Essener Beiträge zur Mathematikdidaktik

RESEARCH

Marcel Klinger

Funktionales Denken beim Übergang von der Funktionenlehre zur Analysis

Entwicklung eines Testinstruments und empirische Befunde aus der gymnasialen Oberstufe

Springer Spektrum

Essener Beiträge zur Mathematikdidaktik

Reihe herausgegeben von
B. Barzel, Essen, Deutschland
A. Büchter, Essen, Deutschland
B. Rott, Essen, Deutschland
F. Schacht, Essen, Deutschland
P. Scherer, Essen, Deutschland

In der Reihe werden ausgewählte exzellente Forschungsarbeiten publiziert, die das breite Spektrum der mathematikdidaktischen Forschung am Hochschulstandort Essen repräsentieren. Dieses umfasst qualitative und quantitative empirische Studien zum Lehren und Lernen von Mathematik vom Elementarbereich über die verschiedenen Schulstufen bis zur Hochschule sowie zur Lehrerbildung. Die publizierten Arbeiten sind Beiträge zur mathematikdidaktischen Grundlagen- und Entwicklungsforschung und zum Teil interdisziplinär angelegt. In der Reihe erscheinen neben Qualifikationsarbeiten auch Publikationen aus weiteren Essener Forschungsprojekten.

Weitere Bände in der Reihe http://www.springer.com/series/13887

Marcel Klinger

Funktionales Denken beim Übergang von der Funktionenlehre zur Analysis

Entwicklung eines Testinstruments und empirische Befunde aus der gymnasialen Oberstufe

Mit einem Geleitwort von Prof. Dr. Bärbel Barzel

Springer Spektrum

Marcel Klinger
Essen, Deutschland

Von der Fakultät für Mathematik der Universität Duisburg-Essen genehmigte Dissertation zur Erlangung des Doktorgrades „Dr. rer. nat.“

Datum der mündlichen Prüfung: 7. September 2017

Gutachterinnen: Prof. Dr. Bärbel Barzel, Prof. Dr. Bettina Rösken-Winter

ISSN 2509-3169 ISSN 2509-3177 (electronic)
Essener Beiträge zur Mathematikdidaktik
ISBN 978-3-658-20359-7 ISBN 978-3-658-20360-3 (eBook)
https://doi.org/10.1007/978-3-658-20360-3

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Springer Spektrum

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier

Springer Spektrum ist Teil von Springer Nature
Die eingetragene Gesellschaft ist Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH
Die Anschrift der Gesellschaft ist: Abraham-Lincoln-Str. 46, 65189 Wiesbaden, Germany

Danksagung

In der vorliegenden Dissertationsschrift findet mein seit Mai 2014 andauerndes Promotionsprojekt seinen Höhepunkt. In dieser Zeit habe ich viel lernen dürfen und einiges erreicht. Rückblickend betrachtet, handelt es sich bei einer Promotion sicherlich um eines der umfangreichsten Projekte, das man überhaupt innerhalb des professionellen Lebens durchführen kann.

Im Laufe der Zeit wurde ich hierbei von vielen Menschen unterstützt. Diese Unterstützung ist einerseits von professionell-beruflicher Natur. Andererseits zeigt sie sich aber auch darin, dass geliebte Menschen mein Promotionsprojekt als umfangreichen Teil meines Lebens akzeptiert, toleriert und entsprechend unterstützt haben.

Von diesen Menschen sind einige besonders hervorzuheben, da ihr Handeln in wesentlichen Zügen zum Gelingen meines Promotionsprojektes und der damit verbundenen Anfertigung dieser Dissertationsschrift beigetragen hat.

Hierbei ist allen voran meine Mentorin Prof. Dr. Bärbel Barzel zu nennen, die von Beginn an ihr Vertrauen in mich gesetzt hat und mich stets tatkräftigt unterstütze. Besonders von der hohen Verantwortung und den damit verbundenen Freiheiten, die es benötigt, eine solche Dissertationsschrift anzufertigen, habe ich maßgeblich profitiert.

