

Tomas Hrycej

# Robuste Regelung

Ein Leitfaden für sicherheitskritische  
Anwendungen

**EXTRAS ONLINE**

 Springer Vieweg



# Robuste Regelung

---

Tomas Hrycej

# Robuste Regelung

Ein Leitfaden für sicherheitskritische  
Anwendungen

Tomas Hrycej  
Lorch, Deutschland

Ergänzendes Material finden Sie auf <http://extras.springer.com>

ISBN 978-3-662-54167-8                      ISBN 978-3-662-54168-5 (eBook)  
<https://doi.org/10.1007/978-3-662-54168-5>

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Springer Vieweg

© Springer-Verlag GmbH Deutschland 2018

Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung, die nicht ausdrücklich vom Urheberrechtsgesetz zugelassen ist, bedarf der vorherigen Zustimmung des Verlags. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Bearbeitungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Der Verlag, die Autoren und die Herausgeber gehen davon aus, dass die Angaben und Informationen in diesem Werk zum Zeitpunkt der Veröffentlichung vollständig und korrekt sind. Weder der Verlag noch die Autoren oder die Herausgeber übernehmen, ausdrücklich oder implizit, Gewähr für den Inhalt des Werkes, etwaige Fehler oder Äußerungen. Der Verlag bleibt im Hinblick auf geografische Zuordnungen und Gebietsbezeichnungen in veröffentlichten Karten und Institutionsadressen neutral.

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier

Springer Vieweg ist Teil von Springer Nature

Die eingetragene Gesellschaft ist Springer-Verlag GmbH Deutschland

Die Anschrift der Gesellschaft ist: Heidelberger Platz 3, 14197 Berlin, Germany

---

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einführung</b> . . . . .	1
1.1	Literatur . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Systeme und deren Beschreibung</b> . . . . .	7
2.1	Grundlagen der Systembeschreibung . . . . .	8
2.1.1	Zeitdiskrete Systembeschreibung . . . . .	13
2.2	Zusammenschalten von Systemen . . . . .	16
2.3	Auswahl der relevanten Methoden . . . . .	19
2.3.1	Ein- und Mehrgrößensysteme . . . . .	20
2.3.2	Lineare vs. nicht lineare Systeme . . . . .	23
2.3.3	Stabile vs. instabile Systeme . . . . .	26
2.3.4	Beschreibung im Zeit- vs. Frequenzbereich . . . . .	27
2.4	Literatur . . . . .	28
<b>3</b>	<b>Ziele jeder Regelung: Robustheit und Performanz</b> . . . . .	29
3.1	Robustheit . . . . .	30
3.2	Performanz . . . . .	31
<b>4</b>	<b>Funktionale Sicherheit und Regelung</b> . . . . .	33
<b>5</b>	<b>Was ist Robustheit und wie wird sie quantifiziert?</b> . . . . .	37
5.1	Stabilität des Regelkreises . . . . .	38
5.2	Methodenwahl bei sicherheitskritischen Anwendungen . . . . .	43
5.3	Perturbation der Regelstrecke . . . . .	44
5.3.1	Perturbation bei Mehrgrößenregelstrecken . . . . .	46
5.4	Bereich der robusten Stabilität . . . . .	49
5.4.1	Robuste Stabilität bei Mehrgrößensystemen . . . . .	56
5.5	Vorgehensweise zur Prüfung der robusten Stabilität eines Regelkreises . . . . .	57
5.6	Literatur . . . . .	58

<b>6</b>	<b>Zusammenspiel von Robustheit und Performanz</b> . . . . .	59
6.1	Quantifizierung der Reglerperformanz . . . . .	60
6.2	Grenzen der Performanz . . . . .	62
6.3	Zusammenspiel von Performanz und Robustheit . . . . .	65
6.3.1	Robustheit und Wahl des Streckenmodells . . . . .	67
6.4	Weitere Charakteristiken der Reglerleistung . . . . .	68
6.5	Robuste Performanz . . . . .	71
6.5.1	Robuste Performanz von Mehrgrößenregelstrecken . . . . .	75
6.6	Vorgehensweise zur Prüfung der robusten Performanz eines Regelkreises . . . . .	78
6.7	Literatur . . . . .	78
<b>7</b>	<b>Robustheit und Performanz bei funktionaler Sicherheit</b> . . . . .	79
7.1	Mögliche Vorgehensweise bei der Reglerspezifikation für funktionale Sicherheit nach ASIL . . . . .	84
<b>8</b>	<b>Prüfung der Robustheit direkt aus empirischen Frequenzgängen</b> . . . . .	85
8.1	Frequenzgang aus Fourier-Transformation der Messdaten . . . . .	87
8.2	Anregungssignale für Frequenzgangaufnahme . . . . .	90
8.2.1	Anregung durch einen Impuls . . . . .	91
8.2.2	Anregung durch eine Sprungfunktion . . . . .	92
8.2.3	Anregung durch Pseudo Random Binary Sequence (PRBS) . . . . .	94
8.2.4	Anregung durch eine Sinussequenz . . . . .	96
8.2.5	Einfluss des linearen Trends auf den empirischen Frequenzgang . . . . .	98
8.2.6	Vergleich von Anregungssignalen . . . . .	99
8.2.7	Nichtnegative Anregungen . . . . .	102
8.3	Vorgehensweise bei der Bestimmung eines empirischen Frequenzgangs . . . . .	106
<b>9</b>	<b>Systemidentifikation aus dem Frequenzgang</b> . . . . .	109
9.1	Kurzer Überblick der Identifikationsmethoden . . . . .	110
9.1.1	Methoden für Mehrgrößensysteme . . . . .	113
9.2	Modellidentifikation im Frequenzbereich . . . . .	113
9.2.1	Spezialfall: Modell ohne Nullstellen . . . . .	117
9.3	Identifikation eines strukturierten Modells . . . . .	120
9.4	Vorteile der Modellidentifikation im Frequenzbereich . . . . .	124
9.5	Vorgehensweise für die Modellidentifikation . . . . .	127
9.6	Literatur . . . . .	129

<b>10</b>	<b>Robuste Spezifikationen für Subsysteme</b> . . . . .	131
10.1	Beispiel eines Gesamtsystems mit einer robustheits-kritischen Komponente . . . . .	135
10.2	Vorgehensweise bei der Robustheits- und Performanzprüfung eines Gesamtsystems mit Komponenten . . . . .	139
10.3	Literatur . . . . .	142
<b>11</b>	<b>Spezifikationen im Zeitbereich</b> . . . . .	143
11.1	Konzeptuelles Gerüst: die Signal- und Systemnormen . . . . .	144
11.1.1	Signalnormen . . . . .	145
11.1.2	Systemnormen . . . . .	147
11.1.3	Berechnung der Signalnorm über einem endlichen Zeitintervall . . . . .	152
11.2	Spezifikation durch eine Norm auf Sensitivität des Regelkreises . . . . .	152
11.3	Spezifikation als Norm der Abweichung vom Referenzmodell . . . . .	159
11.4	Zusammenfassung der Besonderheiten der Spezifikation im Zeitbereich . . . . .	165
11.5	Vorgehensweise bei der Spezifikation im Zeitbereich . . . . .	167
11.6	Literatur . . . . .	168
<b>12</b>	<b>Prüfung der Robustheit eines PID-Reglers</b> . . . . .	169
12.1	Struktur des PID-Reglers . . . . .	170
12.2	Robustheit und Performanz von einparametrischen Reglern (P, I und D) . . . . .	172
12.2.1	Robustheit und Performanz des P-Reglers . . . . .	173
12.2.2	Robustheit und Performanz des I-Reglers . . . . .	174
12.2.3	Robustheit und Performanz des D-Reglers . . . . .	176
12.3	Numerische Optimierung des PID-Reglers . . . . .	177
12.4	PID-Regler mit Pol-Kompensation . . . . .	182
12.5	Vorgehensweise für den robusten Entwurf eines PID-Reglers . . . . .	190
<b>13</b>	<b>Reglersynthese: einfache und komplexe Methoden</b> . . . . .	193
13.1	Der robuste Entwurf durch Q-Parametrierung . . . . .	195
13.1.1	Q-Parametrierung für stabile Regelstrecken . . . . .	196
13.1.2	Spezialfall: stabile Eingrößensysteme . . . . .	197
13.1.3	Besonderheiten der Mehrgrößensysteme . . . . .	201
13.1.4	Q-Parametrierung für instabile Regelstrecken . . . . .	202
13.1.5	Vorgehensweise beim robusten Reglerentwurf durch Q-Parametrierung . . . . .	203
13.2	Der robuste Reglerentwurf mit der $H_\infty$ -Methode . . . . .	204
13.2.1	Verallgemeinerte Regelstrecke . . . . .	205
13.2.2	Gewichte der verallgemeinerten Regelstrecke . . . . .	209
13.2.3	Konstruktion der verallgemeinerten Regelstrecke . . . . .	213

