John Argyris · Gunter Faust
Maria Haase · Rudolf Friedrich

Die Erforschung des Chaos

Dynamische Systeme

3. Auflage

Springer Vieweg

Die Erforschung des Chaos

John Argyris · Gunter Faust · Maria Haase
Rudolf Friedrich

Die Erforschung des Chaos

Dynamische Systeme

Aktualisierte und erweiterte 3. Auflage

Springer Vieweg

John Argyris
Stuttgart, Deutschland

Maria Haase
Stuttgart, Deutschland

Gunter Faust
Stuttgart, Deutschland

Rudolf Friedrich
Münster, Deutschland

ISBN 978-3-662-54545-4 ISBN 978-3-662-54546-1 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-662-54546-1

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Springer Vieweg

„Ursprünglich erschienen bei Vieweg, 1994“
Widmungen
Vorwort 3. Auflage
Vorwort 2. Auflage
Vorwort 1. Auflage

Einbandabbildung: Renato Vitolo, Paul Glendinning und Jason A.C. Gallas (2011), Global structure of periodicity hubs in Lyapunov phase diagrams of dissipative flows, Phys. Rev. E 84, 016216.

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier

Springer Vieweg ist Teil von Springer Nature
Die eingetragene Gesellschaft ist Springer-Verlag GmbH Deutschland
Die Anschrift der Gesellschaft ist: Heidelberger Platz 3, 14197 Berlin, Germany

Neither seeking nor avoiding mathematical exercitations
we enter into problems solely with a view to
possible usefulness for physical science

Lord Kelvin and Peter Cuthrie Tait
Treatise on Natural Philosophy, Part II

And there was war in heaven

The Revelation of St. John

Vorwort zur dritten Auflage

Mit der vorliegenden korrigierten und überarbeiteten Neuauflage kommen wir der Nachfrage nach einigen Ergänzungen zu Themen der nichtlinearen Dynamik und Chaos-Theorie entgegen, die entweder mittlerweile bereits zum klassischen Stoff gehören oder auf neueren Entwicklungen und Forschungsergebnissen beruhen. Hinzugefügt wurden unter anderem eine Einführung in die Markov-Analyse stochastischer Systeme mit Anwendungen auf turbulente Strömungen, Lyapunov-Vektoren und ihre geometrische Bedeutung bei Musterbildungsprozessen, Lagrangesche kohärente Strukturen, die in Strömungen mobile Barrieren bilden, Anwendungen in den Musikwissenschaften zur Charakterisierung der Klangqualität und Shilnikov-Bifurkationen, die zum Beispiel bei der Ausbreitung von Aktionspotentialen in Nervenzellen eine Rolle spielen.

Einige dieser Erweiterungen entsprechen den Plänen von Rudolf Friedrich, der völlig unerwartet am 16. August 2012 mitten aus dem Leben und seinen vielfältigen Forschungsarbeiten gerissen wurde und plötzlich verstarb. Sein breites Wissen, das auf einem tiefen Verständnis der Synergetik und der nichtlinearen Dynamik beruhte und das er in vielfältiger Weise in seinen interdisziplinären Forschungstätigkeiten mit großem Erfolg und Enthusiasmus einsetzte und damit Studenten und junge Forscher zu begeistern verstand, hinterläßt eine große Lücke. Wir sind ihm für seine geradlinige Art, seinen Humor, sein Engagement und seine innovativen Anregungen zu tiefstem Dank verpflichtet und hoffen, seinen Wünschen und Ideen zu Erweiterungen dieses Buchs zu entsprechen.

Ohne die großzügige Unterstützung vieler Kollegen und Freunde aus unterschiedlichen Disziplinen wäre es nicht möglich gewesen, die Erweiterungen und Ergänzungen vorzunehmen. Für die Neuauflage möchte ich mich ganz besonders bedanken bei Anton Daitche, Martin Dziobek, Andreas Haase, Svetlana Gurevich, Marion Hackenberg, Marcus Hauser, David Kleinhans, Pedro Lind, Joachim Peinke, Peter Plath, Günther Radons, Robert Stresing, Daniel H. Sugondo, Christian Uhl und Michael Wilczek. Große Unterstützung und viele wertvolle Hinweise erhielt ich von Jan Friedrich, Oliver Kamps und Bernd Lehle, denen mein ganz besonderer Dank gilt. Herzlich bedanken möchte ich mich auch bei Michael Allshouse, Rolf Bader, Jason Gallas, Yuri A. Kuznetsov, Thomas Peacock und bei Harald A. Posch für ihre wertvolle Unterstützung und Überlassung von Original-Abbildungen für diesen Band. Michael Resch, dem Leiter des HLRS danke ich für seine fortwährende großzügige Unterstützung dieser Arbeit. Mein besonderer Dank gilt Frau Birgit Kollmar-Thoni und ihrem Team beim Springer-Verlag für die Ermutigung, diese überarbeitete Neuauflage zu erstellen.

Stuttgart, Juni 2017 Maria Haase

Vorwort zur zweiten Auflage

Daß diese Einführung in die Thematik nichtlinearer Systeme und Chaos vor allem bei Studenten der Physik, Chemie, der Ingenieurs- und Wirtschaftswissenschaften solchen Zuspruch finden würde, war 1994, dem Erscheinungsjahr der ersten Auflage bei Vieweg/Wiesbaden, nicht vorhersagbar. In den vergangenen 15 Jahren hat zwar das Interesse an Chaos in den Medien und populärwissenschaftlichen Schriften nachgelassen, die grundlegenden Ideen, theoretischen Sichtweisen und Werkzeuge der nichtlinearen Dynamik haben sich jedoch unaufhaltsam in den unterschiedlichsten Zweigen der Wissenschaft, Technik und der entsprechenden Literatur ausgebreitet und gelten heute bereits als klassischer Bestandteil des Unterrichtsstoffs vieler Studiengänge. Da das Buch seit längerem vergriffen ist, haben wir uns entschieden, eine überarbeitete zweite Auflage bei Springer herauszubringen.

Nachdem Professor Argyris am 2. April 2004 im hohen Alter von fast 91 Jahren in Stuttgart verstorben ist, betrachteten wir es als unsere Verpflichtung, die Arbeit an diesem Buch im ursprünglichen Sinn fortzuführen und zu versuchen, die komplexen Inhalte der nichtlinearen Dynamik einem größeren Leserkreis möglichst anschaulich verständlich zu machen.

Dabei haben wir die Gelegenheit genutzt, um die Unterschiede zwischen rein zeitlicher und raum-zeitlicher Dynamik, zwischen Chaos und Turbulenz, zu verdeutlichen. Die ursprüngliche Hoffnung und gelegentliche Euphorie, daß man aufgrund des Verständnisses von Eigenschaften chaotischer Systeme kurz vor der Lösung des jahrhundertealten Turbulenzproblems stehen würde, haben sich nicht erfüllt. Unser Ziel war es, die Unterschiede zwischen Chaos und Turbulenz herauszuarbeiten. Zwar haben die Erklärung von Unvorhersagbarkeit und Durchmischung wesentlich zum Verständnis turbulenter Strömungen beigetragen, die grundlegenden Fragen zu vollentwickelter Turbulenz blieben jedoch ungelöst.

Durch die Erweiterung des Autorenkreises war es uns möglich, im Anschluß an Kapitel 8 *Wege zum Chaos* ein gänzlich neues anspruchsvolleres Kapitel *Turbulenz* einzufügen, in dem die Grundlagen turbulenter Strömungen, verschiedene klassische Turbulenzmodelle zusammengestellt und kritisch durchleuchtet werden. In den Ingenieurswissenschaften gibt es zwar eine Vielzahl hervorragender Monographien zum Thema Turbulenz, in diesem Kapitel werden jedoch hauptsächlich die grundlegenden Fragestellungen der Turbulenz aus Sicht der Physik dargelegt und es werden die Berührungspunkte mit Begriffen der Chaos-Theorie aufgezeigt. Um vollentwickelte Turbulenz beschreiben und untersuchen zu können, sind statistische, wahrscheinlichkeitstheoretische bzw. stochastische Methoden unerläßlich. Zum Verständnis des Turbulenzkapitels, aber auch verschiedener Methoden zur Charakterisierung chaotischen Verhaltens war es daher notwendig, in Kapitel 3 über mathematische Grundlagen zwei neue Abschnitte *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitstheorie* und *Invariantes Maß und ergodische Bahnen* einzufügen. Hierbei haben wir keine Vollständigkeit angestrebt, insbesondere verweisen wir auf die hervorragende Literatur zu stochastischen Prozessen.

Desweiteren haben wir den Abschnitt über Wege aus dem Chaos und Chaos-Kontrolle erweitert und aktualisiert. In einer kurzen Einführung haben wir die Bedeutung der Wavelet-Transformation für Zeitreihenanalysen umrissen. Erwähnt wird zudem eine neue weitreichende Methode zur Separation des deterministischen Anteils der Dynamik von dynamischem Rauschen und Meßrauschen. Ferner haben wir den Abschnitt 10.8 zur Kinetik chemischer Reaktionen an Oberflächen wesentlich überarbeitet, in der Hoffnung, dieses wichtige Anwendungsgebiet nichtlinearer Dynamik einem breiteren studentischen Leserkreis verständlicher machen zu können. Dagegen mußten wir den früheren Abschnitt 9.9 zur Himmelmechanik herausnehmen, um den Umfang des Buches nicht zu sprengen. Mittlerweile sind viele interessante und praxisrelevante Beispiele chaotischen Verhaltens und nichtlinearer Dynamik untersucht worden, die mühelos einen weiteren Band füllen könnten. In allen Kapiteln haben wir uns bemüht, die für das Buch relevanten Literaturhinweise zu ergänzen und auf den neuesten Stand zu bringen, bei der Vielzahl von Veröffentlichungen ein fast unmögliches Unterfangen. Wir bitten daher, die Unvollständigkeit der Referenzen zu entschuldigen.