Als Zweitgutachterin stand mir ebenfalls Prof. Dr. Bettina Rösken-Winter beratend zur Seite, so dass ich auch ihr zu besonderem Dank verpflichtet bin. Mit ihren Ideen und Anregungen war auch sie stets ein wichtiger Bestandteil des Promotionsprojektes.

Hervorheben möchte ich auch Prof. Dr. Andreas Büchter, der sich stets Zeit nahm und immer ein offenes Ohr hatte, so dass auch ihm besonderer Dank gebührt.

Insgesamt erfuhr ich breite Unterstützung innerhalb der Arbeitsgruppe aber auch durch die Mathematikdikdatikerinnen und Mathematikdidaktiker der Universität Duisburg-Essen insgesamt. So waren Gespräche im

Büro, auf dem Flur oder innerhalb diverser Kolloquien stets offen, konstruktiv und somit letztlich gewinnbringend. Insbesondere während der Durchführung und Auswertung der Erhebungsdaten wurde ich von zahlreichen Kolleginnen und Kollegen auch logistisch unterstützt. Vor allem aber sind Nora Henze, Lara Meder und Anna Schulz zu nennen, die als studentische Hilfskräfte exzellente Arbeit leisteten. An dieser Stelle sollen aber auch Heike Steinbrink und (nochmals) Lara Meder genannt werden, die ihre Staatsarbeiten im Umfeld meines Promotionsprojektes ablegten und somit auch einen wichtigen Teil zum Gesamtprojekt beitrugen.

Danken möchte ich aber auch Can Gürer, der mich insbesondere hinsichtlich statistischer Themen – besonders rund um das Rasch-Modell – unterstützt hat und stets für eine entsprechende Diskussion zur Verfügung stand.

Mein Dank gilt aber auch Dr. Marc Bosse und Martina Hoffmann, die gerade in den ersten Tagen innerhalb meines neuen Jobs im Deutschen Zentrum für Lehrerbildung Mathematik (DZLM) wichtige Ansprechpartner waren und auch weiterhin blieben.

Maßgebliche Bereicherung fand meine Zeit als Doktorand darüber hinaus in einer weiteren Person durch die enge Verbindung, die unsere Promotionsprojekte zueinander hatten: Daniel Thurm. Die gemeinsame Arbeit habe ich stets sehr genossen und letzten Endes einen guten Freund gewonnen.

Ich bin aber auch meiner Familie und Freunden zu Dank verpflichtet, die in den letzten Jahren häufig auf mich verzichten mussten.

Hier möchte ich meine Eltern Susanne und Jörg Klinger besonders hervorheben, die von den Anfängen meiner Schulzeit an bis hin zur Promotion stets hinter mir standen und mir so ermöglichten, mich zu dem Menschen zu bilden, der ich heute bin.

Die größte und wichtigste Unterstützerin meiner Promotion war aber meine Freundin, Lebensgefährtin, Verlobte und inzwischen Frau Annika Klinger, die häufig auf mich verzichten musste, jedoch stets Verständnis aufbrachte. Zusammen sind wir einen weiten Weg gegangen.

Witten im Juli 2017 Marcel Klinger

Geleitwort

Funktionales Denken gehört seit der Meraner Reform (1905) als zentrales Thema zum festen Kanon der Schulmathematik in der Sekundarstufe I und schafft wichtige Voraussetzungen für spätere Themen, z.B. den Analysisunterricht in der Oberstufe. Zum funktionalen Denken gehört als Kernkompetenz der flexible Umgang mit funktionalen Beziehungen in verschiedenen Darstellungen und inner- wie außermathematischen Kontexten. Doch wie ist es um diese Kompetenz bei Schülerinnen und Schülern bestellt? Von welchen Voraussetzungen kann der Analysisunterricht in der Oberstufe ausgehen?