---

13.2.4	$H_\infty$ -Lösungsansatz . . . . .	214
13.2.5	Bedingungen für die Lösbarkeit der $H_\infty$ -Optimierung . . . . .	217
13.2.6	Optimierungsbeispiel . . . . .	219
13.2.7	Besonderheiten bei zeitdiskreten Systemen . . . . .	220
13.2.8	Besonderheiten bei MIMO-Systemen . . . . .	222
13.2.9	Vorgehensweise beim $H_\infty$ -Reglerentwurf . . . . .	223
13.3	Literatur . . . . .	224
<b>14</b>	<b>Redesign bei Instabilität</b> . . . . .	<b>225</b>
14.1	Wahl und Bearbeitung des zu analysierenden Messabschnitts . . . . .	227
14.2	Analyse der Oszillation . . . . .	230
14.3	Redesign des Reglers . . . . .	237
14.3.1	Redesign durch Erhöhung der Robustheitsspezifikation . . . . .	238
14.3.2	Redesign durch Anpassung des Streckenmodells . . . . .	239
14.4	Vorgehensweise beim Regler-Redesign nach auftretenden Instabilitäten . . . . .	242



## Zusammenfassung

Die Ausrichtung dieses Werks auf die robuste Regelung im Kontext von sicherheitskritischen Anwendungen wird erklärt sowie die Abfolge einzelner Kapitel vorgestellt. Da sich das Buch vor allem an Entwicklungsingenieure in der Industrie richtet, werden einige Spezifika festgelegt, die dieser Zielgruppe gerecht werden. Das Wichtigste ist die kompakte Darstellung der Problematik, bei der ein tragender, typischer Ansatz erklärt wird. Für sein Verständnis sind die Grundlagen der Systembeschreibung ausreichend. Es wird darauf geachtet, dass die dargestellten Prinzipien ohne weitere Literatursuche verständlich dargestellt werden, soweit es für deren Anwendung erforderlich ist. Es wird auf verbreitete Entwicklungsumgebungen wie *Matlab* und das dazu weitgehend kompatible Freeware-Paket *Octave* sowie auf die dort zuverlässig implementierten Methoden verwiesen.

Die Bedeutung der Regelung hat mit dem Einzug automatischer Funktionen in die Produktwelt enorm zugenommen. Automatische Funktionen beinhalten immer ein hohes Maß an Autonomie, und daraus wiederum ergibt sich die Notwendigkeit, nicht nur mit Unvorhergesehenem umzugehen, sondern auch zu gewährleisten, dass die Funktionsfähigkeit des Gesamtsystems in definierten Grenzen erhalten bleibt.

Die Regelung ist ein Ansatz, um Unvorhergesehenes zu beherrschen. Das Mittel, mit dem man Information über Abweichungen vom erwarteten Zustand erhält, ist die sensorische Rückkopplung. Die sensorische Information wird genutzt, um geeignete kompensatorische Maßnahmen zu ergreifen. Die Eigenschaft der Regelung, auch mit einem sich gelegentlich oder ständig verändernden System funktionstüchtig zu bleiben, wird Robustheit genannt. Jede Regelung ist bis zu einem gewissen Grad robust. Für einen gezielten Entwurf des Regelkreises ist es wichtig, diese Eigenschaft zu quantifizieren. Nur dann kann man sie mit Erwartungen über die Variabilität des zu regelnden Systems vergleichen und

entsprechende Anforderungen formulieren. Diese Quantifizierung – das Leitthema des Gebiets der *robusten Regelung* – wird nicht bei jedem Reglerentwurfsverfahren automatisch berücksichtigt.

Die Robustheit der Regelung war Gegenstand umfangreicher mathematischer Untersuchungen, z. B. [1–3]. Sie hat inzwischen einen erheblichen Reifegrad erreicht. Daher dürfte ihrem Einsatz in der industriellen Praxis nichts im Wege stehen. In der Realität ist jedoch der flächendeckende Durchbruch ausgeblieben. Die industrielle Welt wird auch weiterhin vom betagten, aus dem Jahr 1922 stammenden PID-Regler beherrscht. Seine Attraktivität durch einfache, verständliche Parametrierung ist unumstritten, ebenso wie seine Eignung, mit nicht allzu komplexen Regelstrecken gut funktionierende Regelkreise zu bilden. Bei sicherheitskritischen Anwendungen wird jedoch ein grundsätzliches Problem offenbar. Bei solchen Anwendungen ist es keine Option, sondern ein Muss, sich Gedanken zu machen, ob sie unter allen denkbaren Umständen funktionieren. Bei hoch automatisiertem Fahren, bei *Steer-by-Wire* sowie bei vielen anderen modernen automobilen Applikationen besteht eine Zertifizierungspflicht nach strengen Maßstäben (ISO-Normvorgaben nach Kriterien des Bewertungssystems ASIL, Stufe D). Es muss nachgewiesen werden, dass keine potenziell auftretenden realen Umstände (Fertigungstoleranzen der Komponenten, Fahrbahneinflüsse, Seitenwind usw.) zu einem unbeherrschbaren Zustand führen. Einen Teil der Antworten bietet die Theorie der robusten Regelung.

Unter den Entwicklungsingenieuren ist jedoch die Vorstellung verbreitet, dass es sich bei der robusten Regelung um ein mathematisch extrem anspruchsvolles Gebiet handelt. Oft kennt man aus der näheren oder fernerer Umgebung Fälle, bei denen die robuste Regelung nicht den Erwartungen entsprochen hat. Dafür sind oft zwei Hauptgründe verantwortlich. Zum einen ist der Eindruck entstanden, zu Überlegungen über die Reglerrobustheit gehöre untrennbar die entsprechende robuste Entwurfsmethode. Dazu zählt als bekanntestes Beispiel die  $H_\infty$ -Regelung („H-Infinity“ bzw. „H-unendlich“), deren Theorie tatsächlich nicht trivial ist. In Wirklichkeit kann man jedoch jede Reglerstruktur, selbstverständlich auch den PID-Regler, einer Robustheitsuntersuchung unterziehen und ihre Robustheit den Anforderungen anpassen. Zum anderen ist auch der robuste Entwurf nicht auf die  $H_\infty$ -Methode beschränkt – es geht auch deutlich einfacher. Darüber hinaus hat die Grundform der  $H_\infty$ -Methode einen stabilen Stand erreicht und ist jedermann über die entsprechende *Matlab*-Funktion zugänglich.