Ohne die tatkäftige Unterstützung vieler Freunde und Kollegen aus den Bereichen der Physik, Biophysik, Informatik und Chemie etc., wäre es nicht möglich gewesen, die überarbeitete zweite Auflage fertigzustellen. Bei der Umsetzung der ursprünglichen KETEX-Version in LaTeX sowie bei der Erzeugung bzw. Wiederherstellung von Abbildungen durch Anwendung des Programmsystems AnT 4.669 bekamen wir aktive professionelle Hilfe. In vielen Diskussionen und beim Korrekturlesen einiger Kapitel erhielten wir wertvolle Hinweise für Verbesserungen und Ergänzungen. Bei allen, die uns bei dieser Arbeit unentwegt und gewissenhaft unterstützt haben, möchten wir uns herzlich bedanken, insbesondere bei Viktor Avrutin, Inna Avrutina, Anton Daitche, Martin Dziobek, Markus Eiswirth, Elena Flemming, Jason Gallas, Marcus Hauser, Oliver Kamps, David Kleinhans, Pedro Lind, Joachim Peinke, Peter Plath, Günter Radons, Michael Schanz, Robert Stresing, Judith Vogelsang, Georg Wackenhut und Michael Wilczek. Wir bedanken uns ferner für die wohlwollende Unterstützung des Leiters des HLRS, Herrn Michael Resch, und die finanzielle Hilfe durch die Argyris-Stiftung, ohne die dieses Werk niemals hätte fertiggestellt werden können. Ganz besonders herzlich möchten wir uns für exzellente Kooperation mit Mitgliedern der Springer-Verlags, insbesondere für die Geduld und aufmunternde Unterstützung von Thomas Ditzinger, bedanken, der uns zu einer überarbeiteten Neuauflage des Buches ermutigte. Mit allen verbindet uns ein aufrichtiges Dankeschön.

Stuttgart, Juni 2009 G. Faust, M. Haase, R. Friedrich

Vorwort zur ersten Auflage

Chaos often breeds life,
when order breeds habit

Henry Brooks Adams, 1838-1918
Education of Henry Adams, 1907

Prolog

Es war unser Wunsch, mit diesem Band ein einführendes Lehrbuch in die Theorie des Chaos zu präsentieren. Wir wenden uns an Physiker und Ingenieure, die sich im Rahmen von nichtlinearen deterministischen Systemen mit dieser neuen, aufregenden Wissenschaft vertraut machen wollen. Bei einem solchen Lehrbuch ist die Mathematik selbstverständlich ein unerläßliches Werkzeug; wir haben es deshalb nicht unterlassen, auch komplexe mathematische Probleme anzusprechen, auch wenn wir es – aufgrund unseres Werdegangs und unserer philosophischen Einstellung – im allgemeinen vorziehen, die Aufmerksamkeit des Lesers auf ein physikalisches Verständnis der Phänomene zu lenken.

Wir sind uns natürlich darüber im klaren, daß in den letzten Jahren eine ganze Reihe von hervorragenden Lehrbüchern erschienen ist, die sich mit der Chaostheorie beschäftigen. Insbesondere möchten wir auf die Abhandlungen von Moon, Thompson & Stewart, Kreuzer, Bergé, Pomeau & Vidal, Schuster und Nicolis & Prigogine verweisen, um nur sechs Textbücher zu erwähnen, die nicht die Mathematik in den Vordergrund stellen. Das ausgezeichnete Buch von F. C. Moon, dem schon bald eine stark erweiterte Neuauflage folgen wird, behandelt in erster Linie experimentelle Methoden und gibt einen Einblick in die chaotische Antwort mechanischer Systeme. Das Buch von J. M. T. Thompson und H. B. Stewart ist erwartungsgemäß in einem brillanten Stil geschrieben und richtet sein Hauptaugenmerk auf eine breite Übersicht über chaotische Phänomene, wie sie in mechanischen Systemen und in der Strukturmechanik auftreten, behandelt jedoch am Rande auch Themen wie die Rayleigh-Bénard-Konvektion und das System der Lorenz-Gleichungen. E. Kreuzers kompakte Darstellung, die sich auf einen soliden mathematischen Hintergrund stützt, beschäftigt sich mit Schwingungen mechanischer Systeme und vermittelt eine gründliche Kenntnis des Verhaltens nichtlinearer Systeme. Das Buch von P. Bergé, Y. Pomeau und C. Vidal enthält unter anderem eine umfassende Beschreibung der einzelnen Übergänge ins Chaos und ihrer experimentellen Verifikation am Beispiel der Rayleigh-Bénard-Konvektion. Die Monographie von H. G. Schuster gibt einen hervorragenden Überblick über chaotische Phänomene in nichtlinearen physikalischen Systemen und richtet sich mit seiner präzisen und komprimierten Darstellungsweise vorwiegend an fortgeschrittene theoretische Physiker. Als letztes führen wir das Buch von G. Nicolis und I. Prigogine an, das eine profunde und anschauliche Darstellung der Dynamik nichtlinearer Systeme, die sich fern vom thermodynamischen Gleichgewicht befinden, vermittelt. Hervorheben möchten wir überdies die Monographien von Hermann Haken zur Synergetik, die sich – in mathematisch anspruchsvoller Weise – mit der systematischen Erforschung von Strukturbildungen in offenen dissipativen Systemen beschäftigen.

Im vorliegenden Band haben wir uns bemüht, nicht nur die allgemeine Theorie möglichst weitgehend zu erläutern, sondern auch ein breites Spektrum von Problemen anzusprechen, wie die Stömungsmechanik, insbesondere die Rayleigh-Bénard-Konvektion, Biomechanik, Astronomie, physikalische Chemie sowie eine Reihe weiterer mechanischer und elektrischer Systeme, die durch die Duffing- bzw. durch die van der Polsche Gleichung modelliert werden können; Kapitel 1 enthält eine genauere Beschreibung der einzelnen Themen. Wir hoffen, daß diese Darstellung von Nutzen sein wird, die komplexe Theorie des Chaos zu verstehen und anzuwenden.

Die erste bewußte Wahrnehmung chaotischer Phänomene in der Meteorologie durch Edward N. Lorenz im Jahre 1963 hat in kurzer Zeit eine philosophische Neuausrichtung der Naturwissenschaften bewirkt. Wir Wissenschaftler, im Banne der erhabenen Prinzipien der Mechanik, die durch Kepler und Newton erstellt wurden, waren durch diese unbewußt über Jahrhunderte hinweg so beeinflußt, daß wir nur reguläre Bewegungen, sei es linearer oder nichtlinearer Natur, erkennen konnten und damit nicht fähig waren, irreguläre Phänomene wahrzunehmen. Selbstverständlich muß man feststellen, daß Henri Poincaré schon um die Jahrhundertwende in seinen klassischen Schriften auf die Möglichkeit irregulären Verhaltens in deterministischen Systemen hingewiesen hatte, was aber ohne die uns heute zur Verfügung stehenden Computer nicht direkt registriert werden konnte. Daher waren wir nicht in der Lage - bei aller Anerkennung der großartigen Beiträge eines Osborne Reynolds - das Mysterium der Turbulenz in einer Strömung oder in der Atmosphäre und in den Ozeanen zu entschlüsseln und somit Irregularitäten von Naturerscheinungen zu verstehen. In diesem Sinne war die Forschung über drei Jahrhunderte hinweg unbewußt auf Regelmäßigkeit ausgerichtet.

Die epochemachende Entdeckung von Lorenz führte eine Gruppe junger Wissenschaftler in Europa und den USA dazu, den Versuch zu unternehmen, Irregularitäten nicht nur anhand von Zeitverläufen zu registrieren, sondern auch zu erklären. Diese Denker, Physiker und Mathematiker, Biologen und Chemiker, waren in dem Wunsch vereint, Gemeinsamkeiten in den Unordnungen unterschiedlichster Systeme der belebten und unbelebten Natur aufzuspüren. Diese Unregelmäßigkeiten finden wir einerseits in der Dynamik des Herzschlags und den explosiven Veränderungen der Population gewisser Tierarten und andererseits in der Turbulenz einer Strömung und der erratischen Bewegung der Sternschnuppen. Auch Ökonomen wurden angeregt, die Möglichkeit irregulärer Ausbrüche von Finanzsystemen zu erforschen. Alle diese Erscheinungen, aber auch eine Vielzahl anderer Phänomene wie zum Beispiel die zufälligen Verästelungen eines Blitzes wurden mit Neugierde betrachtet und analysiert.

Selbstverständlich haben zugleich Mathematiker wie Vladimir Igorevich Arnol'd neue grundlegende Erkenntnisse über lokale und globale Bifurkationen in der nichtlinearen Dynamik beigesteuert. Damit war es unvermeidlich, daß Naturwissenschaftler die Arbeiten von Poincaré mit tieferem Verständnis und Bewunderung wieder aufgegriffen haben. All diese Anstrengungen wären jedoch weder vorstellbar noch realisierbar gewesen ohne die wissenschaftliche und technische Revolution, die einige Jahre nach dem Zweiten Weltkrieg durch das explosive Anwachsen der Verfügbarkeit und Kapazität digitaler Computer ausgelöst wurde.

Ein Jahrzehnt später, Mitte der siebziger Jahre, war die Gruppe der an Chaos arbeitenden Forscher zu einer exponentiell wachsenden Gemeinde geworden, die *nolens volens* das Bild der modernen Wissenschaft veränderte. Heute haben wir einen Zustand erreicht, daß sich Wissenschaftler an fast jeder größeren Universität von wissenschaftlichem Ruf mit den Erscheinungen des Chaos beschäftigen. Zum Beispiel wurde in Los Alamos ein spezielles Zentrum zur Untersuchung nichtlinearer Systeme eingerichtet, an dem die Arbeiten über Chaos und verwandte Erscheinungen koordiniert werden.