Dieser Frage hat sich Marcel Klinger mit seiner Arbeit intensiv gewidmet. Er hat zwei Tests entwickelt, wovon einer für den Einsatz zu Beginn der Oberstufe und einer nach der Einführung der Differentialrechnung konzipiert wurde. Mit beiden Tests liefert Herr Klinger hilfreiche Diagnosewerkzeuge, die sowohl für Wissenschaft als auch Schulpraxis hilfreiche Instrumente darstellen, da sie Informationen über die kognitiven Voraussetzungen der Schülerinnen und Schüler liefern. Für die Schule ist dies dienlich als Grundlage zur gezielten individuellen Förderung und zur Weiterentwicklung der Lehre.

Das Besondere an den von Herrn Klinger entwickelten Tests ist die gute fachdidaktische Durchdringung der einzelnen Aufgaben wie des Gesamt-Settings. Er verbindet die Erkenntnisse und Empfehlungen der spezifisch deutschen Tradition der Stoffdidaktik mit anglo-amerikanischen Ansätzen (z.B. die Theorie von Concept Image und Concept Definition oder das Procept als Verknüpfung von Process und Concept) in eloquenter Weise. Das entstandene Kompetenzmodell ist auch weit über die Arbeit hinaus hilfreich bei der Konzeption wie Analyse von Aufgaben im Themenbereich.

Mit den Tests werden vielfältige kognitive Aktivitäten gefordert, wodurch die Aufgaben hohen diagnostischen Wert haben und sich deutlich von kalkülorientierten Testbatterien absetzen, die gerade für die Oberstufe und den Übergang von der Schule zur Hochschule häufig noch üblich sind. Damit setzt Herr Klinger einen guten Standard, die Problematik fachlicher Lücken in diesem Themenbereich fachdidaktisch fundiert anzugehen und neu zu denken. Die Erkenntnisse des Testeinsatzes mit über 3000 Schülerinnen und Schüler in Nordrhein-Westfalen geben bereits wichtige Hinweise auf Problemstellen im Verstehen und im Umgang mit Funktionen wie zum Beispiel Übergeneralisierungen und Gender-Unterschiede.

Die Arbeit von Herrn Klinger ist entstanden im Rahmen des Deutschen Zentrums für Lehrerbildung Mathematik (DZLM), konkret als Rahmung eines Fortbildungskurses für Oberstufenlehrkräfte zur sinnvollen Integration digitaler Werkzeuge. Die ersten Befunde mit Impulsen zur Gestaltung von Aufgaben und Unterricht wurden bereits in diese Fortbildungsreihe integriert und werden auch zukünftig Bestandteil weiterer Fortbildungen sein.

Mit seiner Arbeit leistet Herr Klinger sowohl für die Schulpraxis als auch für die fachdidaktische Forschung einen wichtigen, innovativen Beitrag, da er wegweisende Standards setzt für eine fachdidaktisch fundierte Entwicklung quantitativer Tests im Bereich der Oberstufenmathematik.

Essen im Oktober 2017 Prof. Dr. Bärbel Barzel

Kurzdarstellung

Die vorliegende Arbeit stellt die Konzeption, Entwicklung und Durchführung eines Testinstruments im Bereich des Funktionalen Denkens dar. Das Instrument besteht aus zwei Einzeltests, welche speziell konzipiert sind, um zu Beginn und gegen Ende der Einführungsphase der gymnasialen Oberstufe eingesetzt zu werden. Die inhaltliche Fokussierung der Tests zielt auf die Erhebung der Schülerleistung beim Übergang von der Funktionenlehre der Sekundarstufe I zur Analysis der Oberstufe ab.