Um eine weitere Verbreitung der robusten Regelung zu fördern, ist das Ziel dieses Buchs, die Substanz der robusten Regelung kompakt darzustellen und damit allen Entwicklungsingenieuren mit einem gewissen Hintergrund in Regelungstheorie zugänglich zu machen. Wen die vollständige theoretische Darstellung interessiert, dem stehen heute genügend umfangreiche Monographien zur Auswahl: Ein exzellentes Beispiel ist das Werk von Skogestad und Postlethwaite [2], dessen Lektüre eine gewisse mathematische Versiertheit erfordert. Die im vorliegenden Buch vorausgesetzten Kenntnisse der Regelungstheorie umfassen hingegen nicht viel mehr als das Verständnis einer Systembeschreibung. Ein System kann durch ein Modell beschrieben werden, dessen zwei wichtigste Formen die

Zustandsdarstellung und die Darstellung als Übertragungsfunktion sind. Diese Grundlagen werden in Abschn. 2.1 erklärt.

Für die genannte Zielgruppe der Entwicklungsingenieure ist ein Aspekt besonders zu beachten: Der Entwicklungsingenieur wird in seinem anspruchsvollen Berufsleben kaum Zeit finden, eine Enzyklopädie zu studieren, die sämtliche denkbaren Fälle abdeckt. Nicht nur der schiere Umfang wird ihn daran hindern, sondern auch die Notwendigkeit, das für ihn Relevante zu selektieren und im Gesamtkontext in derartiger Tiefe zu verstehen, um es korrekt auf seinen Spezialfall anwenden zu können. Das für ihn geeignete Buch sollte also diese Auswahl bereits vornehmen und die Darstellung auf die für die Anwendung wichtigen Aspekte beschränken. Für ein solches Vorhaben muss die Abdeckungsbreite reduziert werden. Diese Reduktion kann nicht restlos objektiv sein und wird es nicht jedem recht machen können. Trotzdem wollen wir versuchen, hierfür stichhaltige Auswahlargumente zu sammeln. Die Übersicht der abgedeckten Bandbreite wird in Abschn. 2.3 gegeben. Von dieser Beschränkung sollen alle diejenigen profitieren, deren Anwendungen typisch für die industrielle Welt sind.

Die robuste Regelung kann allein mit der Kenntnis der grundlegenden mathematischen Systembeschreibung angegangen werden. Dazu ist ein Verständnis dafür wichtig, welche Eigenschaften ein Regelkreis besitzt und wie sie quantifiziert und spezifiziert werden können. Diese Eigenschaften lassen sich mit den Begriffen Robustheit und Performanz zusammenfassen und werden in Kap. 3 erklärt.

Um eine Brücke zu den sicherheitskritischen Anwendungen zu schlagen, sollte auf die Konzepte der funktionalen Sicherheit eingegangen werden. Ein Leser, der sich mit solchen Anwendungen befasst, wird darüber detailliert informiert sein. In Kap. 4 werden nur die für die Regelung wichtigen Aspekte der funktionalen Sicherheit zusammengefasst und interpretiert.

Ein zentrales Thema dieses Buchs ist die quantitative Beschreibung der Robustheit. Das Konzept wird in Kap. 5 beschrieben. Die Robustheit steht in einem bestimmten Verhältnis zur anderen wichtigen Charakteristik des Regelkreises, der Performanz. Diese beiden Eigenschaften stehen manchmal im Zielkonflikt, manchmal ergänzen sie sich gegenseitig. Diese Interaktion wird in Kap. 6 dargestellt.

Während diese beiden Charakteristiken für alle Anwendungen nützlich sind, haben andere Aspekte besonderen Bezug zur funktionalen Sicherheit. Sie werden in Kap. 7 diskutiert.

In den meisten Übersichtswerken über robuste Regelung wird von modellhaften Systemen gesprochen, d. h. Systemen, die bereits als mathematisches Modell vorliegen. Diese Modelle werden mit Hilfe verschiedener Methoden erstellt. Eine empfehlenswerte Methode ist der Abgleich mit Messdaten. Es wird also davon ausgegangen, dass aus den Messdaten zuerst ein Modell mit „ausreichender Präzision“ gewonnen wird, welches dann in die theoretischen Berechnungen einfließt. Die Präzisionsmängel werden im gesamten weiteren Vorgehen mitgeführt und können die Ergebnisse verzerren. Dabei wird oft verschwiegen oder zumindest nicht darauf hingewiesen, dass die Robustheits- und Performanzanalyse direkt auf den gemessenen Frequenzgängen basieren kann, und zwar ohne

den Genauigkeitsverlust durch die Modellanpassung. Diese Vorgehensweise wird in Kap. 8 beschrieben.

Während die Robustheits- und Performanzanalyse den Modellierungsschritt nicht erfordert, ist die Verfügbarkeit eines Regelstreckenmodells die Voraussetzung für die meisten Reglerentwurfverfahren. Wie Modelle aus den Messdaten gewonnen werden, wie ihre Qualität beurteilt werden kann und welche Konsequenzen diese Qualität für die Robustheitsanalyse hat, ist das Thema von Kap. 9.

Eine Arbeitsteilung, z. B. zwischen dem Systemlieferanten (OEM) und den Zulieferern, macht auch vor den sicherheitskritischen Anwendungen nicht Halt. Das bringt ein Problem mit sich, dessen Tragweite manchmal – zumindest in frühen Projektphasen – leicht unterschätzt wird: Wie wird die funktionale Sicherheit des Gesamtsystems durch entsprechend sichere Komponenten gewährleistet? Obwohl hierzu wegen einer unendlichen Vielfalt der möglichen Strukturen keine fertige Lösung angeboten werden kann, werden einige wichtige Aspekte in Kap. 10 zusammengetragen und an einem Beispiel erläutert.

Eine der methodischen Festlegungen in diesem Buch ist die weitgehende Verwendung der Frequenzbereichsdarstellung der Systeme und deren Eigenschaften. Diese Festlegung wird in Abschn. 2.3.4 begründet. Dennoch ist für viele Anwendungen die alternative Darstellung im Zeitbereich die natürliche Form und daher attraktiv. Für die Überlegungen zur Robustheit und Performanz ist jedoch der Frequenzbereich deutlich aussagekräftiger. Trotzdem ist ein in Kap. 11 unternommener Ausflug in die Welt der Zeitbereichsspezifikationen nützlich. Es wird gezeigt, auf welche Weise sie möglich sind, aber auch welche Nachteile diese Vorgehensweise mit sich bringt.

Die industrielle Dominanz des PID-Reglers wurde bereits oben erwähnt, genauso wie die Tatsache, dass die Robustheits- und Performanzanalysen für beliebig entstandene Regler, d. h. auch für den PID-Regler, uneingeschränkt möglich sind. Um diese Tatsache zu unterstreichen, wird sich Kap. 12 dieser populären Reglerstruktur widmen.

Die Unabhängigkeit der Robustheitsanalyse von der Reglerstruktur und -entwurfsmethode sollte nicht von der Möglichkeit ablenken, die Regler nach konkreten Robustheitsspezifikationen gezielt zu entwerfen. Bei einigen Reglerkonzepten ist das nur durch Versuch und Irrtum bzw. persönliche Erfahrung möglich. Es sind jedoch Ansätze verfügbar, bei denen der Weg von der Spezifikation zum Regler weitgehend algorithmisch abgedeckt ist. Der bekannte  $H_\infty$ -Ansatz ist die Universalmethode, jedoch nicht die einfachste Methode. Eine Alternative wird in Kap. 13 aufgezeigt.

