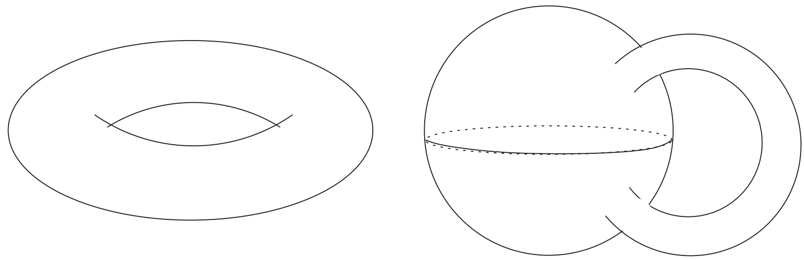


FIGURA 2. *Un toro y una esfera con un asa*

En la figura 2 tenemos la superficie de un toro (una "dona") y una superficie esférica a la que se le pegó la superficie de un asa. Cada una de estas dos figuras geométricas es claramente una deformación de la otra. Sin embargo, es intuitivamente claro que el objeto topológico que se presenta en tres formas en la figura 1 no va a ser deformable en el objeto topológico que se presenta en dos formas en la figura 2.

Precisando un poco más, diremos que dos objetos (espacios topológicos) serán *homeomorfos* cuando exista una correspondencia biunívoca que haga corresponder puntos **cercanos** de uno de ellos con puntos cercanos del otro. Podemos agregar a la lista de espacios que no son homeomorfos los siguientes ejemplos.

(a) Sean $N = \{0, 1, \ldots, n - 1\}$, $M = \{0, 1, \ldots, m - 1\}$, $n < m$. Considerados como espacios topológicos de la manera que sea, no van a poder resultar homeomorfos debido a que una condición necesaria para que dos espacios topológicos sean homeomorfos es que tengan el mismo número de elementos.

(b) El mismo argumento de (a) demuestra que un punto no es homeomorfo a un intervalo.

(c) Se requieren argumentos más elaborados para demostrar que un intervalo cerrado no es homeomorfo a una cruz, es decir, los espacios topológicos representados en la parte superior de la figura 3 no son homeomorfos entre sí. Una manera de decidirlo sería la siguiente: cualquier punto que le quitemos al intervalo descompone éste en a lo más dos porciones conexas; sin embargo, hay un punto en la cruz que al quitarse descompone ésta en cuatro componentes. Por tal razón, en el primer espacio no existe ningún punto que pueda corresponder a este punto especial del segundo espacio, y así no pueden ser homeomorfos.

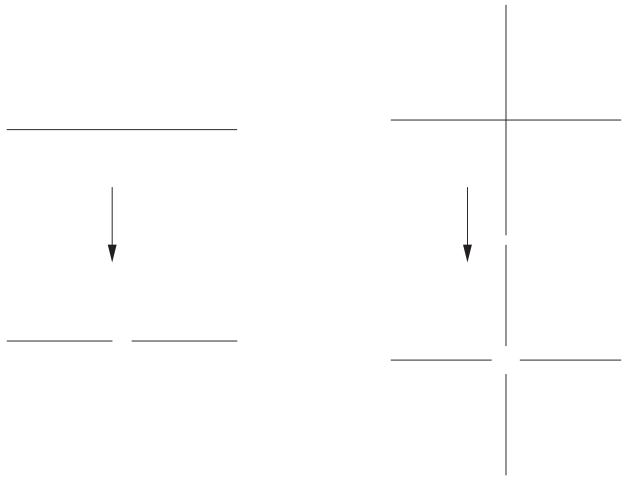


FIGURA 3. *Un intervalo y una cruz no son homeomorfos*

(d) La superficie del toro no es homeomorfa a la superficie de la esfera. Esto se demostraría si observamos que se puede dibujar un círculo sobre la superficie del toro que no puede ser deformado en un punto; sin embargo, es muy claro que cualquier círculo que dibujemos sobre la superficie de una esfera sí puede ser deformado a un punto, como se puede apreciar en la figura 4. Otra manera de verlo sería observando que esos círculos son tales que el de la esfera siempre la descompone en dos regiones, mientras que el del toro no lo descompone. (En otras palabras, en la esfera se cumple el famoso Teorema de la Curva de Jordan, mientras que no se cumple en el toro.) También puede decirse que en la esfera cualquier círculo es la frontera de un disco sobre la esfera, mientras que en el toro hay círculos que no son frontera de algún disco.