Hierbei steht im Mittelpunkt, ob seitens der Lernenden Verständnis der Inhalte und ihrer Zusammenhänge erworben werden konnte. Neben der literaturgeleiteten Klärung der Begriffe des konzeptuellen und prozeduralen Wissens wird hierzu die Relevanz unterschiedlicher Repräsentationsformen und entsprechender Wechsel zwischen ihnen speziell für die Mathematik aufgezeigt. Darüber hinaus wird auf die in deutscher Tradition stehende Grundvorstellungstheorie sowie vergleichbare angloamerikanisch geprägte Varianten eingegangen. Weiterhin werden die genannten Theorieelemente für die Inhaltsbereiche der Funktionenlehre und der frühen Analysis konkretisiert, um diese so für die Testkonstruktion nutzbar zu machen und den genannten Verständnisbegriff zu operationalisieren.

Weiterhin werden testtheoretisch-methodische Elemente, wie das eindimensionale dichotome Rasch-Modell, erläutert. Darüber hinaus wird auf das häufig innerhalb mathematischer Leistungstests auftretende Phänomen geschlechtsspezifischer Effekte zu Gunsten der männlichen Probanden eingegangen. Die Konzeption des Testinstruments orientiert sich schließlich an einem im Rahmen der Arbeit entwickelten Kompetenzstrukturmodell, das wiederum auf den vorgestellten Theoriefacetten fußt.

Neben der Entwicklung des genannten Testinstruments und der Sicherung und Erörterung seiner Qualität, verfolgt die Arbeit das Ziel, den Stand der Fähigkeiten der Schülerinnen und Schüler in der Einführungsphase umfangreich zu beschreiben. Weiterhin soll geklärt werden, welche

individuellen Leistungsprofile sich innerhalb der besagten Inhaltsbereiche ausmachen lassen und wie stark die festgestellten Fähigkeiten und Leistungsprofile durch das Geschlecht der Probanden determiniert werden.

Anhand einer großen Feldtestung mit über 3000 Schülerinnen und Schülern in Nordrhein-Westfalen finden die entwickelten Tests daher Anwendung. Die so gewonnenen Daten lassen sich mit dem eindimensionalen dichotomen Rasch-Modell, aber auch dem Modell von Birnbaum skalieren. Um vor allem einen fachdidaktisch-gehaltvollen Blick auf die Leistungen der Lernenden zu werfen, wird jedes verwendete Item einer eingehenden Analyse unterzogen, die neben theoretischen Grundlagen auch auf den gewonnenen empirischen Daten fußt. Im Rahmen weiterer Analysen werden u.a. sich individuell ergebende Bearbeitungsprofile mittels Latente-Klassen-Analyse herausgearbeitet und die Leistungsdaten bezüglich geschlechtsspezifischer Effekte untersucht.

Insgesamt lassen die gewonnenen Daten einen breiten und vielseitigen Blick auf die Leistungen der Schülerinnen und Schüler zu Beginn und gegen Ende der Einführungsphase zu. Es zeigt sich u.a., dass Schülerinnen und Schüler unterschiedliche mathematische Aktivitäten häufig nicht hinreichend vernetzen und sowohl benachbarte Themenkomplexe als auch unterschiedliche Darstellungsformen nicht gewinnbringend miteinander in Verbindung bringen. Weiterhin stellen sich auf nahezu allen Ebenen der Datenanalyse deutliche Effekte zu Gunsten der männlichen Probanden ein, die auf eine teils beachtliche Bevorteilung von Jungen gegenüber Mädchen schließen lassen.

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

Tabellenverzeichnis

Teil I

Einleitung

1 Einleitung

Albert Einstein soll einmal gesagt haben:

> „Any fool can know. The point is to understand." (Simmons 1997, S. 1)

Er grenzt damit reines Faktenwissen gegenüber „echtem" Verstehen ab. Statt voneinander losgelöstem und möglicherweise schlicht auswendig gelerntem Wissen propagiert Einstein somit tiefgreifendes inhaltliches Verständnis. Dieses bei Schülerinnen und Schülern aufzubauen ist eines der vorrangigsten Ziele – wenn nicht sogar *das* Ziel – allen Unterrichts, jeder Lehrkraft und der Didaktik im Allgemeinen.