Auch beim sorgfältigsten Reglerentwurf werden im Feldeinsatz mit hoher Wahrscheinlichkeit unerwartete Probleme auftreten. Zu den verheerendsten gehören Stabilitätsprobleme. Sie zeichnen sich manchmal durch akustische oder haptische Auffälligkeiten aus, die auch einem Laien nicht entgehen. Da sie vornehmlich bei Vorstandsvorführungen auftreten, gehören sie zu den Erlebnissen, auf die die meisten Entwicklungsingenieure gerne verzichten würden. Welche Abhilfe man bei einem solchen Verhaltensmuster ergreifen kann, wird in Kap. 14 skizziert.

In Anbetracht der Zielgruppe dieses Buchs wurden bei der Darstellung der Methoden einige Prinzipien verfolgt, die von den üblichen Gepflogenheiten bei wissenschaftlich-

technischen Werken abweichen. Obwohl der eine oder andere Entwicklungsingenieur mathematische Formeln (z. B. zugunsten von Flussdiagrammen) gerne aus seinem Blickfeld verbannen würde, ist dieses Ziel leider unerfüllbar geblieben. Es wird aber versucht, die mathematische Darstellung mit genügend Text verständlich und nachvollziehbar zu machen. Auf rigorose Theoremdarstellung wurde verzichtet – sie wird in den Literaturreferenzen zur Genüge gefunden.

Auch mit Literaturangaben wird sparsam umgegangen. Das trägt der Tatsache Rechnung, dass ein Entwicklungsingenieur kaum die Zeit und Notwendigkeit hat, die Aussagen in der Originalliteratur zu überprüfen. Falls er an weiteren Details interessiert ist, wird er sich eher an ein einziges enzyklopädisches Werk halten. Diese Rolle wurde hier dem Buch von Skogestad und Postlethwaite [2] zugewiesen – nach der Ansicht des Autors zu Recht. Hier sind alle Begriffe in ausreichender wissenschaftlicher Rigorosität erklärt und weitergehende Referenzen gegeben.

Um die Verbindung zu praktischen Berechnungen zu wahren, wurden alle Beispiele und Abbildungen mit dem Freeware-Softwarepaket *Octave* durchgerechnet und daher in einheitlicher Darstellung geplottet. *Octave* ist weitgehend mit *Matlab* kompatibel, sodass analoge Berechnungen mit *Matlab* möglich sind.

Die durchgehende Verwendung von *Octave* brachte mit sich, dass bei vielen Abbildungen voreingestellte, englische Achsbeschriftungen erscheinen, beispielsweise „Gain“ statt „Verstärkung“. Dasselbe gilt für einige Plot-Überschriften, wie „Bode Diagram“ statt „Bode-Diagramm“ oder „Singular Values“ statt „Amplitude“. Diese Schönheitsfehler werden jedoch der Verständlichkeit der Abbildungen sicherlich keinen Abbruch tun.

Um nach der Lektüre jedes Kapitels den Überblick nicht zu verlieren, wird im abschließenden Abschnitt die empfohlene Vorgehensweise des Kapitels als Abfolge der einzelnen Schritte detailliert zusammengefasst.

---

## Literatur

1. Ackermann, J.: Robuste Regelung – Analyse und Entwurf von linearen Regelungssystemen mit unsicheren physikalischen Parametern. Springer, Berlin (1993)
2. Skogestad, S., Postlethwaite, I.: Multivariable Feedback Control. Wiley, New York (2005)
3. Zhou, K., Doyle, J., Glover, K.: Robust and Optimal Control. Prentice Hall, Englewood Cliffs (1995)

---

## Zusammenfassung

Der Ausgangspunkt für die Überlegungen zur robusten Regelung ist die Beschreibung des zu regelnden Systems. Obwohl davon ausgegangen wird, dass ein Entwickler von Regelungen mit den Grundlagen der Systembeschreibung vertraut ist, werden die wichtigen Ansätze, die Zustandsraum- und die Übertragungsfunktionsdarstellung kurz zusammengefasst. Der Fokus liegt auf dem essenziellen Begriff des Frequenzgangs, der in der robusten Regelung eine tragende Rolle spielt. Für die Lösung einer Anwendungsaufgabe ist die Wahl des Detaillierungsgrads des Modells wichtig. Ein zu detailliertes hat ebenso wie ein vereinfachtes Modell Vorteile und Nachteile. Es wird gezeigt, welche Vereinfachungen durch die Linearisierung des Streckenmodells vorgenommen werden und wie sie durch Robustheit und Performanz des Regelkreises abgedeckt bzw. kompensiert werden. Eine wichtige Eigenschaft einer Regelstrecke ist ihre Stabilität. Stabile Regelstrecken überwiegen in den industriellen Anwendungen bei weitem, und deren methodische Behandlung ist deutlich einfacher als diejenige von instabilen Strecken. Damit wird der Fokus dieses Buchs auf stabile Regelstrecken begründet.

Das Ziel dieses Buchs ist die Erklärung der Konzepte robuster Regelung mit einem Instrumentarium, welches sich auf das Notwendige beschränkt. Zu diesem Instrumentarium gehören der Begriff eines Systems und seine Beschreibung. Eine ausführliche Darstellung der Systeme kann man in jedem Einführungsbuch über Regelungstechnik finden. Neben unserer Hauptreferenz, dem Buch von Skogestad und Postlethwaite [2], kann die bekannte Monografie von Föllinger [1] genannt werden, wo dieser Thematik viel Raum gewidmet wird, weshalb hier auf eine Wiederholung in größerem Umfang verzichtet wird. Was nun folgt, ist eine Übersicht der Begriffe, die in den weiteren Kapiteln verwendet

werden. In Abschn. 2.3 werden dann die Festlegungen der Methoden erklärt, die in diesem Buch fokussiert verfolgt werden, um deren Vielfalt zu reduzieren.

## 2.1 Grundlagen der Systembeschreibung

Unter einem System versteht man ein (z. B. physikalisches oder technisches) Gebilde mit einer oder mehreren Eingangsgrößen und einer oder mehreren Ausgangsgrößen (Abb. 2.1).

Eingangsgrößen (Input) sind solche, die von der Umgebung heraus auf das System, unabhängig von den systeminternen Zuständen, einwirken. Es können Größen sein, mit denen man das System gezielt manipulieren will (Stellgrößen), oder unbeabsichtigte Einflüsse (Störgrößen).

Ausgangsgrößen (Output) sind diejenigen, durch die das System auf die Umgebung wirkt oder wirken kann. Deren Auswahl ist gewissermaßen subjektiv. Oft handelt es sich um Größen, die man misst oder messen könnte. Die Entscheidung, ob man eine Messung tatsächlich durchführt oder nicht, hängt von der Anwendung ab – als Ausgangsgrößen definiert man solche, die für die Anwendung relevant sind.

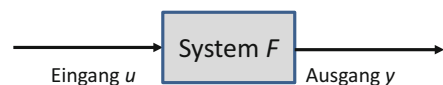
Bei gewissen Systembeschreibungen werden auch innere Zustände des Systems betrachtet (oft als Skalar oder Vektor  $x$  bezeichnet). Diese Zustände ergeben sich aus der formalen, mathematischen Beschreibung des Systems – sie repräsentieren alles, was man zur Berechnung des dynamischen Verhaltens der Ausgangsgrößen bei gegebenen Eingangsgrößen braucht.