Die Erforschung des Chaos führte unausweichlich auch zur Entstehung neuer, weiterführender Methoden der Anwendung von Computern und der verbesserten graphischen Möglichkeiten moderner Hardware. Dadurch können wir heute Bilder filigraner, beeindruckender Strukturen studieren, die eine unerwartete Komplexität aufweisen. Diese neue Wissenschaft beinhaltet die Untersuchung von Fraktalen, Bifurkationen, Periodizitäten und Intermittenzen. All diese Erscheinungen führen zu einem neuen Verständnis des Begriffs Bewegung. In allen Beobachtungen unserer Welt entdecken wir jetzt immer wieder Erscheinungen des Chaos, wie zum Beispiel im zitternd aufsteigenden Rauch einer Zigarette, der plötzlich in wilde Unordnung ausbricht. Ähnliche Phänomene entdeckt man bei der Betrachtung des komplexen Verhaltens einer Fahne, die im Wind hin und her flattert und knattert. Bei der Beobachtung eines tropfenden Wasserhahns stellen wir einen Übergang von stetigem zu zufälligem Verhalten fest.

Daß der Begriff des Chaos heute als selbstverständlich betrachtet wird, verdanken wir, wie schon erwähnt, den bahnbrechenden Entdeckungen von Edward N. Lorenz, der chaotische Entwicklungen als solche begriff und ein vereinfachtes Modell für chaotische Erscheinungen im Wettergeschehen entwickelte. Gleichzeitig entdeckte er in seinem Wettermodell die extreme Abhängigkeit des Systems von kleinen Änderungen in den Anfangsbedingungen und erwähnte als erster den sogenannten Schmetterlingseffekt. Chaos ist auch im Verhalten eines Flugzeugs latent enthalten und tritt *inter alia* in Form von turbulenten Grenzschichten und Ablösungseffekten auf. Ein weiteres Beispiel chaotischen Verhaltens kann man auf Autobahnen beobachten, wenn es durch einen dichten Strom von Fahrzeugen zu Staus und Verstopfungen kommt. Gleichgültig in welchem Medium chaotische Ausbrüche stattfinden, stets unterliegt das Verhalten gewissen allgemeinen Gesetzen. Um das breite Spektrum chaotischer Erscheinungen zu verdeutlichen, werden wir im letzten Abschnitt des Buchs von chaotischen Phänomenen in unserem Sonnensystem berichten; insbesondere werden wir die praktisch mit Sicherheit als chaotisch geltende Bewegung des Saturnmondes Hyperion diskutieren.

Unsere einführenden Bemerkungen sollen verdeutlichen, daß das Chaos auf den meisten Gebieten der modernen Forschung Probleme aufwirft, die nicht in die traditionellen Muster wissenschaftlichen Denkens passen. Andererseits versetzen uns die phantasievollen Untersuchungen des Chaos in die Lage, die grundlegenden Gesetzmäßigkeiten im Verhalten nichtlinearer komplexer Systeme aufzuspüren. Die ersten Chaosforscher, die diesen Wissenszweig ins Leben riefen, waren durch gewisse

Phänomene beeindruckt. Zum Beispiel waren sie fasziniert von Mustern, insbesondere von solchen, die sich gleichzeitig in verschiedenen Maßstäben entwickeln und dabei immer wiederholen. Für diese Forscher wurden ausgefallene Fragen, wie beispielsweise die nach der Länge der zerklüfteten Küste von Großbritannien, Teil ihrer grundlegenden Betrachtungen. Diese ersten Chaosforscher konnten erfolgreich die Entwicklung komplexer Strukturen deuten und das Auftreten von abrupten und unerwarteten Sprüngen im Systemverhalten erklären. Unausweichlich begannen diese Wegbereiter der Chaostheorie damit, über Determinismus und freien Willen sowie die Natur der bewußten Intelligenz zu spekulieren.

Die Vorreiter der neuen Wissenschaft behaupteten und behaupten noch heute, daß sich die Wissenschaft des zwanzigsten Jahrhunderts durch drei große wissenschaftliche und philosophische Konzepte auszeichnen wird: die Relativitätstheorie, die Quantenmechanik und die Chaostheorie. Wir gehen noch einen Schritt weiter und meinen, daß die Untersuchung des Chaos die Richtung wissenschaftlicher Forschung im 21. Jahrhundert bestimmen und die weitere Entwicklung der Physik, Mechanik und auch der Chemie entscheidend formen wird; dies wird natürlich auch die Technik beeinflussen. Daher sind die Vertreter der neuen Wissenschaft auch davon überzeugt, daß die Theorie des Chaos das bisherige Verständnis der Newtonschen Physik erschüttert. Ein bedeutender Physiker formulierte es so: Die Relativitätstheorie zerstörte die Newtonsche Illusion des absoluten Raums und der absoluten Zeit; die Quantentheorie zerstörte den Newtonschen Traum von einem beliebig genauen Meßvorgang; schließlich zerstörte das Chaos die Laplacesche Vorstellung (oder den Wunschtraum) einer deterministischen Vorhersagbarkeit. Von diesen drei wissenschaftliche Revolutionen betrifft das Chaos das gesamte Universum, wie wir es verstehen und beobachten; es beeinflußt uns auch durch Erscheinungen in einem menschlichen Maßstab.

Bei Betrachtung der brillanten Erkenntnisse vieler großer Physiker in der Vergangenheit müssen wir uns fragen, wie dieses Gebäude der Physik über so viele Jahre mit derartigem Erfolg entwickelt werden konnte, ohne daß Erklärungen zu einigen der fundamentalsten Fragen der Natur gegeben werden konnten. Wie entsteht das Leben und was ist das Geheimnis der Turbulenz? Wie kann sich in einem Universum, das von der Entropie bestimmt wird und das sich unausweichlich zu immer größerer Unordnung hin entwickelt, Ordnung ausbilden? Überdies wurden viele Vorgänge des täglichen Lebens – wie die Dynamik von Flüssigkeiten und nichtlinearen mechanischen Systemen – als so gewöhnlich betrachtet, daß die Physiker annahmen, diese seien gut verstanden, zumindest von den Ingenieuren. Bis vor ungefähr dreißig Jahren lag der Grund für unser Unverständnis solcher Systeme darin, daß weder Computer noch graphische Anlagen verfügbar waren. In der Zwischenzeit haben uns experimentelle und numerische Berechnungen gezeigt, daß unsere Unwissenheit tatsächlich sehr groß war. Innerhalb der Gedankenwelt der Physik entwickelte sich damit die Chaosforschung zu einer Wegbereiterin neuer Einsichten und Perspektiven. Solche Gedanken haben wohl auch Edward N. Lorenz 1963 bewegt und ihn zu der Erkenntnis geführt, daß das Wetter über längere Zeiträume unvorhersagbar ist.

Da sich die Revolution des Chaos zu einer Folge immer neuer Überraschungen entwickelt, empfinden es heute führende Physiker als ganz natürlich, sich ohne Verlegenheit wieder den Problemen, die im Zusammenhang mit unserer menschlichen Natur stehen, zuzuwenden. Sie finden es genauso interessant, Wolkenbildungen zu untersuchen wie die Evolution von Galaxien. Führende Zeitschriften veröffentlichen heute Artikel über die erstaunliche Dynamik eines auf einem Tisch hüpfenden Balls genauso wie solche über ausgefallene quantenmechanische Probleme. Selbst die einfachsten nichtlinearen Systeme – und praktisch alle Systeme in der Realität sind nichtlinear – erzeugen extrem schwierige Probleme der Voraussagbarkeit; dabei kann Ordnung plötzlich an die Stelle von Chaos treten und umgekehrt, und wir beobachten, daß in den meisten Systemen Ordnung und Chaos dicht beieinander liegen. Wir betrachten eine neue Art der Wissenschaft, von der wir einen Brückenschlag erwarten zwischen dem, was wir vom Verhalten eines einzelnen physikalischen Teilchens, wie z. B. eines Wassermoleküls oder einer einzelnen Zelle des Herzens, wissen, und dem, was eine Ansammlung von Millionen von ihnen in Synergie bewirken kann. Dieser Thematik hat sich besonders Hermann Haken gewidmet.

In der Vergangenheit haben die Physiker üblicherweise aus komplexen Beobachtungen Hypothesen über komplexe Ursachen abgeleitet. Aus der Beobachtung eines zufälligen Zusammenhangs zwischen dem Einfluß auf ein System und der System-Antwort darauf schlossen sie, daß sie in eine realistische Theorie den Zufall durch Berücksichtigung von Rauschen oder Meßfehlern miteinbeziehen müßten. Im Gegensatz dazu entstand die moderne Chaosforschung durch eine Erkenntnis der frühen sechziger Jahre, daß nämlich ganz einfache nichtlineare, deterministische Gleichungen zu ebenso überraschenden Ergebnissen, wie etwa denen der faszinierenden Turbulenz eines Wasserfalls, führen können. Kleine Unterschiede in den Anfangsbedingungen werden schnell verstärkt und bewirken große Unterschiede im Endzustand. Wir verdanken es Lorenz, daß wir dieses Phänomen heute mit einer extrem empfindlichen Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen verknüpfen. Beim klassischen Beispiel des Wetters zeigen sich solche Effekte durch den Schmetterlingseffekt: Ein Schmetterling, der in Beijing die Luft bewegt, könnte einen Monat später in New York stürmisches Wetter auslösen.