Vor diesem Hintergrund wirkt die folgende sinngemäß wiedergegebene Rückfrage besonders interessant, die der Autor dieser Arbeit einst erhielt, als er einem Bekannten gegenüber das Thema seines Promotionsprojektes erörterte:

> „Ableitung? Ist das das, wo man den Exponent nach vorne multipliziert und dann eins abzieht?"

Es war jener Aspekt des Themas „Differentialrechnung", der sich am stärksten ins Gedächtnis gebrannt hatte und so auch noch Jahre nach Ablegen des Abiturs in Erinnerung geblieben war.

Beide Zitate stehen nicht losgelöst nebeneinander. Einsteins oben rezitierte Unterscheidung zwischen „knowing" und „understanding" bringt das Problem, welches im zweiten Zitat zum Vorschein kommt, auf den Punkt. Denn das Reduzieren einer ganzen Teildisziplin der Mathematik auf einen Teil eines Kalküls zeugt wohl vor allem davon, dass Letzteres – also Understanding – hier nicht erworben wurde. Dabei ist die Analysis mit ihren Anfängen in der Funktionenlehre der Sekundarstufe I und der

M. Klinger, *Funktionales Denken beim Übergang von der Funktionenlehre zur Analysis*, Essener Beiträge zur Mathematikdidaktik, https://doi.org/10.1007/978-3-658-20360-3_1

sukzessiven Konzeptentwicklung bis hin zum Ableitungs- und Integralbegriff ein Bereich des Mathematikunterrichts mit seinem dichten Geflecht an Zusammenhängen, der das Potential hat, zu einem breiten Gesamtkonzept entwickelt zu werden. In dessen Mittelpunkt sollten ausgebildete Vorstellungen und charakteristische Denkweisen stehen, die einen Blick auf das Warum freigeben.

An dieser Stelle soll nicht der Eindruck erweckt werden, Lehrkräfte würden dieses Ziel in ihrem Unterricht nicht anstreben. Dennoch ist gerade der Analysisunterricht in den letzten Jahren häufig der Kritik einer übermäßigen Kalkülorientierung ausgesetzt, welche der Entwicklung von sog. konzeptuellen Wissen entgegenstünde.

Doch wie steht es um das konzeptuelle Wissen der Schülerinnen und Schüler im Bereich von Funktionen und früher Analysis? Ein wichtiges Werkzeug für die Erörterung dieser Frage ist zweifelsohne ein Testinstrument, welches die entsprechenden stofflichen Bereiche fokussiert, aber auch die entsprechende Wissensart in den Mittelpunkt stellt.

Die vorliegende Arbeit beschreibt den Entwicklungsprozess eines solchen Instruments und gibt Einblicke in entsprechende empirische Befunde aus der gymnasialen Oberstufe Nordrhein-Westfalens. Insgesamt wurden zwei Tests entwickelt und 3202 bzw. 2665 Schülerinnen und Schülern zu Beginn bzw. gegen Ende des ersten Oberstufenjahres vorgelegt.

Im Mittelpunkt beider Tests steht das sog. Funktionale Denken, welches während der Funktionenlehre der Sekundarstufe I entwickelt wird und im Analysisunterricht der Oberstufe im Sinne des Spiralprinzips weiter ausgebaut wird. Es kann vor allem als Grundlage für das Understanding des Funktionsbegriffs betrachtet werden. In seinem Mittelpunkt stehen geeignete Grundvorstellungen, die konzeptuelles Wissen erst ermöglichen.