Die analytische Beschreibung eines Systems geht typischerweise von einer Formulierung mit Differenzialgleichungen aus. So ist das Verhalten eines Feder-Dämpfer-Massen-Systems, auf welches an der Masse eine externe Kraft  $u$  (Abb. 2.2) wirkt, durch folgende Gleichung beschrieben:

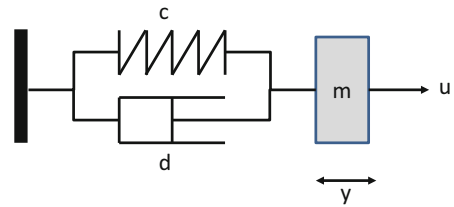
$$m\ddot{y} + d\dot{y} + cy = u \quad (2.1)$$

mit Masse  $m$ , Dämpfungskonstante  $d$  und Steifigkeitskoeffizient der Feder  $c$ . Die Dämpfungskonstante legt fest, welche Kraft entgegen der Bewegungsrichtung proportional zur Bewegungsgeschwindigkeit wirkt. Es handelt sich also um eine Art Bremskraft, die oft mit Reibungsphänomenen oder deren Linearisierungen zusammenhängt. Der Steifigkeitskoeffizient bestimmt, wie stark eine Kraft entgegen dem zurückgelegten Weg (z. B. dem Ausschlag eines Pendels), gemessen von einer Nullposition, wirkt. Die Masse beschreibt die Trägheit des Systems: Hier handelt es sich um eine zur Beschleunigung proportionale Kraft. Die Ausgangsgröße  $y$  entspricht hier der Position der Masse.

**Abb. 2.1** System  $F$  mit Eingang  $u$  und Ausgang  $y$



**Abb. 2.2** Ein Feder-Dämpfer-Massen-System



Es handelt sich um eine Differenzialgleichung 2. Ordnung, die in zwei Gleichungen 1. Ordnung umgewandelt werden kann:

$$\begin{aligned} m\dot{x}_1 + dx_1 + cx_2 &= u \\ \dot{x}_2 &= x_1 \end{aligned} \quad (2.2)$$

bzw. nach Umformung

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -\frac{d}{m}x_1 - \frac{c}{m}x_2 + \frac{1}{m}u \\ \dot{x}_2 &= x_1 \end{aligned} \quad (2.3)$$

Hier kommen bereits die inneren Zustände ins Spiel: die Position der Masse  $x_2$  sowie deren Bewegungsgeschwindigkeit  $x_1$ . Der Zustand ist gleichzeitig der Ausgang  $y$ . Diese Zuordnung ist in diesem Fall willkürlich, es hätte auch die Positionsgeschwindigkeit  $x_1$  als Ausgang gewählt werden können. Da nur die Größe  $y$  die Ausgangsgröße des Modells ist, kann das Modell in folgende Matrixform gebracht werden:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{d}{m} & -\frac{c}{m} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{m} \\ 0 \end{bmatrix} u = Ax + Bu \\ y &= [0 \ 1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + 0u = Cx + Du \end{aligned} \quad (2.4)$$

Diese Form der Systembeschreibung heißt Zustandsdarstellung, da zwischen dem Input  $u$  und dem Output  $y$  der „unsichtbare“ (da nicht gemessene) Zustand  $x$  liegt.

Die Tatsache, dass in unserem Beispiel nur einer der beiden Zustände, die Position  $x_2$ , als messbar dargestellt wurde, suggeriert die Möglichkeit, dass beide gemessen werden. In unserem Fall entspricht der andere Zustand  $x_1$  der Positionsgeschwindigkeit und wird automatisch mitgemessen. Daher wäre die Entscheidung, auch  $x_1$  zu einer Ausgangsgröße zu machen, eine reine Formsache. Die Messbarkeit der einzelnen Zustandsgrößen hängt jedoch im Allgemeinen nicht miteinander zusammen. In einem anderen Beispiel könnte es sich um Positionen von zwei verschiedenen Massen oder Komponenten handeln. Dann wäre der Ausgang  $y$  ein Vektor. Natürlich könnte auch der Eingang  $u$  ein Vektor sein. In der Zustandsdarstellung wären die Matrizen  $A$ ,  $B$ ,  $C$  und  $D$  entsprechend dimensioniert.



Die Gl. 2.1 kann auch durch die Laplace-Transformation vom Zeitbereich in den Bildbereich transformiert werden. Die Ableitung wird durch den  $s$ -Operator ersetzt (wobei wir ohne Verwechslungsgefahr die Kleinschreibung der Variablen beibehalten):

$$ms^2y + dsy + cy = u \quad (2.5)$$

Diese Gleichung kann man wie jede andere behandeln, daher lässt sich auch der Ausgang  $y$  auf einer Seite isolieren:

$$y = F(s)u = \frac{1}{ms^2 + ds + c}u \quad (2.6)$$

Hiermit ist die Funktion  $F$  beschrieben:

$$\frac{y}{u} = F(s) = \frac{1}{ms^2 + ds + c} \quad (2.7)$$

Sie ist die *Übertragungsfunktion* des Systems und wird in diesem Buch sehr häufig verwendet. Es ist daher wichtig, sich an ihren Anblick zu gewöhnen. Die unschätzbaren Vorteile dieser Darstellung werden bald offensichtlich werden.

*Octave* und *Matlab* bieten für diese Darstellung ein sehr anschauliches Mittel. Abgesehen von der Möglichkeit, mit der Funktion *tf()* die Koeffizienten des Zählers und des Nenners der Übertragungsfunktion vorzugeben, kann man den Operator  $s$  selbst als z. B.  $sx = tf(s')$  darstellen und mit ihm Übertragungsfunktionen wie Gl. 2.7 in direkter optischer Anlehnung als  $1/(m*sx^2+d*sx+c)$  abbilden.

Auch die Zustandsdarstellung eines Systems kann direkt in den Bildbereich transformiert werden. Das System von Differenzialgleichungen (zusammen mit der algebraischen Output-Gleichung)

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{aligned} \quad (2.8)$$

wird in

$$\begin{aligned} sx &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{aligned} \quad (2.9)$$

transformiert. Sie kann wie jedes Gleichungssystem nach der Variablen  $s$  aufgelöst werden:

$$\begin{aligned}
 (sI - A)x &= Bu \\
 x &= (sI - A)^{-1}Bu \\
 y &= \left( C(sI - A)^{-1}B + D \right)u
 \end{aligned}
 \tag{2.10}$$

Die Übertragungsfunktion ist dann

$$F(s) = \left( C(sI - A)^{-1}B + D \right). \tag{2.11}$$

Die Darstellungen Gl. 2.4 und 2.7 im Einzelnen sowie Gl. 2.8 und 2.11 im Allgemeinen sind als Beschreibungen eines Systemmodells vollkommen gleichwertig. Die Übertragungsfunktion bildet zusätzlich eine Brücke zu einem weiteren nützlichen Konzept, dem Frequenzgang. Den Frequenzgang zu Gl. 2.7 gewinnt man durch das Einsetzen der Frequenz  $\omega$  im Bogenmaß, multipliziert mit der imaginären Einheit für den Operator  $s$ :

$$F(i\omega) = \frac{1}{m(i\omega)^2 + d i\omega + c} = \frac{1}{m i^2 (i2\pi f)^2 + d i2\pi f + c} \tag{2.12}$$

Der zweite Ausdruck verwendet die Frequenz  $f$  in Hz.