Wir beenden den Prolog mit fünf kurzen historischen Rückblenden auf die Arbeiten einiger Wissenschaftler, die die Entwicklung der Chaostheorie wesentlich stimuliert haben:

i. Edward Lorenz war der erste Wissenschaftler, der durch numerische Computerexperimente das Wesen des Chaos erkannte. Er arbeitete 1961 als Meteorologe am MIT an einem noch sehr primitiven Computer, der unter dem beeindruckenden Namen Royal McBee bekannt war. Er wählte das einfache Modell einer Rayleigh-Bénard-Konvektion in einer durch einen Temperaturgradienten in Bewegung gesetzten Luftschicht und versuchte, dessen komplexe Reaktion durch ein relativ einfaches System von drei nichtlinearen gewöhnlichen Differentialgleichungen darzustellen. An diesem Modell hoffte er, die Probleme der Wettervorhersage untersuchen zu können. Auf einem primitiven Drucker stellte er ein Diagramm der Windrichtung und -geschwindigkeit her. Auf diese Weise machte er die bahnbrechende Entdeckung, daß schon die kleinsten Unterschiede in den Anfangsbedingungen zu unterschiedlichen Verläufen und Mustern führen können, die so weit auseinanderstreben, bis keine Ähnlichkeit mehr vorhanden ist. Dies war der Schlüssel zum Schmetterlingseffekt und letztendlich zur Erkenntnis, daß es prinzipiell unmöglich ist, das Wetter über längere Zeit vorherzusagen. Lorenz' Entdeckungen waren umwälzend und lösten die Suche nach der Natur des Chaos aus. Er entdeckte auch den entsprechenden seltsamen Attraktor, benannte ihn jedoch nicht so. Das Werk von Edward Lorenz und dessen Einfluß auf die Wissenschaft läßt sich durch ein Zitat aus dem Neuen Testament plastisch vor Augen führen:

Ἰδοὺ ἡλίκον πῦρ ἡλίκην ὕλην ἀνάπτειν
Καινὴ διαθήκη, Ἐπιστολὴ Ἰακώβου iii, 5

Siehe, ein kleines Feuer, welch einen Wald zündet's an!
Brief des Jakobus , *iii*, 5

ii. Mitchell Feigenbaum trat 1974 in das Los Alamos National Laboratory ein. Er war mit der Überzeugung nach Los Alamos gekommen, daß nichtlineare Probleme praktisch noch völlig unverstanden seien. Eine seiner ersten Untersuchungen betraf eine elementare quadratische Rekursionsvorschrift, die logistische Abbildung, die von einem einzigen Parameter abhängt. Er entdeckte, daß dieses einfache mathematische System nicht nur die erwarteten stabilen Gleichgewichtszustände erzeugt, sondern auch – über eine Kaskade von Bifurkationen – periodische und ebenso doppelt oder noch höher periodische Zustände, bis schließlich jenseits eines bestimmten Parameterwertes sogar chaotische Erscheinungen auftraten. Dieses Chaos wird jedoch wieder von Fenstern mit regulärem Verhalten unterbrochen. Feigenbaum ging noch einen Schritt weiter und wies die Universalität seiner Entdeckungen nach, die mit einer überraschenden Ähnlichkeit auch auf andere und komplexere mathematische Ausdrücke zutreffen.

iii. Als nächstes betrachten wir die Schwerpunkte der Arbeiten von Benoit Mandelbrot, insbesondere die sogenannte Mandelbrot-Menge. Diese Menge gehört zu den kompliziertesten theoretischen Objekten, die es in der Mathematik gibt. Mandelbrot begann seine Suche 1979 mit der Verallgemeinerung einer bestimmten Klasse von Strukturen, die unter dem Namen Julia-Mengen bekannt sind; diese wurden von den beiden französischen Mathematikern Gaston Julia und Pierre Fatou während des ersten Weltkriegs untersucht. Der französische Mathematiker Adrien Douady beschrieb die Julia-Mengen folgendermaßen: „ Man erhält eine unglaubliche Anzahl von Julia-Mengen: manche sehen aus wie dicke Wolken, andere wie ein dürrer Dornbusch, wieder andere sehen aus wie Funken, die sich bei einem Feuerwerk durch die Luft schlängeln. Einer sieht aus wie ein Hase, während viele von ihnen einen Schwanz wie ein Seepferdchen haben."

Im Jahre 1979 gelang Mandelbrot eine Darstellung der Mandelbrot-Menge in der komplexen Ebene, die man als Atlas oder Katalog aller Julia-Mengen betrachten kann. Wissenschaftler wie Julia, Fatou, Hubbard, Barnsley und Mandelbrot entdeckten Regeln, wie man neue, außergewöhnliche geometrische Formen – die man heute *Fraktale* nennt – konstruieren kann, die dem Prinzip der Selbstähnlichkeit unterliegen. Es entstehen seltsame, ätherische Bilder von großer Schönheit, die mit abgetrennten, einsamen Inseln übersät zu sein scheinen und die das Bild eines von unserem völlig verschiedenen Kosmos vermitteln. Die Konstruktionsregeln sagen uns dabei, wie wir aus einem Bild mit einem bestimmten Maßstab das entsprechende Bild auf der nächsten Stufe der Vergrößerung – wie es unter dem Mikroskop erscheinen würde – ableiten können. Die beiden Mathematiker Douady und Hubbard bewiesen mit Hilfe subtiler Mathematik, daß die oben erwähnten verstreuten Moleküle in Wirklichkeit über ein feines Gespinst mit dem Hauptgebiet verbunden sind. Es ist interessant, daß Peitgen und Richter – der eine Mathematiker, der andere Physiker – ihre wissenschaftliche Arbeit der Verbreitung und Computerdarstellung von Mandelbrot-Mengen und deren Präsentation als neue Philosophie der Kunst gewidmet haben.

iv. Ein weiteres wichtiges Forschungsgebiet in der Chaostheorie ist die Untersuchung und Klassifikation von Attraktoren, von denen Trajektorien im Phasenraum angezogen werden. Beispielsweise stellt ein Fixpunkt oder ein Grenzzyklus im Phasenraum einen solchen Attraktor dar. Diese Art von Problemen – diesmal im Zusammenhang mit dem Rätsel der turbulenten Strömung – zog in den siebziger Jahren die Aufmerksamkeit der beiden Mathematiker David Ruelle und Floris Takens auf sich. Erstaunlicherweise kannten sie die bahnbrechenden Erkenntnisse von Edward Lorenz aus dem Jahr 1963 und seine Präsentation des bis dahin unbenannten seltsamen Attraktors nicht. Ruelle und Takens wollten die Vermutung von Landau überprüfen, daß Turbulenz durch eine unendliche Reihe von Hopf-Bifurkationen entsteht. Mit Hilfe einer anspruchsvollen mathematischen Argumentation in Verbindung mit Poincaré-Schnitten bewiesen sie, daß Landaus Vermutung falsch sein mußte, da sein Entwurf weder die Dehnung und Faltung der Trajektorien im Phasenraum noch eine starke Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen ergeben konnte, obwohl diese charakteristischen Eigenschaften bei einem turbulenten Übergang erwartet werden müßten. Darüber hinaus konstruierten die Autoren den ersten seltsamen Attraktor und benannten ihn auch entsprechend.

v. Schließlich folgen noch einige Anmerkungen zu einem weiteren aufregenden Gebiet, nämlich das der Dimension von fraktalen Mengen. In gewisser Weise entspricht die Dimensionalität solcher Gebilde ihrer Fähigkeit, Raum einzunehmen. So füllt eine eindimensionale gerade Linie weder Raum noch Fläche. Eine Koch-Kurve – eine Art idealisierter Schneeflocke – jedoch, die durch ein fraktales Konstruktionsprinzip bestimmt wird und die zwar eine unendliche Länge besitzt, aber nur eine endliche Fläche einschließt, hat keine ganzzahlige Dimension. Ihre Dimension ist größer als die Dimension 1 einer Linie, aber kleiner als die Dimension 2 einer Fläche. Mandelbrot bestimmte die fraktale Dimension dieser Kurve zu 1.2618.

Das Konzept der Dimension, wie es heute durch eine Anzahl unterschiedlicher Definitionen ausgedrückt wird, hat Eingang in die Physik und die Theorie nichtlinearer

Systeme gefunden. Wir wissen nun, daß z.B. der seltsame Attraktor von Lorenz die Dimension 2.06 hat. Nichtganzzahlige Dimensionen gehören heute zu den wesentlichen Begriffen der Chaostheorie. Sie werden auch von Geophysikern verwendet, die z. B. die unendlich komplizierte Struktur der Erdoberfläche beschreiben wollen. Diese und viele andere Entwicklungen bewirkten die Akzeptanz dieser fraktalen Geometrie als Werkzeug zur Lösung von Problemen.

Bevor wir zum Ende des Prologs kommen, wollen wir unsere Aufmerksamkeit und Bewunderung einem der größten Wissenschaftler seines Jahrhunderts zuteil werden lassen: Henri Poincaré, der mit großem Erfolg topologische, quantitative Methoden für die Behandlung dynamischer Systeme einsetzte. Zur Zeit der Jahrhundertwende war Poincaré wohl der letzte große Mathematiker, der geometrische Vorstellungen auf die Bewegungsgesetze der physikalischen Welt anwendete. Er war der erste, der das mathematische Konzept des Chaos vorausahnte. Seine Schriften, insbesondere sein monumentales Werk *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*, enthalten einen deutlichen Hinweis auf eine Art von Unvorhersagbarkeit, fast genauso deutlich wie die, die Lorenz entdeckte. Er war einer der brillantesten Wissenschaftler seines Jahrhunderts. Nach seinem Tod blühte die Topologie auf, während die moderne Theorie der dynamischen Systeme in der Welt der Physiker in den Hintergrund geriet. Mit dieser Verbeugung vor einem genialen und erfinderischen Geist beenden wir unseren Prolog.