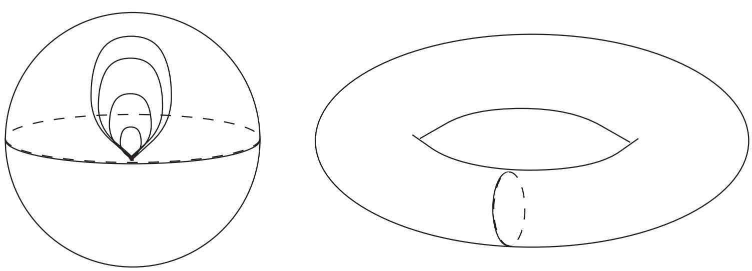


FIGURA 4. *Todo lazo se contrae en la esfera; un lazo no se contrae en el toro*

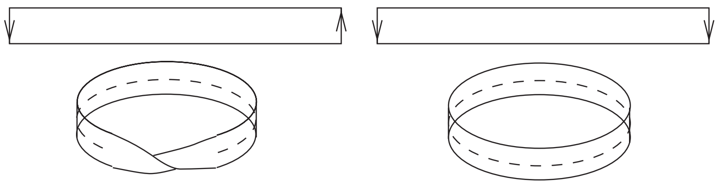


Figura 5. *La banda de Moebius y la banda trivial*

(e) La *banda de Moebius*, que se obtiene de una tira de papel torciéndola media vuelta y luego pegando sus extremos, no es homeomorfa a la *banda trivial*, que se obtiene pegando los extremos de la banda de papel sin torcerla (véase la figura 5).

El argumento para demostrar esto es semejante al que utilizamos en el ejemplo (d); a saber, hay un círculo en la banda de Moebius que puede ser removido sin que ésta se rompa (se puede cortar con tijeras a lo largo del ecuador sin obtener dos pedazos); sin embargo, en la banda usual, cualquier círculo paralelo y distinto a las orillas (o cualquiera otro) va a descomponer la banda en dos porciones (véase la figura 6).

Los primeros *ejercicios* para el lector son los siguientes.

(f) Tómese la banda de Moebius y córtese a lo largo del ecuador. ¿Cuál será el espacio que se obtenga? ¿Será nuevamente una banda de Moebius o será una banda trivial?

(g) De manera análoga a la construcción descrita de la banda de Moebius podemos considerar una tira de papel y pegar sus extremos, ahora torciendo una vuelta. ¿Será este espacio homeomorfo a la banda de Moebius? ¿Será este espacio homeomorfo a la banda trivial? ¿Qué relación guarda este espacio con el que resulta en el inciso (f)? (Véase la figura 6.)

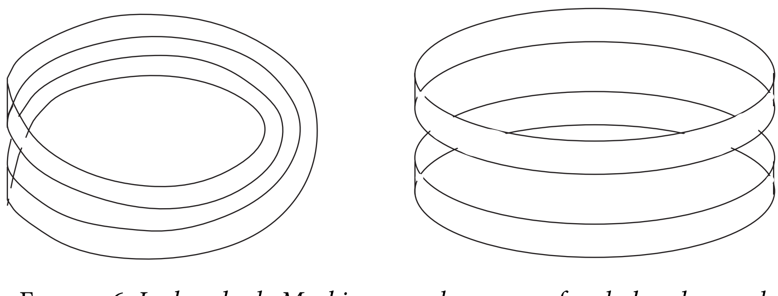


Figura 6. *La banda de Moebius no es homeomorfa a la banda usual*

Uno de los problemas centrales de la topología consiste, justamente, en estudiar los espacios topológicos para distinguirlos. En todos los ejemplos anteriores se decide que los espacios no son homeomorfos con base en ciertos *invariantes* que se les pueden asignar a éstos; por ejemplo, en (a) este invariante es la cardinalidad, es decir, el número de elementos, en (c) es el número de componentes en que se descomponen al quitarles un punto, mientras que en (d) y en (e) es el número de componentes en que se descomponen al quitarles un círculo. Uno de los objetivos de la topología es asignar a los espacios invariantes relativamente simples de calcular que permitan distinguirlos.

Cuando mencionamos el concepto intuitivo de homeomorfismo, utilizamos el concepto intuitivo de cercanía entre dos puntos, es decir, hablamos de la posibilidad de decidir qué puntos son cercanos a un punto dado o qué puntos forman una *vecindad* o un *entorno* de tal punto. En los primeros capítulos precisaremos este concepto.