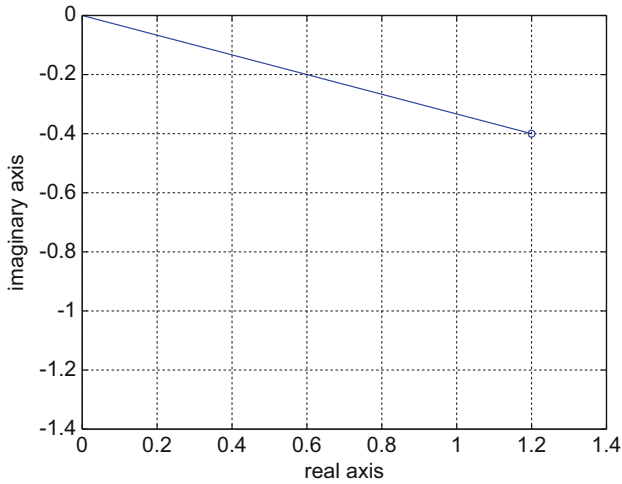
Der Frequenzgang ist stabilen Regelstrecken eindeutig zugeordnet. Er ordnet jeder Frequenz eine komplexe Zahl zu. Diese Zahl beschreibt vollständig, wie die Ausgangsgröße auf eine Sinusanregung einer Eingangsgröße reagiert. Die Reaktion der Ausgangsgröße ist bei linearen Systemen ebenfalls ein Sinusverlauf. Die Amplitude der Ausgangsgröße steht zur Amplitude der Eingangsgröße im Verhältnis des Betrags der dieser Frequenz entsprechenden komplexen Zahl.

Legen wir in unserem Feder-Dämpfer-Massen-System die Parameter auf

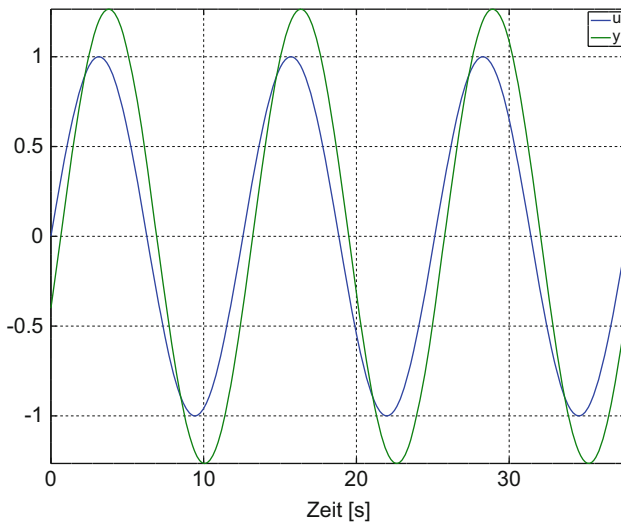
- Masse  $m = 1$ ,
- Dämpfungskoeffizient  $d = 0,5$  und
- Steifigkeitskoeffizient  $c = 1$

fest, erhalten wir für die Frequenz  $0,5$  rad/s die komplexe Zahl  $1/(-0,25 + 0,25i + 1) = 1,2 - 0,4i$ . Die grafische Darstellung zeigt Abb. 2.3. Die Länge des dargestellten Vektors entspricht dem Betrag dieser komplexen Zahl, also  $1,265$ . Er stimmt mit der Verstärkung der Strecke bei dieser Frequenz überein – die Amplitude des Sinus-Ausgangssignals ist  $1,265$ -mal größer als diejenige des Eingangssignals. Der Winkel zur X-Achse ist  $-0,32$  rad oder  $-18,4^\circ$ . Das Ausgangssignal hat also bei dieser Frequenz einen Verzug von  $18,4^\circ$  hinter dem Eingangssignal. Beide Signale sehen dann wie in Abb. 2.4 aus ( $u$ : Eingang,  $y$ : Ausgang).

Beide Informationen, Verstärkung und Phase, werden üblicherweise in Abhängigkeit von der Frequenz im bekannten Bode-Diagramm, welches in *Matlab* als Funktion *bode()*



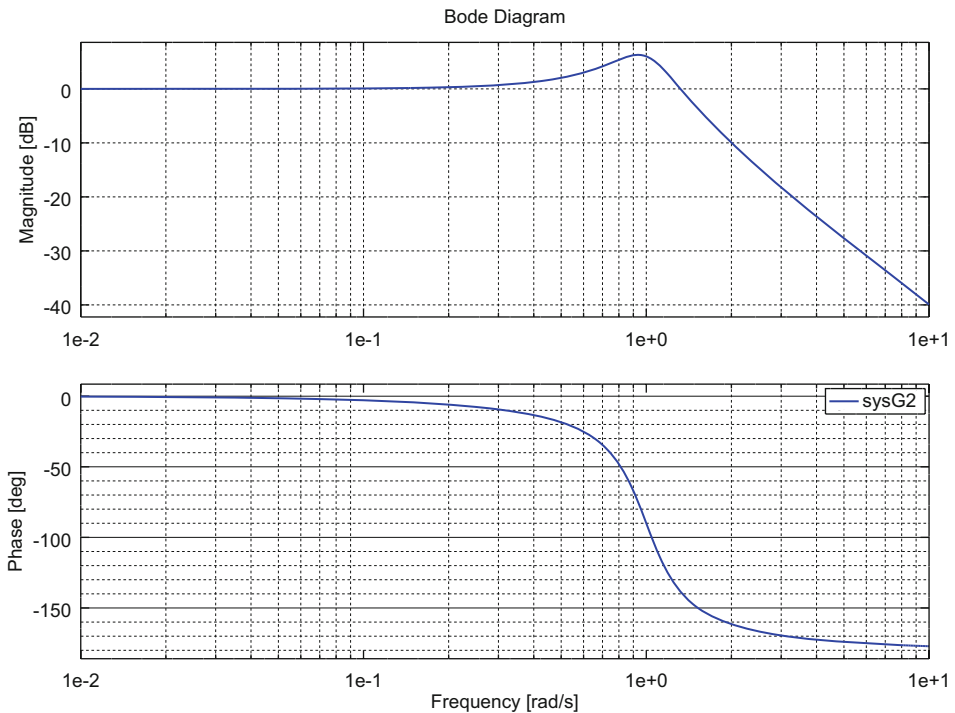
**Abb. 2.3** Übertragung des Feder-Dämpfer-Massen-Systems bei einer Frequenz von 0,5 rad/s



**Abb. 2.4** Eingangs- und Ausgangssignal (0,5 rad/s) eines Feder-Dämpfer-Massen-Systems

hinterlegt ist, dargestellt. Für das beispielhafte Feder-Dämpfer-Massen-System ist es in Abb. 2.5 gezeigt. Die Werte der Verstärkung und Phase für 0,5 rad/s sind hier abzulesen.

Bei einem mehrdimensionalen System (einem System mit mehreren Eingangs- oder Ausgangsgrößen) entspricht die Übertragung bei gegebener Frequenz einer Matrix der komplexen Zahlen mit analoger Interpretation. Jedes komplexe Matrixelement beschreibt die Amplitude und Phase der Übertragung von einer der Input-Variablen zu einer Output-Variablen.