Stuttgart, Oktober 1993 *John Argyris*

Inhaltsverzeichnis

Vorwort IX

1 Einführung 1

2 Hintergrund und Motivation 15
2.1 Kausalität – Determinismus 16
2.2 Dynamische Systeme – Beispiele 24
2.3 Phasenraum 31
2.4 Erste Integrale und Mannigfaltigkeiten 33
2.5 Qualitative und quantitative Betrachtungsweise 38

3 Mathematische Einführung in dynamische Systeme 39
3.1 Lineare autonome Systeme 39
3.2 Nichtlineare Systeme und Stabilität 51
3.3 Invariante Mannigfaltigkeiten 58
3.4 Diskretisierung in der Zeit 60
3.5 Poincaré-Abbildung 62
3.6 Fixpunkte und Zyklen diskreter Systeme 64
3.7 Ein Beispiel diskreter Dynamik – die logistische Abbildung 68
3.8 Fourier-Reihe und Fourier-Integral 75
3.8.1 Fourier-Reihe 75
3.8.2 Fourier-Integral und Fourier-Transformation 79
3.8.3 Eigenschaften der Fourier-Transformation 81
3.8.4 Einfache Fourier-Transformationen, Linienspektren, Diracs δ-Funktion 85
3.8.5 Wavelet-Transformation 89
3.9 Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitstheorie 92
3.9.1 Zufallsexperiment 94
3.9.2 Zufallsvariable 96
3.9.3 Wahrscheinlichkeit 97
3.9.4 Bedingte Wahrscheinlichkeit und Verbundwahrscheinlichkeit 102
3.9.5 Verteilungsfunktion und Wahrscheinlichkeitsdichte 104
3.9.6 Maßzahlen einer Verteilung 108
3.9.7 Unabhängige und abhängige Ereignisse 111
3.9.8 Momenterzeugende und charakteristische Funktion 113
3.9.9 Spezielle Verteilungen 116
3.9.10 Zentraler Grenzwertsatz 124
3.9.11 Cauchy-Verteilung und α-stabile Lévy-Verteilung 128

3.9.12 Analyse stochastischer Prozesse 133
3.10 Invariantes Maß und ergodische Bahnen 139
3.10.1 Natürliche invariante Dichte der logistischen Abbildung 139
3.10.2 Frobenius-Perron-Gleichung und ergodisches Maß 144

4 Dynamische Systeme ohne Dissipation 149
4.1 Hamiltonsche Gleichungen 149
4.2 Kanonische Transformationen, Integrierbarkeit 156
4.3 f-dimensionale Ringe (Tori) und Trajektorien 166
4.4 Die Grundzüge der KAM-Theorie 169
4.5 Instabile Tori, chaotische Bereiche 174
4.6 Ein numerisches Beispiel: die Hénon-Abbildung 184

5 Dynamische Systeme mit Dissipation 201
5.1 Volumenkontraktion – eine wesentliche Eigenschaft dissipativer Systeme 202
5.2 Seltsamer Attraktor: Lorenz-Attraktor 204
5.3 Leistungsspektrum und Autokorrelation 210
5.4 Lyapunov-Exponenten 214
5.4.1 Lineare Stabilitätsanalyse nichtlinearer Systeme: Gleichgewichtszustand 215
5.4.2 Stabilität periodischer Lösungen: Floquet-Theorie 221
5.4.3 Lyapunov-Exponent eindimensionaler Abbildungen 231
5.4.4 Lyapunov-Exponenten n-dimensionaler kontinuierlicher Systeme 234
5.4.5 Lyapunov-Exponenten n-dimensionaler diskreter Systeme ... 241
5.4.6 Numerische Berechnung der Lyapunov-Exponenten 243
5.4.7 Lyapunov-Vektoren 249
5.5 Dimensionen 254
5.5.1 Cantor-Menge 256
5.5.2 Fraktaldimensionen: Kapazitätsdimension und Hausdorff-Besicovitch-Dimension 260
5.5.3 Informationsdimension 262
5.5.4 Korrelationsdimension, punktweise Dimension und Rekonstruktion von Attraktoren 275
5.5.5 Verallgemeinerte Dimension D_{q} 291
5.5.6 Lyapunov-Dimension und Kaplan-Yorke-Vermutung 293
5.6 Kolmogorov-Sinai-Entropie 299
5.6.1 Der Bernoulli-Shift 300
5.6.2 Definition der KS-Entropie 304
5.6.3 Zusammenhang zwischen KS-Entropie und Lyapunov-Exponenten 311
5.6.4 Zeitspanne für verläßliche Prognosen 313

6 Lokale Bifurkationstheorie 317
6.1 Motivation 319
6.2 Zentrumsmannigfaltigkeit 327
6.3 Normalformen 346
6.4 Normalformen von Verzweigungen einparametriger Flüsse 360
6.5 Stabilität von Verzweigungen infolge Störungen 380
6.6 Verzweigungen von Fixpunkten einparametriger Abbildungen 383
6.7 Renormierung und Selbstähnlichkeit am Beispiel der logistischen Abbildung 407
6.7.1 Der Mechanismus der Periodenverdopplung ad infinitum . . . 407
6.7.2 Superstabile Zyklen 415
6.7.3 Selbstähnlichkeit im x-Raum 420
6.7.4 Selbstähnlichkeit im Parameterraum 430
6.7.5 Zusammenhang mit Phasenübergängen 2. Ordnung und Renormierungsmethoden 443
6.8 Ein beschreibender Exkurs in die Synergetik 448

7 Konvektionsströmungen: Bénard-Problem 457
7.1 Hydrodynamische Grundgleichungen 464
7.2 Boussinesq-Oberbeck-Approximation 474
7.3 Lorenz-Modell 476
7.4 Entwicklung des Lorenz-Systems 481

8 Wege zum Chaos 493
8.1 Landau-Szenario 493
8.2 Ruelle-Takens-Szenario 498
8.2.1 Instabilität quasiperiodischer Bewegungen auf dem 3D-Torus 499
8.2.2 Experimente von Swinney und Gollub 503
8.3 Universelle Eigenschaften des Übergangs von Quasiperiodizität zu Chaos 507
8.3.1 Der impulsartig erregte gedämpfte Oszillator 508
8.3.2 Die eindimensionale Kreisabbildung 511
8.3.3 Skalierungseigenschaften der Kreisabbildung 523
8.3.3.1 Lokale Skalierungsgesetze 523
8.3.3.2 Globale Skalierungsgesetze 534
8.4 Die Feigenbaum-Route über Periodenverdopplungen ins Chaos 540
8.4.1 Weitere Skalierungseigenschaften der Periodenverdopplungskaskade 544
8.4.2 Experimenteller Nachweis der Feigenbaum-Route 555
8.5 Quasiperiodischer Übergang bei fester Windungszahl 559
8.5.1 Skalierungseigenschaften des quasiperiodischen Übergangs . . 560
8.5.2 Multifraktale Strukturen 567
8.5.3 Experimenteller Nachweis des quasiperiodischen Übergangs . 576
8.6 Der Weg über Intermittenz ins Chaos 582
8.6.1 Intermittenz bei der logistischen Abbildung 583

8.6.2 Klassifikation der Intermittenz . . . 588
8.6.3 Typ I-Intermittenz . . . 590
8.6.4 Typ III-Intermittenz . . . 599
8.6.5 Typ II-Intermittenz . . . 605
8.7 Wege aus dem Chaos, Steuerung des Chaos . . . 608
8.7.1 Chaos-Kontrolle ohne Rückkopplung . . . 611
8.7.2 Chaos-Kontrolle mit Rückkopplung . . . 612

9 Turbulenz . . . 617
9.1 Dynamik inkompressibler Flüssigkeiten . . . 622
9.1.1 Die hydrodynamischen Grundgleichungen . . . 622
9.1.2 Die lokale Energiedissipationsrate . . . 625
9.1.3 Die Wirbeltransportgleichung . . . 627
9.1.4 Die Lagrangesche Behandlung von Flüssigkeitsströmungen . . 631
9.1.5 Lagrangesche kohärente Strukturen . . . 634
9.1.6 Hydrodynamische Wirbel . . . 639
9.1.6.1 Lamb-Oseen-Wirbel . . . 639
9.1.6.2 Gestreckte Wirbel . . . 641
9.1.6.3 Lundgren-Wirbel . . . 644
9.2 Vom Chaos zur Turbulenz . . . 644
9.2.1 Chaos in Flüssigkeitströmungen . . . 644
9.2.2 Dynamik von Punktwirbeln in zweidimensionalen idealen Strömungen . . . 644
9.2.2.1 Der Hamiltonsche Charakter der Punktwirbeldynamik . . . 646
9.2.2.2 Zwei Punktwirbel . . . 647
9.2.2.3 Drei Punktwirbel . . . 649
9.2.2.4 Vier Punktwirbel . . . 652
9.2.2.5 Mischung durch Punktwirbel . . . 654
9.2.3 Die Onsagersche Gleichgewichtstheorie . . . 655
9.2.3.1 Viskosität . . . 655
9.3 Turbulenz: Determinismus und Stochastizität . . . 657
9.3.1 Statistische Mittelwertbildung . . . 657
9.3.2 Momentengleichungen: Das Schließungsproblem der Turbulenz . . . 659
9.3.3 Zerfallende Turbulenz . . . 660
9.3.4 Reynoldssche Gleichung und Turbulenz-Modellierung . . . 660
9.4 Charakteristische Skalen der Turbulenz . . . 663
9.4.1 Taylor-Hypothese . . . 663
9.4.2 Phänomenologie des Wirbelzerfalls und Energiekaskade . . . 663
9.4.3 Die integrale Länge L . . . 664
9.4.4 Die Kolmogorovschen Skalen . . . 665
9.4.5 Die Taylor-Länge . . . 665
9.4.6 Die Taylor-Reynolds-Zahl . . . 666
9.5 Die turbulente Kaskade . . . 666
9.5.1 Die von Kármán-Howarth-Relation . . . 666

