

FELIX HAUSDORFF
Gesammelte Werke

Springer

Berlin
Heidelberg
New York
Hongkong
London
Mailand
Paris
Tokio



Felix Hausdorff um 1894

Photograph: N. Perscheid (Leipzig)

FELIX HAUSDORFF

Gesammelte Werke

einschließlich der unter dem Pseudonym Paul Mongré
erschienenen philosophischen und literarischen Schriften
und ausgewählter Texte aus dem Nachlaß

Verantwortlich für die gesamte Edition:

Egbert Brieskorn, Friedrich Hirzebruch, Walter Purkert,
Reinhold Remmert und Erhard Scholz

FELIX HAUSDORFF
Gesammelte Werke

BAND I

Felix Hausdorff (1868–1942)
Hausdorff als akademischer Lehrer
Arbeiten zur Mengenlehre

BAND II

Grundzüge der Mengenlehre (1914)

BAND III

Mengenlehre (1927, 1935)
Deskriptive Mengenlehre und Topologie

BAND IV

Analysis, Algebra
und Zahlentheorie

BAND V

Astronomie, Optik und
Wahrscheinlichkeitstheorie

BAND VI

Geometrie, Raum und Zeit

BAND VII

Philosophisches Werk

BAND VIII

Literarisches Werk

BAND IX

Korrespondenz

FELIX HAUSDORFF

Gesammelte Werke

BAND V

Astronomie, Optik und Wahrscheinlichkeitstheorie

Herausgegeben von

J. Bemelmans, Ch. Binder, S.D. Chatterji,
S. Hildebrand, W. Purkert, F. Schmeidler
und E. Scholz



Springer

Herausgeber

Josef Bemelmans, Christa Binder, Srishti D. Chatterji,
Stefan Hildebrandt, Walter Purkert, Felix Schmeidler, Erhard Scholz

Die Adressen finden sich am Buchende

Bibliografische Information der Deutschen Bibliothek

Die Deutsche Bibliothek verzeichnet diese Publikation
in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische
Daten sind im Internet über <<http://dnb.ddb.de>> abrufbar.

ISBN 3-540-30624-2 Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Die dadurch begründeten Rechte, insbesondere die der Übersetzung, des Nachdrucks, des Vortrags, der Entnahme von Abbildungen und Tabellen, der Funksendung, der Mikroverfilmung oder der Vervielfältigung auf anderen Wegen und der Speicherung in Datenverarbeitungsanlagen bleiben, auch bei nur auszugsweiser Verwertung, vorbehalten. Eine Vervielfältigung dieses Werkes oder von Teilen dieses Werkes ist auch im Einzelfall nur in den Grenzen der gesetzlichen Bestimmungen des Urheberrechtsgesetzes der Bundesrepublik Deutschland vom 9. September 1965 in der jeweils geltenden Fassung zulässig. Sie ist grundsätzlich vergütungspflichtig. Zuwiderhandlungen unterliegen den Strafbestimmungen des Urheberrechtsgesetzes.

Springer-Verlag Berlin ist Teil von Springer Science+Business Media
springeronline.com

© Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2006
Printed in Germany

Umschlaggestaltung: E. Kirchner, Heidelberg

Druck: Strauss Offsetdruck, Mörlenbach

Bindearbeiten: Schäffer, Grünstadt

Gedruckt auf säurefreiem Papier 44/3142XT 5 4 3 2 1 0

Vorwort

Der vorliegende Band V umfaßt die Themenbereiche Astronomie, Optik und Wahrscheinlichkeitstheorie. FELIX HAUSDORFF begann seine wissenschaftliche Laufbahn mit einer Dissertation über die Refraktion des Lichtes in der Atmosphäre. Es folgten zwei weitere Arbeiten zum gleichen Thema und 1895 die Habilitationsschrift über die Extinktion des Lichtes in der Atmosphäre. Ausgangspunkt dieser Arbeiten war eine Idee seines akademischen Lehrers HEINRICH BRUNS. Die Refraktionstheorien vor BRUNS und HAUSDORFF stellten eine Hypothese über den Temperaturgang durch die Atmosphäre an die Spitze und berechneten dann aus dem Refraktionsintegral die Refraktion. BRUNS wollte im Gegensatz dazu Interpolationsformeln für die Refraktion mit genügend vielen disponiblen Parametern als das hypothetische Element an die Spitze stellen, diese Parameter an Refraktionsbeobachtungen anpassen und dann umgekehrt aus den beobachteten Werten der Refraktion die meteorologischen Daten berechnen. HAUSDORFF hat diese Idee an Hand einer ganzen Reihe von hypothetischen Refraktionsformeln ausgeführt. Der wissenschaftliche Erfolg blieb jedoch letztlich aus, da man für das Verfahren horizontnahe Refraktionsbeobachtungen benötigt, die – wie sich später herausstellte – nicht mit der erforderlichen Genauigkeit beschafft werden können. Analog zum Vorgehen bei der Refraktion postulierte HAUSDORFF in der Extinktionstheorie hypothetische Ausdrücke für die Extinktion und schloß diese an vorliegende Extinktionstabellen an.