Hierbei ist gerade das erste Oberstufenjahr von besonderer Bedeutung, da hier unterschiedliche Funktionstypen der Sekundarstufe I von einem höheren und ganzheitlicheren Standpunkt betrachtet und somit zu einem allgemeineren Konzept funktionaler Zusammenhänge synthetisiert werden. Nicht zuletzt wird der für die weitere Analysis zentrale Begriff der Ableitungsfunktion eingeführt. In diesem Sinne erheben beide Tests das konzeptuelle Wissen im Themenbereich „Funktionen“ an der Nahtstelle zwischen Mittel- und Oberstufenmathematik. Sie fokussieren also *Funktionales Denken beim Übergang von der Funktionenlehre zur Analysis*.

1.1 Hintergrund zur Entstehung dieser Arbeit

Mit seinem Runderlass vom 27.06.2012 ordnete das Ministerium für Schule und Weiterbildung Nordrhein-Westfalen (MSW NRW) die „Verbindliche Einführung von graphikfähigen Taschenrechnern“ (MSW NRW 2012) an Schulen mit gymnasialer Oberstufe und dem Beruflichen Gymnasium an. So setzen z.B. auch die Zentralabituraufgaben seit dem Jahr 2017 dieses Hilfsmittel voraus. Zur Begründung heißt es u.a.

> „Die fachdidaktische Entwicklung in der Mathematik weist den so genannten ‚Werkzeugen‘ eine immer größere Bedeutung vor allem in der Sekundarstufe II zu. Der Gebrauch von graphikfähigen Taschenrechnern erlaubt nach fachdidaktischen Gesichtspunkten eine Entlastung von kalkülorientierten Routineberechnungen und eine schnelle Visualisierung von Graphen. Er ermöglicht damit einen kreativen Umgang mit mathematischen Fragestellungen.“ (MSW NRW 2012)

Für die Schulen ergibt sich somit die Verpflichtung graphikfähige Taschenrechner (GTR) spätestens mit Beginn der Oberstufenkohorte mit Abschlussjahr 2017 sukzessive in den Unterricht zu integrieren. In vielen Fällen fand daher eine erstmalige Verwendung zu Beginn der sog. *Einführungsphase in die gymnasiale Oberstufe* im Schuljahr 2014/15 statt.

Aufgrund des oben beschriebenen Umstands hat das Deutsche Zentrum für Lehrerbildung Mathematik (DZLM, s. Kramer & Lange 2014) in Zusammenarbeit mit dem MSW NRW beschlossen, die Lehrerfortbildung „GTR kompakt“ (heute „Lehren und Lernen mit digitalen Werkzeugen“; s. Klinger et al. 2018) zum Einsatz des graphikfähigen Taschenrechners zu konzipieren und ab Ende 2014 erstmals durchzuführen. Im Fokus des Fortbildungskonzeptes steht dabei weniger die Handhabung solcher Handheld-Geräte als primär die wissenschaftlich-fundierte und didaktisch-bedachte Integration in den Mathematikunterricht. Die so konzipierte Fortbildungsmaßnahme besteht aus vier eintägigen Modulen, welche durch Erprobungsphasen im eigenen Unterricht ergänzt und parallel an den Standorten Bochum, Düsseldorf und Münster durchgeführt wurden. Im Rahmen der Erstdurchführung wurden so etwa 90 Mathematiklehrkräfte von November 2014 bis April 2015 fortgebildet.

Zu den Zielen des DZLM zählen nicht nur die Konzeption von Fortbildungseinheiten in der Breite, sondern auch die ständige Weiterentwicklung der angebotenen Qualifizierungsmaßnahmen auf wissenschaftlicher Basis. Daher wurde parallel zur erstmaligen Durchführung von „GTR kompakt" das Projekt „GTR NRW" initiiert, welches von Daniel Thurm sowie dem Autor dieser Arbeit als Bündelung ihrer Promotionsprojekte geführt wird (s. Thurm, Klinger & Barzel 2015; Klinger, Thurm & Barzel 2015a; Thurm 2016). Um den Wissensstand der Schülerinnen und Schüler zu erheben und etwaige Veränderungen durch die Fortbildung der entsprechenden Lehrkräfte festzustellen, wurden Testinstrumente benötigt, die zu den spezifischen Zeitpunkten zu Beginn und gegen Ende der Fortbildungsreihe einsetzbar sind.