9.5.2 Das Energiespektrum $E(k)$ . . . 669
9.5.3 Die Energiekaskade in der dreidimensionalen Turbulenz . . . 670
9.5.4 Heisenbergs Theorie . . . 672
9.6 Die Kolmogorovsche Theorie der lokal isotropen Turbulenz . . . 674
9.6.1 Die Evolutionsgleichung für die Geschwindigkeitsinkremente 674
9.6.2 Die Energiebilanz des Geschwindigkeitsinkrementes . . . 675
9.6.3 Die gemittelte Energiebilanzgleichung . . . 677
9.6.3.1 Homogene Turbulenz . . . 677
9.6.3.2 Homogene, isotrope Turbulenz . . . 678
9.6.3.3 Das Kolmogorovsche -4/5 Gesetz . . . 678
9.6.3.4 Dissipationsbereich . . . 679
9.6.3.5 Inertialbereich . . . 680
9.6.4 Die Kolmogorovsche Theorie K41 . . . 680
9.6.4.1 Universalität der Statistik der kleinskaligen Turbulenz . . . 681
9.6.4.2 Ähnlichkeitsverhalten im Inertialbereich . . . 682
9.6.4.3 Selbstähnlichkeit und fraktale Skalengesetze . . . 682
9.6.4.4 Experimentelle Überprüfung der Selbstähnlichkeitshypothese . . . 684
9.6.5 Das Phänomen der Intermittenz . . . 685
9.6.6 Kolmogorov K62 . . . 686
9.6.7 Multifraktales Modell . . . 688
9.6.8 Multiskalen-Statistik . . . 690
9.7 Ausblick . . . 696
9.8 Anhang: Isotrope Tensorfelder . . . 697
9.8.1 Longitudinale und transversale Korrelationsfunktionen . . . 699
9.8.1.1 Die Korrelationsfunktion dritter Ordnung . . . 700
9.8.2 Korrelationsfunktionen für inkompressible, isotrope und homogene Felder . . . 701
9.8.2.1 Die Korrelationsfunktion zweiter Ordnung . . . 701
9.8.2.2 Die Korrelationsfunktion dritter Ordnung . . . 701
9.8.3 Strukturfunktionen inkompressibler Felder . . . 702
9.8.3.1 Strukturfunktion zweiter Ordnung . . . 702
9.8.3.2 Strukturfunktion dritter Ordnung . . . 703

10 Computerexperimente . . . 705
10.1 Einblick in Knochenumbauprozesse . . . 708
10.2 Hénon-Abbildung . . . 724
10.3 Wiederbegegnung mit dem Lorenz-System . . . 731
10.4 Van der Polsche Gleichung . . . 737
10.4.1 Selbsterregte Schwingung . . . 738
10.4.2 Fremderregter Van der Pol Oszillator . . . 744
10.5 Duffing-Gleichung . . . 760
10.6 Shilnikov-Bifurkationen . . . 782
10.7 Julia-Mengen und ihr Ordnungsprinzip . . . 792
10.8 Struktur der Arnold-Zungen . . . 806

10.9 Zur Kinetik chemischer Reaktionen an Einkristall-Oberflächen 816
10.9.1 Oxidation von Wasserstoff an einer Platin-Elektrode 817
10.9.2 Zur Kinetik der katalytischen Oxidation von CO an Pt(110) 820
10.9.2.1 Phänomenologie der katalytischen Oxidation 820
10.9.2.2 Schrittweise Formulierung eines kinetischen Modells 824
10.9.3 Identifikation von Chaos und Hyperchaos bei kinetischen Oberflächenreaktionen 831
10.9.4 Raumzeitliche Musterbildung 834

Farbtafeln 843

Literaturverzeichnis 875

Index 899

1 Einführung

But thought's the slave of life, and life time's fool;
And time, that takes survey of all the world,
Must have a stop.

William Shakespeare, King Henry IV, Part I, IV, *2*, 81

Das Buch ist konzipiert als elementare Einführung in die moderne Theorie nichtlinearer Dynamik, wobei die Untersuchung chaotischer Phänomene einen breiten Raum einnimmt. Man mag sich fragen, warum hier ein weiteres Buch aufgelegt wird, wo doch die Literatur über Chaos und nichtlineare Oszillationen durch die stürmische Entwicklung dieses Wissenschaftszweiges seit den 70er Jahren des vorigen Jahrhunderts bereits ganze Bücherregale füllt. Die Gründe, die uns dennoch bewogen haben, dieses Buch zu verfassen, haben wir im Vorwort ausführlich dargelegt.

Unser Ziel war es, ein elementares, möglichst ausführliches Lehrbuch zu schreiben, ohne dabei allzu große mathematische Vorkenntnisse vorauszusetzen. Es wendet sich in erster Linie nicht an Mathematiker und theoretische Physiker, sondern vielmehr an angehende Naturwissenschaftler, wie z.B. Chemiker und Biologen und an Ingenieure aller Fachrichtungen, insbesondere der Luftfahrt und Elektrotechnik, aber auch an Musik- und Wirtschaftswissenschaftler und an interessierte Studierende im 2. Studienabschnitt. Mathematische Verfahren und Werkzeuge werden in kleinen Unterabschnitten immer dann eingeführt, wenn sie zum Verständnis des Stoffes benötigt werden, wobei stets versucht wird, den Stoff durch graphische Abbildungen, Farbtafeln und zusätzliche Computerberechnungen einprägsam und anschaulich zu gestalten. Eine Vielzahl weiterführender Literaturhinweise verdeutlicht das breite Spektrum dieser Materie.

Die beiden Kapitel 2 und 3 führen in elementarer Weise in die Gedanken- und Begriffswelt nichtlinearer dynamischer Systeme ein. In *Kapitel 2* wird zunächst der Problemkreis, der in diesem Buch behandelt werden soll, umrissen. Wir betrachten nichtlineare dynamische Prozesse, wobei wir uns auf deterministische und, bis auf wenige Ausnahmen, endlichdimensionale Systeme beschränken, die sich durch Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen beschreiben lassen. Im Gegensatz zu klassischen Abhandlungen der Schwingungslehre, in denen die Lösung linearer Probleme im allgemeinen einen breiten Raum einnimmt und in denen man sich vorwiegend mit Einzellösungen spezieller Probleme beschäftigt, ermöglicht die von Henri Poincaré ins Leben gerufene Theorie dynamischer Systeme durch eine Kombination von analytischen und geometrischen, differentialtopologischen Methoden qualitative Aussagen über die Gesamtheit der Lösungen einzelner und ganzer Klassen von

J. Argyris et al., *Die Erforschung des Chaos*,
DOI 10.1007/978-3-662-54546-1_1

Differentialgleichungssystemen. Zentrale Fragen sind dabei die Struktur des Phasenraums, das Stabilitätsverhalten der Lösungen, ihr Langzeitverhalten und die Auswirkungen von Bifurkationen, d. h. die qualitativen Veränderungen des Flusses aufgrund von Parameteränderungen. Die Tatsache, daß selbst einfachste nichtlineare Systeme chaotisches Verhalten hervorrufen können, führt in Abschnitt 2.1 zur Auseinandersetzung mit dem Kausalitätsbegriff und dem Zusammenhang zwischen Determinismus und Vorhersagbarkeit. Im Anschluß daran werden am Beispiel von Einfreiheitsgrad-Schwingern mit und ohne Reibung, mit und ohne Erregerkraft mögliche Bewegungszustände dynamischer Systeme – wie stationäres, periodisches und chaotisches Verhalten – beschrieben, und es werden einige elementare Grundbegriffe wie Phasenraum, Trajektorien, Mannigfaltigkeit, Attraktoren etc. eingeführt.

Zentrales Thema bei der Analyse nichtlinearer Systeme ist die Diskussion der Stabilitätseigenschaften von Gleichgewichtszuständen, periodischen Bewegungen usw. *Kapitel 3* beginnt daher mit einer Diskussion der Singularitäten linearer Differentialgleichungen und einer Klassifikation der Fixpunkte aufgrund von Eigenwerten und Eigenvektoren für den zweidimensionalen Fall sowie der Möglichkeiten einer Übertragung der Ergebnisse auf nichtlineare Systeme. Der Einführung einer Reihe von Stabilitätsbegriffen schließt sich die Definition der invarianten Mannigfaltigkeiten an, die eine Strukturierung des Phasenraums ermöglichen. Im Anschluß daran werden Poincaré-Schnitte und diskrete Abbildungen diskutiert, und es kommt zu einer ersten elementaren Begegnung mit der logistischen Abbildung, bei der durch Veränderung eines Kontrollparameters der Übergang von stationärem zu periodischem, mehrfach periodischem Verhalten bis hin zum Chaos beobachtet werden kann. Allgemeine periodische Bewegungen lassen sich besonders einfach im Fourier-Raum beschreiben. Es folgt daher eine kurze Einführung in die harmonische Analyse und eine Zusammenstellung der wichtigsten Eigenschaften der Fourier-Transformation sowie ein Hinweis auf die Wavelet-Analyse, die Zeit-Frequenz-Analysen nichtstationärer Vorgänge ermöglicht.

Im anschließenden Abschnitt 3.9 findet man eine Zusammenstellung der Grundlagen der Wahrscheinlichkeitstheorie. Obwohl wir uns in diesem Buch mit deterministischen nichtlinearen Systemen beschäftigen, benötigt man zur Charakterisierung der Dynamik chaotischer Systeme im Phasenraum und zur Beschreibung der Turbulenz eine Reihe von Grundbegriffen der Wahrscheinlichkeitstheorie. Dazu gehören Begriffe wie Zufallsvariable, Wahrscheinlichkeitsdichte, bedingte und Verbundswahrscheinlichkeit und Momente der Verteilungen. Wir gehen auf die Bedeutung des Zentralen Grenzwertsatzes ein und stellen kurz die geläufigsten Dichteverteilungen vor. Es folgt ein kurzer Überblick über die Markov-Analyse, die in den letzten Jahren entwickelt wurde und die es ermöglicht, aus experimentell gewonnenen Zeitreihen die zugrunde liegende deterministische Dynamik des Systems zu trennen von den häufig unvermeidbaren überlagerten fluktuierenden Kräften und damit die grundlegenden stochastischen Gleichungen zu ermitteln. Im letzten Abschnitt 3.10 werden die Konzepte invariantes Maß und Ergodizität eingeführt.