Un ejemplo final de la importancia de poder resolver problemas de homeomorfismo corresponde a la teoría de los nudos. Un *nudo* K es una curva cerrada simple en el espacio tridimensional, es decir, es la imagen $k(\mathbb{S}^1)$ bajo una inclusión "decente" del círculo en el espacio usual, $k : \mathbb{S}^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$, como se ilustra intuitivamente en la figura 7.

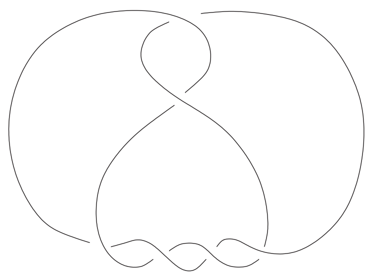


FIGURA 7. *Un nudo en el espacio*

La teoría de los nudos es un área importante de la topología que tiene asombrosas aplicaciones en diversos ámbitos de la ciencia. El problema central de la teoría consiste en determinar cuándo dos nudos son *equivalentes* entre sí, es decir, cuándo es posible deformar en el espacio un nudo en otro sin romperlo. Hace algunos años, en lo que constituye uno de los resultados más fuertes de la teoría de nudos, Gordon y Luecke (1989) probaron que un nudo K está determinado por su complemento, es decir, dos nudos K y K' son equivalentes si y sólo si sus complementos en el espacio $\mathbb{R}^3 - K$ y $\mathbb{R}^3 - K'$ son homeomorfos. En otras palabras, convirtieron el problema de clasificar nudos en un problema de homeomorfismo de ciertos *subconjuntos* en $\mathbb{R}^3$. El llamado *grupo del nudo*, es decir, el grupo fundamental de su complemento es un invariante que permite distinguir entre dos nudos no equivalentes, pues de no ser estos grupos isomorfos, entonces los complementos de los nudos no serán homeomorfos y, por tanto, por el teorema de Gordon y Luecke, los nudos no serán equivalentes.

Primera Parte
NOCIONES DE TOPOLOGÍA DE CONJUNTOS

I. ESPACIOS MÉTRICOS

UNA FUENTE muy rica de ejemplos para la topología la constituyen los espacios métricos pues, de manera muy natural, tienen las propiedades topológicas fundamentales. En este capítulo haremos un estudio sucinto de los conceptos básicos de la teoría de los espacios métricos. Comenzaremos la discusión presentando los espacios euclidianos y sus subespacios.

I.1 ESPACIOS EUCLIDIANOS

Con el fin de familiarizarnos con la notación del texto, en esta sección presentaremos una serie de ejemplos de espacios topológicos "canónicos", que tienen un papel muy importante tanto en la topología como en otras ramas de las matemáticas. Los símbolos $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$ designarán, como es costumbre, los números reales y los complejos, respectivamente. Si $n \geq 1$, entonces $\mathbb{R}^n$ será el *espacio euclidiano* de dimensión n, es decir, $\mathbb{R}^n = \{x = (x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, n\}$ con sus operaciones usuales como espacio vectorial: si $x, y \in \mathbb{R}^n$ y $r \in \mathbb{R}$, entonces $x + y = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$, $x - y = (x_1 - y_1, \dots, x_n - y_n)$ y $rx = (rx_1, \dots, rx_n)$, y la *norma* está dada por $|x| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$. Se define la *distancia* entre dos puntos simplemente como $|y - x|$. $\mathbb{R}^0$ representa el espacio euclidiano consistente en un solo punto, el 0, que se puede ver como subespacio del espacio $\mathbb{R}^n$. Se tiene una identidad canónica $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^{n+m}$ dada por $((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_m)) = (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$. Así mismo, se considera a $\mathbb{R}^n$ de forma canónica como un subespacio de $\mathbb{R}^{n+1}$ identificándolo con el subespacio $\mathbb{R}^n \times 0$. También se tiene una identificación canónica de $\mathbb{R}^2$ con los números complejos $\mathbb{C}$ haciendo $(x, y) = x + \mathrm{i}y$, donde $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$.

I.1.1 DEFINICIÓN. Sea $n \geq 0$. Consideraremos los siguientes espacios:

$\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x\}$, la *semirrecta no negativa*.

$\mathbb{B}^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| \leq 1\}$, la *bola unitaria* de dimensión n. La 2-bola unitaria la llamamos frecuentemente *disco unitario* y la denotamos con $\mathbb{D}^2$.

$\mathbb{S}^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| = 1\}$, la *esfera unitaria* de dimensión $n - 1$ o $(n - 1)$-*esfera unitaria*. Si $n = 2$, entonces $\mathbb{S}^1$ es el *círculo unitario*.