Die vorliegende Arbeit beschreibt die Entwicklung dieser Instrumente, ist aber inhaltlich losgelöst von der beschriebenen Fortbildungsreihe zu betrachten.

1.2 Notwendigkeit eines neuen Testinstruments

Zu Beginn der Arbeiten stand eine Literaturrecherche mit dem Ziel, ein geeignetes Testinstrument zu finden, das die spezifischen Anforderungen erfüllt:

– Es umfasst einen Leistungstest mit einem Fokus auf konzeptuelles Wissen im Inhaltsbereich der Funktionenlehre der Sekundarstufe I.

– Es umfasst einen Leistungstest mit einem Fokus auf konzeptuelles Wissen im Inhaltsbereich der Analysis des ersten Oberstufenjahres.

– Es bietet eine geeignete Möglichkeit der Verbindung beider Tests, z.B. in Form von Ankeritems, welche einen Vergleich der Ergebnisse jeweiliger Erhebungen mittels beider Tests ermöglicht.

Zwar gibt es einige Testinstrumente, die die Anforderungen zwar in Teilen, jedoch nicht gänzlich erfüllen (z.B. Nitsch 2015; Busch, Barzel & Leuders 2015; Moormann 2009; Kendal & Stacey 2001), so dass dies die Entwicklung spezifischer Testinstrumente nötig machte. Teilweise standen die entsprechenden Arbeiten zum damaligen Zeitpunkt auch noch nicht zur Verfügung. Hinzu kommt außerdem, dass Autorinnen und Autoren die genutzten Tests häufig unter Verschluss halten und nur Beispielitems zeigen. Am prominentesten sind hier wohl die Testinstrumente der großen Schulleistungsstudien wie TIMSS und PISA zu nennen, welche vor allem mit Blick auf die Wiederverwendbarkeit des Itemsatzes auf eine vollständige Veröffentlichung verzichten.

Die Entwicklung der Testinstrumente soll im Gegensatz dazu in dieser Arbeit möglichst transparent dargestellt werden, was auch einen vollständigen Einblick in den verwendeten Itemsatz erfordert. Die entsprechenden Aufgaben werden dazu an den jeweiligen Stellen dieser Arbeit abgebildet. Die vollständigen Testinstrumente sind zudem im Anhang dieser Arbeit enthalten (s. Abschnitt 10.1).

1.3 Gliederung der Arbeit

Die vorliegende Arbeit gliedert sich in vier Teile. Der erste Teil wird dabei bereits von dieser Einleitung gebildet.

Eine literaturbasierte Aufarbeitung des aktuellen Forschungsstands gibt überblicksartig Einsicht in die verwendete Theorie und findet sich im zweiten Teil. Hierbei wird in Kapitel 2 zunächst auf allgemeine fachdidaktische Rahmentheorien eingegangen, auf welche sich diese Arbeit im Besonderen stützt. Zunächst wird so der Begriff des konzeptuellen Wissens geklärt und auf seine Bedeutung für diese Dissertation eingegangen. Das konzeptuelle Wissen wird im Rahmen der entwickelten Testinstrumente vor allem durch den Einsatz verschiedener Repräsentationen mathematischer Inhalte operationalisiert, so dass Abschnitt 2.2 von einem allgemeinen Standpunkt auf das Wesen von Repräsentationen und auf ihre besondere Rolle für den Mathematikunterricht und die Mathematik im Allgemeinen eingeht. Einen weiteren wichtigen Grundbaustein bildet die Verwendung mathematischer Vorstellungen. Der Fokus liegt hier einerseits auf der Grundvorstellungstheorie wie sie sich innerhalb der deutschsprachigen Mathematikdidaktik häufig findet, anderseits auf der Theorie von Concept Image und Concept Definition, die vor allem im angloamerikanischen Sprachraum verbreitet ist. Gemeinsamkeiten und Unterschiede beider Theoriekomplexe werden aufgearbeitet.