Dynamische Systeme lassen sich in zwei grundlegende Familien unterteilen, in konservative Systeme, in denen kein Energieverlust auftritt, und in dissipative Systeme mit Energieverlust. In *Kapitel 4* behandeln wir die konservativen Systeme und versuchen, einen Bogen zu spannen zwischen Integrierbarkeit und Chaos. Ganz im Sinne der klassischen Mechanik werden zunächst, ausgehend vom d'Alembertschen Prinzip, die Hamiltonschen Gleichungen hergeleitet. Der Satz von Liouville erlaubt es, die Volumentreue des Phasenflusses konservativer Systeme zu überprüfen und damit konservative von dissipativen Systemen zu unterscheiden. Eine geschlossene Lösung nichtlinearer Hamiltonscher Differentialgleichungen ist nur in Ausnahmefällen möglich, nämlich dann, wenn sich das System auf Wirkungs- und Winkelvariable transformieren und somit durch quasiperiodische Bewegungen auf einem Torus im Phasenraum beschreiben läßt. Am Beispiel der Keplerschen Bewegung eines Planeten um die Sonne wird eine solche Integration durchgeführt. Aber bereits das Dreikörperproblem ist nicht mehr geschlossen lösbar. Gegen Ende des 19. Jahrhunderts konnte Poincaré nachweisen, daß bereits kleine Störungen des Zweikörperproblems die Stabilität der Lösungen in Frage stellen. Er zeigte, daß Perturbationsmethoden nicht immer zu korrekten Resultaten führen müssen, weil die im Verlauf der Rechnung benutzten Reihen möglicherweise divergieren und damit zu falschen Schlußfolgerungen verleiten können. Erst 60 Jahre später konnten Andrej N. Kolmogorov, Vladimir I. Arnold und Jürgen Moser im Rahmen der KAM-Theorie unter gewissen Voraussetzungen die Frage nach der Stabilität gestörter Hamilton-Systeme beantworten. In Abschnitt 4.4 werden die Grundzüge der KAM-Theorie skizziert und der Zerfall der Tori anhand von Poincaré-Schnitten zweidimensionaler gestörter Hamilton-Systeme erläutert. Es zeigt sich, daß das Auftreten heterokliner Punkte für das irreguläre, chaotische Verhalten in der Umgebung hyperbolischer Punkte verantwortlich ist. Den Abschluß dieses Kapitels bildet eine ausführliche Diskussion der konservativen Hénon-Abbildung.

Kapitel 5 beschäftigt sich mit dissipativen Systemen. In der klassischen Mechanik eines Galilei und Newton wurden Reibungsverluste als störend empfunden und daher vernachlässigt. Diese Idealisierung, die in guter Näherung für Planetenbahnen vorgenommen werden kann, läßt sich jedoch nur selten auf irdische Bewegungsabläufe übertragen. Die Theorie dynamischer Systeme zeigt außerdem, daß die Einführung dissipativer Terme das Problem nicht etwa komplexer macht, sondern das Lösungsverhalten in vielen Fällen sogar vereinfacht. Die Langzeitdynamik hochdimensionaler dissipativer Systeme wird nämlich häufig durch einige wenige wesentliche Moden bestimmt, es kommt zu einer Kontraktion des Phasenraumvolumens und zur Entstehung von Attraktoren, die in konservativen Systemen nicht auftreten können. Dissipative Systeme ohne Energiezufuhr kommen zur Ruhe, sie nähern sich einem Gleichgewichtszustand oder Punktattraktor. Führt man dem System Energie zu, so kann es im einfachsten Fall zu periodischen oder quasiperiodischen Bewegungen kommen, aber auch zu völlig irregulärem Verhalten, das im Phasenraum beschrieben wird durch einen *seltsamen Attraktor*, einem außerordentlich komplexen Gebilde vom Volumen Null. Die typischen Eigenschaften solcher seltsamer Attraktoren werden am Beispiel des Lorenz-Attraktors zusammengestellt, dessen Struktur ganz wesentlich von der empfindlichen Abhängigkeit der Trajektorien von kleinsten Änderungen in den Anfangsbedingungen geprägt wird. In den folgenden Abschnitten von Kapitel 5 stellen wir ausführlich eine Reihe von mathematischen Werkzeugen – nämlich Leistungsspektrum, Autokorrelation, Lyapunov-

Exponenten und Lyapunov-Vektoren sowie Dimensionen im Phasenraum – vor, die eine quantitative Charakterisierung und Unterscheidung der einzelnen Attraktortypen ermöglichen.

Wir beginnen mit zwei klassischen Kriterien, dem Leistungsspektrum, das Auskunft darüber gibt, welche Grundfrequenzen dominieren, und der Autokorrelation, die das Erinnerungsvermögen, d. h. die inneren zeitlichen Zusammenhänge eines Signals, widerspiegeln. Beide Kriterien basieren auf Fourier-Transformationen, deren wichtigste Eigenschaften bereits in Abschnitt 3.8 zusammengestellt wurden. Sie erlauben zwar eine Unterscheidung zwischen regulärem und irregulärem Verhalten, reichen aber nicht aus, um chaotische Bewegungen zu charakterisieren. Dazu sind weitere mathematische Werkzeuge notwendig, wie z. B. die Lyapunov-Exponenten, die eine Aussage über das Stabilitätsverhalten benachbarter Trajektorien machen. Die klassische Floquet-Theorie, die eine lineare Stabilitätsanalyse periodischer Bewegungen erlaubt, wird auf irreguläre Bewegungsabläufe erweitert und führt zum Spektrum der Lyapunov-Exponenten. Für diskrete und kontinuierliche Systeme werden die Algorithmen beschrieben, die eine numerische Berechnung aller Lyapunov-Exponenten ermöglichen. Die zu den jeweiligen Lyapunov-Exponenten gehörenden lokalen Richtungen im Tangentialraum werden durch kovariante Lyapunov-Vektoren repräsentiert, die wir am Ende von Abschnitt 5.4 vorstellen.

Der Dimensionsbegriff stellt ein weiteres wichtiges Hilfsmittel zur Klassifikation der verschiedenen Attraktortypen dar. Die Dämpfung sorgt im allgemeinen dafür, daß die Anzahl der unabhängigen Variablen, die die Dimension des Phasenraums festlegen, während der transienten Phase erheblich reduziert wird. Die Dimension eines Attraktors ist also geeignet, Auskunft zu geben über die Zahl der am Langzeitverhalten beteiligten wesentlichen Moden: einem Gleichgewichtszustand entspricht ein Punktattraktor der Dimension 0, einer periodischen Bewegung ein Grenzzyklus der Dimension 1 usw. Einer chaotischen Bewegung entspricht ein seltsamer Attraktor, der z. B. in einem dreidimensionalen Phasenraum eine Zwitterstellung zwischen einem flächenartigen und einem räumlichen Gebilde einnimmt. Zur Beschreibung seiner komplexen, blätterteigartigen Struktur genügen klassische Dimensionsbegriffe nicht, vielmehr muß ihm eine nichtganzzahlige Dimension zwischen 2 und 3 zugeordnet werden. Der französische Mathematiker Benoît Mandelbrot prägte für derartige Mengen den Begriff „Fraktale“. Verantwortlich für die Komplexität fraktaler Mengen ist ihre Selbstähnlichkeit, d. h. ihre Invarianz gegenüber Maßstabsveränderungen. Es gibt eine ganze Familie von geeigneten Dimensionsbegriffen, wie z. B. die Kapazitätsdimension, die Informations- und Korrelationsdimension usw., auf die wir in Abschnitt 5.5 ausführlich eingehen.

Dimensionen werden häufig zur Charakterisierung experimenteller Zeitreihen verwendet. Liegen einem System deterministische Gesetze zugrunde, so enthält der zeitliche Verlauf einer einzigen Variablen bereits alle Informationen über die gesamte Dynamik des Systems. Wir besprechen eine Rekonstruktionstechnik, die die Möglichkeit bietet, aus eindimensionalen Zeitreihen Attraktoren zu rekonstruieren und mit Hilfe ihrer Dimension (Abschnitt 5.5.4) und der Lyapunov-Exponenten (siehe auch Abschnitt 10.9) die zugehörigen Bewegungsabläufe zu charakterisieren. Den

Abschluß von Kapitel 5 bildet die Kolmogorov-Sinai-Entropie, die auf Shannons Informationstheorie beruht und den Grad der Unordnung eines Systems quantifiziert. Am Beispiel einer einfachen Abbildung, dem Bernoulli-Shift, wird demonstriert, daß die KS-Entropie den Informationstransport von einer mikroskopischen auf eine makroskopische Skala mißt. Außerdem ermöglicht sie die Angabe einer Schranke für die Zeitspanne, innerhalb der noch verläßliche Prognosen über den Trajektorienverlauf möglich sind.

Typischerweise treten in den Modellgleichungen zur Beschreibung physikalischer Systeme ein oder mehrere Kontrollparameter auf. Haben diese Differentialgleichungen nichtlinearen Charakter, so kann es bei Änderung der Parameter zu qualitativen Änderungen der topologischen Struktur der Lösungen kommen. Man bezeichnet solche Veränderungen als Verzweigungen oder Bifurkationen. *Kapitel 6* enthält eine ausführliche Diskussion der Methoden der lokalen Bifurkationstheorie, wobei wir uns auf lokale Bifurkationen von Gleichgewichtszuständen und periodischen Bewegungen bei Veränderung eines Kontrollparameters konzentrieren. Zur Einführung werden zunächst einige typische Verzweigungen von Fixpunkten vorgestellt und die qualitative Veränderung der Lösungen durch entsprechende Phasenportraits verdeutlicht.