**Abb. 2.5** Bode-Diagramm eines Feder-Dämpfer-Massen-Systems

### 2.1.1 Zeitdiskrete Systembeschreibung

Der physikalischen Beschreibung eines Systems liegt üblicherweise die Vorstellung einer kontinuierlichen Zeit zugrunde. In der kontinuierlichen Zeit ist auch der Begriff einer Ableitung verankert. Es ist die Veränderung einer Variablen in unendlich kurzer Zeit. Auf digitaler Rechentechnik implementierte Regelungen finden jedoch in einem diskreten Zeittakt statt. Die Werte einzelner Variablen werden zu diskreten Zeitpunkten gemessen, und die Stellgrößen werden zu diskreten Zeitpunkten berechnet. Aus diesen Werten können Ableitungen nur mit begrenzter Genauigkeit berechnet werden. Es gibt einige Ansätze, wie man annähernd äquivalente Darstellungen eines physikalischen Modells in kontinuierlicher und diskreter Zeit erhalten kann. Computerbasierte Entwicklungssysteme wie *Matlab* bieten hierzu eine automatische Umrechnung mit Wahl der Umrechnungsmethode. Hier sollte nur die einfachste und am leichtesten nachvollziehbare Methode erwähnt werden: die Integration nach Euler. Sie approximiert die Ableitung der Funktion  $y(t)$  im Zeitpunkt  $t$  durch folgenden Ausdruck:

$$\frac{dy(t)}{dt} = \frac{y_t - y_{t-\Delta t}}{\Delta t} \quad (2.13)$$

Es ist offensichtlich, dass durch die Verkürzung des Zeitschritts  $\Delta t$  in Richtung null der Definition einer Ableitung gefolgt würde. Für reale, endlich große Zeitschritte ist der Fehler klar erkennbar: Es handelt sich um eine Art durchschnittliche Ableitung aus dem Intervall  $\langle t-\Delta t, t \rangle$  und nicht um die Ableitung im Zeitpunkt  $t$ . Diese Approximation ist also nur bei einem kurzen Abtastschritt gut. Was „kurz“ bedeutet, hängt von den typischen Zeitmaßstäben ab, in denen das System interessante Reaktionen aufweist.

Die konkrete Ausführung der Transformation in die zeitdiskrete Form ist einfach. Die kontinuierliche Systemgleichung

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (2.14)$$

wird durch

$$\frac{x_{k+1} - x_k}{\Delta t} = Ax_k + Bu_k \quad (2.15)$$

oder äquivalent

$$x_{k+1} = x_k + \Delta t Ax_k + \Delta t Bu_k = (I + \Delta t A)x_k + \Delta t Bu_k \quad (2.16)$$

ersetzt.

Die zeitdiskrete Systembeschreibung ist also:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= (I + \Delta t A)x_k + \Delta t Bu_k \\ y_k &= Cx_k + Du_k \end{aligned} \quad (2.17)$$

Für zeitdiskrete Systeme existiert auch eine Darstellung im Bildbereich. Anstelle der Laplace-Transformation wird hier die  $z$ -Transformation verwendet. So wie der  $s$ -Operator im zeitkontinuierlichen Bereich eine Ableitung abbildet, bildet der  $z$ -Operator im zeitdiskreten Bereich einen Zeitschritt in Richtung zukünftiger Zeit ab. Eine Verzögerung um einen Zeitschritt ist entsprechend durch seinen Kehrwert  $1/z$  dargestellt. Eine numerische Approximation nach Gl. 2.15 kann also mit

$$\frac{1 - \frac{1}{z}}{\Delta t} = \frac{z - 1}{z\Delta t}$$

ausgedrückt werden.

Das Feder-Dämpfer-Massen-System aus Gl. 2.7 kann also zeitdiskret mit

$$\frac{1}{m\left(\frac{z-1}{z\Delta t}\right)^2 + d\left(\frac{z-1}{z\Delta t}\right) + c} \quad (2.18)$$

angenähert werden.

Auch für den  $z$ -Operator gibt es in *Octave* und *Matlab* eine direkte Repräsentation  $tf(z')$ . Mit Hilfe von

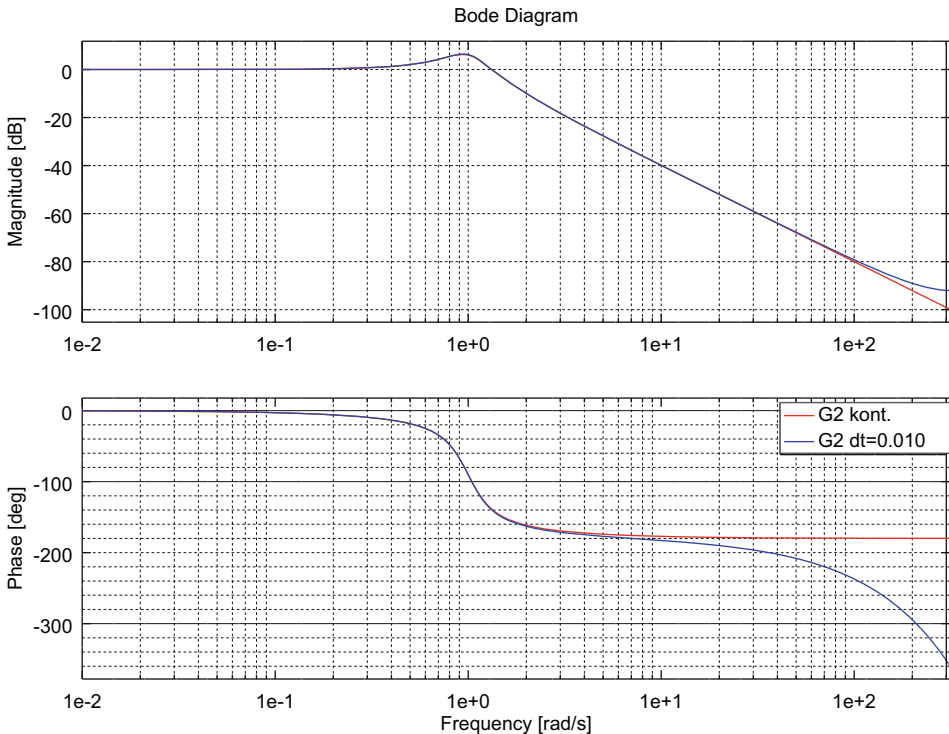
- $zx = tf(z', dt)$  und
- $dzx = ((zx-1)/(zx*dt))$

kann die Übertragungsfunktion Gl. 2.18 als  $1/(m*dzx^2+d*dzx+c)$  angelegt werden.

Aus dieser Darstellung kann, wie bei zeitkontinuierlichen Systemen, ein Frequenzgang ermittelt werden. Für den Operator  $z$  wird diesmal der Ausdruck

$$z \leftarrow e^{i\omega\Delta t} \quad (2.19)$$

mit entsprechender Frequenz eingesetzt.



**Abb. 2.6** Vergleich des zeitkontinuierlichen und zeitdiskreten Frequenzgangs des Feder-Dämpfer-Massen-Systems

Für das Feder-Dämpfer-Massen-System sieht der Frequenzgang des zeitkontinuierlichen Systems und seiner zeitdiskreten Approximation (mit Abtastschritt 0,01 s) wie in Abb. 2.6 aus. Ab einer Frequenz von 10 rad/s kann man eine Abweichung in der Phase beobachten. Ob diese Abweichung für die Anwendung nachteilig ist, muss je nach Anwendungsziel bewertet und ggf. in den Robustheitsanforderungen berücksichtigt werden.