In Kapitel 3 wird sodann auf die relevante fachdidaktische Theorie hinsichtlich des Funktionsbegriffs eingegangen. Hierbei werden die zuvor genannten Theorien für den Funktionsbegriff spezifiziert. Insbesondere wird die Grundvorstellungstheorie für den Funktionsbegriff konkretisiert und auf übliche Repräsentationen und Repräsentationswechsel im Kontext von Funktionen eingegangen. Ferner wird der Begriff des Funktionalen Denkens aus historischer und didaktischer Perspektive erörtert.

Kapitel 4 liefert den fachdidaktischen Hintergrund zur Analysis und zum Ableitungsbegriff. Neben üblichen Grundvorstellungen wird zudem auf die Gefahr einer Überbetonung des Ableitungskalküls und den Begriff des Infinitesimalen Denkens eingegangen. Letzterer wird schließlich hinsichtlich seines Zusammenhangs zum Funktionalen Denken untersucht. Weiterhin wird die Beziehung von Funktionalem Denken zum Analysisunterricht aufgezeigt und auf den Unterschied zwischen der Funktionenlehre der Sekundarstufe I und dem Analysisunterricht der Oberstufe eingegangen.

Kapitel 5 bildet das letzte Kapitel des zweiten Teils. Es klärt den Begriff des mathematischen Leistungstests und liefert allgemeine Gütekriterien, die für die Entwicklung solcher Instrumente zu berücksichtigen sind. Es geht ferner auf das Rasch-Modell ein, welches die methodologische Grundlage der Testentwicklung bilden soll. Ein weiterer wichtiger Aspekt, der im Rahmen dieser Arbeit besondere Berücksichtigung erfahren soll, ist die in solchen Leistungstests häufig beobachtete Leistungsdifferenz zwischen männlichen und weiblichen Probanden.

Den dritten Teil bildet schließlich die empirische Untersuchung. Kapitel 6 geht zunächst auf die für diese Arbeit zentralen Fragen ein und bereitet den theoretischen Hintergrund in Form eines Zwischenfazits auf.

Kapitel 7 beschreibt sodann das Vorgehen während der Testentwicklung und die Durchführung jeweiliger Pilotierungsphasen für die Testinstrumente. Hier wird exemplarisch dargestellt, wie die verwendeten

Items konstruiert, getestet und schließlich in der Haupterhebung verwendet oder aber ausgeschlossen wurden.

Kapitel 8 stellt den Kern der empirischen Untersuchung dar. Es beschreibt zunächst die durchgeführte Erhebung hinsichtlich der Durchführung und der erhaltenen Stichprobe. Es folgt die Skalierung mithilfe des Rasch-Modells und die Überprüfung der Modellgeltung mittels Modellgeltungstests sowie die Diskussion von Alternativmodellen. Abschnitt 8.3 diskutiert die Ergebnisse schließlich itemweise. Hierbei wird für jedes Item der didaktische Hintergrund aufbereitet und eine Verbindung zu den jeweiligen Ergebnissen der Erhebung geschlagen. Auf diese Weise wird ein differenzierter Blick auf die Fähigkeiten und Leistungen der Schülerinnen und Schüler in Nordrhein-Westfalen ermöglicht.

Der vierte und letzte Teil beantwortet die zuvor gestellten Forschungsfragen in Kapitel 9 und fasst somit die zentralen Ergebnisse dieser Arbeit und des Promotionsprojektes insgesamt zusammen. Mögliche Konsequenzen für die Praxis werden aus unterrichtlicher Perspektive sowie aus Sicht von Lehrerfortbildungen beleuchtet. Das Kapitel schließt mit der Reflexion der vorliegenden Arbeit und der durch sie repräsentierten Studie sowie mit der Benennung von Anknüpfungspunkten für weitere Forschungsunterfangen.