Für die Analyse des Stabilitäts- und Lösungsverhaltens in der Umgebung eines hyperbolischen Fixpunktes genügt die Untersuchung des linearisierten Systems. An Verzweigungsstellen verliert ein Fixpunkt jedoch seinen hyperbolischen Charakter. In diesem Fall müssen zur Klärung der Stabilitätsverhältnisse und des Lösungsverhaltens nichtlineare Terme hinzugezogen werden. Dazu verwendet man die Methode der Zentrumsmannigfaltigkeit, die in Abschnitt 6.2 vorgestellt wird. Dabei handelt es sich um eine Approximationstechnik, die es erlaubt, die Anzahl der zur Beschreibung des Langzeitverhaltens in der Umgebung nichthyperbolischer Fixpunkte notwendigen Gleichungen drastisch zu reduzieren und damit auch die Stabilitätsverhältnisse zu klären.

Aufgabe der lokalen Bifurkationstheorie ist es, die lokalen Bifurkationen von Fixpunkten, Grenzzyklen etc. zu klassifizieren und deren Normalformen aufzustellen. In Abschnitt 6.3 beschreiben wir ausführlich die Methode der Normalformen, eine Technik, mit der nichtlineare Differentialgleichungen in der Umgebung von Fixpunkten und Grenzzyklen durch eine Folge nichtlinearer Transformationen auf die einfachste Form gebracht werden können, wobei nichtlineare Terme, wann immer dies möglich ist, sukzessive eliminiert werden. Eine vollständige Linearisierung ist allerdings nur möglich, wenn keine Resonanzen auftreten. Normalformen von Verzweigungen enthalten notwendigerweise Resonanzen.

In Abschnitt 6.4 werden die Bifurkationen einparametriger Flüsse diskutiert, die entsprechenden Normalformen angegeben und die Bedingungen zusammengestellt, die eine Unterscheidung der einzelnen Verzweigungsmuster gestatten. Danach gehen wir auf die Frage nach der Robustheit der einzelnen Bifurkationen ein, d. h. wir untersuchen, ob kleine Veränderungen in den Modellgleichungen qualitative Änderungen der Verzweigungsmuster zur Folge haben. Schließlich werden die Normalformen der Bifurkationen von Fixpunkten einparametriger Abbildungen besprochen. Da periodische Orbits in der Poincaré-Abbildung als Fixpunkte erscheinen, umfaßt diese Diskussion auch die Verzweigungen von Grenzzyklen.

In Abschnitt 6.7 wird am Beispiel der logistischen Gleichung demonstriert, daß eine kontinuierliche Erhöhung des Kontrollparameters eine Folge lokaler Bifurkationen, in diesem Fall eine Kaskade von Periodenverdoppelungen, auslösen kann, die schließlich in chaotisches Verhalten mündet, das aber immer wieder durch Fenster regulären Verhaltens unterbrochen wird. Mitchell Feigenbaum konnte als erster nachweisen, daß dieser Weg ins Chaos nicht an die spezielle Form der logistischen Abbildung gebunden ist, daß es sich vielmehr um ein universelles Szenario handelt, das in vielen Systemen beobachtet werden kann. In diesem Abschnitt werden die Hintergründe für den Mechanismus fortgesetzter Periodenverdoppelungen aufgezeigt und es wird erläutert, wie die Selbstähnlichkeitseigenschaften des Bifurkationsdiagramms mit Hilfe von Renormierungstechniken entschlüsselt und damit die Feigenbaum-Konstanten berechnet werden können. Zum Schluß gehen wir auf den Zusammenhang mit Phasenübergängen 2. Ordnung ein, wie wir sie z. B. beim Übergang vom flüssigen in den gasförmigen Aggregatzustand oder beim Ferromagneten kennen.

Wir beschließen Kapitel 6 mit einer skizzenhaften Einführung in die Synergetik, einem Wissenschaftszweig, der sich mit der Dynamik von Musterbildungsprozessen auseinandersetzt und der Ende der 1960er Jahre von dem Physiker Hermann Haken begründet wurde. Die zentrale Frage in der Synergetik ist, ob und inwieweit der Ausbildung von Strukturen in den unterschiedlichsten Systemen der Physik, Biologie, Soziologie, Medizin etc., der belebten und unbelebten Natur, allgemeingültige Prinzipien zugrunde liegen, und wie sich diese Selbstorganisationsvorgänge mathematisch in Formeln fassen lassen. Es werden einerseits die Gemeinsamkeiten mit der Theorie der Zentrumsmannigfaltigkeiten erläutert, andererseits wird auf den umfassenderen Rahmen der Synergetik hingewiesen, der sich aus der Einbeziehung räumlicher Inhomogenitäten und fluktuierender Kräfte ergibt.

Kapitel 7 widmet sich der Strukturbildung in Konvektionsströmungen und der Herleitung und Diskussion des Lorenz-Systems, das die Entwicklung der Chaos-Theorie ganz wesentlich stimuliert hat. Das Kapitel beginnt mit einer qualitativen Beschreibung der physikalischen Gesetzmäßigkeiten, die zur Bildung der charakteristischen Konvektionsrollen im Rayleigh-Bénard-Experiment führen. Im Anschluß daran folgt eine ausführliche Herleitung der hydrodynamischen Grundgleichungen für Konvektionsprobleme. Aus den Erhaltungssätzen von Masse, Impuls und Energie werden die Kontinuitätsgleichung, die Navier-Stokes-Gleichungen und die Wärmetransportgleichung abgeleitet. In vielen Fällen können diese Grundgleichungen durch die Boussinesq-Oberbeck-Approximation vereinfacht werden, wobei man von der Annahme ausgeht, daß Dichteänderungen des Fluids lediglich den Auftriebsterm beeinflussen.

In den frühen 1960er Jahren benutzte der amerikanische Meteorologe Edward N. Lorenz dieses System von Grundgleichungen, um die Genauigkeit von Wetterprognosen zu erforschen. Sein stark vereinfachtes Modell für das Bénard-Problem hält zwar einer experimentellen Verifikation zur Beschreibung des Einsetzens von Turbulenz nicht stand, seine Entdeckung, daß ein deterministisches System von drei gewöhnlichen Differentialgleichungen irreguläres, chaotisches Verhalten zeigen kann, führte jedoch in den Naturwissenschaften zu einem neuen Paradigma: *einerseits gibt es im Fall chaotischen Verhaltens grundsätzliche Grenzen für die Vorhersagbarkeit eines dynamischen Systems, andererseits können sich Zeitverläufe, die bisher als rein stochastisch eingestuft wurden, als chaotische Bewegungen entpuppen, zu deren Beschreibung häufig eine geringe Anzahl nichtlinearer Gleichungen ausreicht.*

In Abschnitt 7.3 folgen wir den Originalveröffentlichungen von Saltzman und Lorenz und leiten die drei gewöhnlichen Differentialgleichungen des Lorenz-Systems her. Danach wird die Entwicklung der Lösungen dieses Systems im Phasenraum bei Veränderung des freien Parameters beschrieben, der die Temperaturdifferenz zwischen oberer und unterer Platte im Rayleigh-Bénard-Problem steuert, wobei lokale und globale Bifurkationen auftreten. Eine Reihe von Farbtafeln demonstriert einerseits die räumliche und zeitliche Entwicklung der Konvektionsrollen im Lorenz-Modell, andererseits die signifikanten Änderungen der Phasenraumstruktur aufgrund eines Anstiegs des Kontrollparameters, die anhand der Entwicklung der stabilen Mannigfaltigkeiten verdeutlicht werden.

In *Kapitel 8* wird eine Reihe von mathematischen Modellen vorgestellt, die den Übergang von regulären zu chaotischen Bewegungen beschreiben. In den Anfangsjahren der Chaosforschung hoffte man, mit diesen Szenarien den Übergang zu turbulentem Verhalten beschreiben und damit einen wesentlichen Beitrag zur Lösung des Turbulenzproblems liefern zu können.

Das erste Modell zur Beschreibung des Einsetzens von Turbulenz geht auf Lev D. Landau (1944) zurück, der annahm, daß der Übergang von laminarem zu turbulentem Verhalten durch eine unendliche Folge von (Hopf-)Bifurkationen zustande kommt. Es dauerte immerhin ein Vierteljahrhundert, bis die Schwächen dieses Modells erkannt wurden: Landaus Modell kann nicht die empfindliche Abhängigkeit der Strömung von kleinen Störungen erklären und keine Durchmischung der Trajektorien im Phasenraum erzeugen. Im Jahre 1971 wiesen David Ruelle und Floris Takens nach, daß im allgemeinen quasiperiodische Bewegungen auf höherdimensionalen Tori, wie Landau sie angenommen hatte, nicht stabil sind, daß vielmehr direkt nach dem Erscheinen der dritten inkommensurablen Frequenz die quasiperiodische Bewegung abrupt in eine chaotische übergeht, d. h. die Bewegung auf einem T^3-Torus kollabiert in einen *seltsamen Attraktor*, ein Begriff, der von Ruelle und Takens geprägt wurde. Damit war man tatsächlich einen großen Schritt weitergekommen. Man hatte eine Möglichkeit gefunden, charakteristische Eigenschaften der Turbulenz – wie Unvorhersagbarkeit der Bewegung und Durchmischung – auf der Grundlage deterministischer Gleichungen zu beschreiben. Mit Hilfe verfeinerter Meßmethoden gelang Gollub und Swinney eine experimentelle Verifikation für das Bénard-Problem, die sich auf die Analyse der Leistungsspektren stützte und durch Dimensionsbestimmungen rekonstruierter Attraktoren untermauert werden konnte.

Die Abschnitte 8.3 bis 8.5 enthalten eine Diskussion des Übergangs von quasiperiodischen zu chaotischen Bewegungen am Modell der Kreisabbildung. Dabei sind zwei unterschiedliche Szenarien denkbar. Entweder kommt es zu einer Synchronisation der Frequenzen und anschließend durch eine Kette von Periodenverdopplungen zu chaotischem Verhalten – dies ist Feigenbaums Route, die wir bereits in