Ein zeitdiskretes und ein zeitkontinuierliches Modell ein und derselben Regelstrecke können sich also je nach Umrechnungsmethode unterscheiden. Ein objektiver Vergleich ist jedoch immer über den Frequenzgang möglich. Es ist schwierig zu entscheiden, welches Modell das „richtige“ ist. Die reale Regelstrecke hat einen gewissen Frequenzgang, der gemessen werden kann (Kap. 8). Der Modellfrequenzgang sollte so gut wie möglich mit dem gemessenen übereinstimmen. Die Entscheidung zwischen einem zeitkontinuierlichen und einem zeitdiskreten Modell ist vor allem zweckgebunden. Zeitkontinuierliche Modelle haben einen direkten Bezug zu physikalischen Modellen, die mittels Differenzialgleichungen formuliert sind, und sind daher transparenter. Zeitdiskrete Modelle werden benötigt, falls sie zum Entwurf zeitdiskreter Regler (und das sind, genau genommen, alle digitalen Regler) verwendet werden sollen. Andererseits sind die Methoden in regelungstechnischen Softwarepaketen oft nur für den zeitkontinuierlichen Fall implementiert, und die Transformation in die diskrete Zeit erfolgt als letzter Schritt. Dieser Schritt kann in der praktischen Berechnung oft die entscheidende Ungenauigkeit bedeuten. Der Frequenzgang ist ein Verbindungsglied zwischen beiden Welten und sollte zur Kontrolle der Zwischenergebnisse immer wieder verwendet werden.

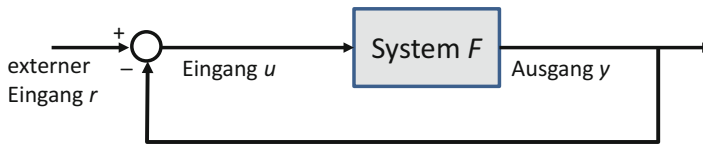
---

## 2.2 Zusammenschalten von Systemen

In der Regelung werden üblicherweise mehrere Systeme zusammenschaltet. Eine Konfiguration, mit der wir im Weiteren viel zu tun haben werden, ist die Rückkopplungsstruktur (Abb. 5.1). Strukturbilder wie dieses bieten eine anschauliche Darstellung der Verschaltung und sind daher sehr verbreitet und beliebt. Ihr Nachteil ist, dass sie zur quantitativen Analyse des Verhaltens des zusammenschalteten Systems keinen unmittelbaren Beitrag leisten. Dazu ist eine formelmäßige Erfassung der Struktur erforderlich. Die Erfassungsmethode ist sehr geradlinig. Jeder Block (wie derjenige von Abb. 2.1) wird als Gleichung

$$y_i = G_i u_i \quad (2.20)$$

beschrieben. Dabei sind  $u_i$  und  $y_i$  der Input bzw. Output dieses Blocks. Eventuelle Summations- oder Subtraktionspunkte sind in üblicher algebraischer Form (z. B.  $z_1 = y_1 + y_2$ ) zu formulieren. Wollen wir die Übertragungen zu einer bestimmten Output-Variablen berechnen, müssen alle Gleichungen des Systems mit üblichen algebraischen Methoden aufgelöst werden. Eine einfache Rückkopplungsstruktur mit einem einzigen Systemblock  $F$  ist diejenige aus Abb. 2.7.



**Abb. 2.7** Einfache Rückkopplungsstruktur

Sie enthält einen Block, dessen Übertragung durch

$$y = Fu \quad (2.21)$$

beschrieben ist. Dies sieht wie eine Gleichung mit zwei Variablen aus und ist auch eine: Dass hier die Signale  $u$  und  $y$  sowie das System  $F$  auftreten, ist kein Ausflug in die höhere Operatormathematik, sondern stellt nur die Tatsache dar, dass

- für jede gegebene Frequenz  $\omega$
- ein Sinussignal  $u$  mit einer bestimmten Amplitude und Phase
- zusammen mit einer bestimmten System-Frequenzübertragung  $F(i\omega)$  mit bestimmter Verstärkung und Phasenverschiebung
- ein Sinussignal  $y$  mit einer bestimmten Amplitude und Phase ergibt.

Es handelt sich also für jede Frequenz  $\omega$  um eine Gleichung aus drei komplexen Zahlen  $u$ ,  $y$  und  $F$ , von welchen  $F$  eine feste Konstante ist. Da die gleiche Gleichung für alle Frequenzen gilt, beschreibt sie die gesamte Übertragung des Systems.

Die negative Rückkopplung seines Ausgangs  $y$  zu seinem Eingang  $u$  geschieht über eine Summation mit einer externen Größe  $r$ :

$$u = r - y \quad (2.22)$$

Um die Übertragung dieses Schaltkreises von der externen Größe  $r$  zum Ausgang  $y$  zu erhalten, müssen die Gleichungen Gl. 2.21 und 2.22 algebraisch nach  $r$  aufgelöst werden. Das ist in diesem Fall recht einfach. Durch Einsetzen von Gl. 2.22 in Gl. 2.21 erhalten wir

$$y = Fu = F(r - y) = Fr - Fy. \quad (2.23)$$

Mit Termen aus  $y$  auf einer Seite ist es

$$y + Fy = Fr. \quad (2.24)$$

Nun kommt es darauf an, ob das System  $F$  ein Eingrößen- oder ein Mehrgrößensystem ist. Im ersteren Fall handelt es sich bei  $F$  um einen komplexen Skalar, d. h. um eine komplexe Zahl. In der skalaren Algebra ist die Lösung



$$y = \frac{F}{1+F}r. \quad (2.25)$$

Bei Mehrgrößensystemen ist  $F$  eine komplexe Matrix und  $y$  und  $r$  sind komplexe Vektoren. Die Lösung ist in diesem Fach genauso einfach:

$$y = (I + F)^{-1}Fr \quad (2.26)$$

mit entsprechend dimensionierter Einheitsmatrix  $I$ . Wichtig ist, dass hier die Multiplikation mit der Inversen von  $I+F$  von links erfolgt, da in der Matrixwelt keine Kommutativität herrscht. Diese Tatsache wird auch bei der Diskussion der Robustheit diverse Auswirkungen haben und muss daher immer im Hinterkopf behalten werden.

Trotzdem ist die Auflösung solcher Gleichungssysteme in der Regel recht einfach – in komplexeren Fällen kann man Softwarepakete für Computeralgebra heranziehen (z. B. *Maple*).

Diese einfache Vorgehensweise verdanken wird der Laplace-Transformation, die ein System differenzialer Gleichungen wie Gl. 2.8 in ein System algebraischer Gleichungen der Form Gl. 2.20 überführt.

Den Unterschied zwischen der sonst absolut gleichwertigen Behandlung im Zeit- und Bildbereich können wir anhand zweier Subsysteme illustrieren. Der Ausgang des ersten ist der Eingang des zweiten.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= A_1x_1 + B_1u_1 \\ y_1 &= C_1x_1 + D_1u_1 \\ \dot{x}_2 &= A_2x_2 + B_2u_2 \\ y_2 &= C_2x_2 + D_2u_2 \\ u_2 &= y_1 \end{aligned} \quad (2.27)$$

Nach Einsetzen erhalten wir

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= A_1x_1 + B_1u_1 \\ \dot{x}_2 &= A_2x_2 + B_2C_1x_1 + B_2D_1u_1 \\ y_2 &= C_2x_2 + D_2C_1x_1 + D_2D_1u_1 \end{aligned} \quad (2.28)$$

In Matrixform ist es

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ B_2C_1 & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2D_1 \end{bmatrix} u_1 \\ y_2 &= [D_2C_1 \quad C_2] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + D_2D_1u_1 \end{aligned} \quad (2.29)$$