Die Arbeit *Infinitesimale Abbildungen der Optik* schließt an BRUNS' berühmte Arbeit über das Eikonale an. HAUSDORFF leitet hier notwendige Bedingungen für die Realisierbarkeit gewisser idealer optischer Abbildungen im Sinne von BRUNS her. Damit gelang ihm z. B. der Nachweis, daß ein ideales Fernrohrobjektiv durch keine Wahl der brechenden Flächen dioptrisch erzeugt werden kann.

Der Nachlaß HAUSDORFFS zu astronomischen Themen ist nicht sehr umfangreich. Für den vorliegenden Band wurden Auszüge aus seiner ersten und einzigen astronomischen Vorlesung ausgewählt, in der er u. a. das interessante Problem der Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten behandelt. Ferner werden zwei Faszikel zur mittleren Bewegung abgedruckt. Dieses Problem der Himmelsmechanik steht in enger Beziehung zu einer tiefliegenden mathematischen Frage, die später vor allem von H. WEYL bearbeitet wurde, der Frage nach der Gleichverteilung modulo 1 von Folgen reeller Zahlen.

Zur Wahrscheinlichkeitstheorie und ihren Anwendungen hat HAUSDORFF zwei längere Arbeiten publiziert. Sie waren zwar nur Gelegenheitschriften, die im direkten Zusammenhang mit seiner Vorlesungstätigkeit entstanden sind, ha-

ben aber doch ihre Spuren in der Versicherungsmathematik und in der Wahrscheinlichkeitsrechnung hinterlassen. In *Das Risiko bei Zufallsspielen* modelliert er den Verlust eines Versicherers als diskrete Zufallsgröße, führt deren Varianz als wichtigen Parameter ein und deutet sie als Risikomaß. Für verschiedene Typen von Lebensversicherungen berechnet er diese Größe; die entsprechenden Formeln wurden in der Lehrbuchliteratur als die HAUSDORFFSchen Beziehungen bezeichnet. Ferner gibt er einen ersten korrekten Beweis des HATTENDORFFSchen Theorems, welches heute in der Theorie des Deckungskapitals von besonderer Bedeutung ist. In *Beiträge zur Wahrscheinlichkeitsrechnung* führte HAUSDORFF den Begriff der bedingten Wahrscheinlichkeit als einen grundlegenden Begriff der Theorie ein (implizit war dieser Begriff natürlich schon lange verwendet worden) und klärte das Wesen des damals viel umstrittenen „BAYESSchen Prinzips“. Er führte unabhängig von TH. N. THIELE die Semiinvarianten ein und gab eine elegante Herleitung der Gram-Charlier-Reihen vom Typ A. Ein von ihm konstruiertes spezielles Beispiel hat später P. LÉVY zu einer wichtigen Vermutung über die Zerlegung normalverteilter Zufallsgrößen in Summanden geführt, die dann von H. CRAMÉR bewiesen werden konnte.

In seinem Hauptwerk *Grundzüge der Mengenlehre* (Band II dieser Edition) gab HAUSDORFF einen ersten korrekten Beweis des starken Gesetzes der großen Zahl von BOREL. Aus dem Nachlaß werden im vorliegenden Band mehrere Faszikel abgedruckt, die sich mit dem Gesetz der großen Zahl und mit dessen Anwendungen auf die asymptotische Verteilung der Ziffern in g -adischen Brüchen und auf Verteilungsfragen bei der Cantor-Darstellung reeller Zahlen und bei Kettenbrüchen befassen. In Faszikel 861 aus dem Jahre 1915 führt HAUSDORFF ein System von Orthogonalfunktionen ein, das 1922 auch von RADEMACHER eingeführt worden ist und heute nach RADEMACHER benannt wird. Weitere für den Abdruck ausgewählte Faszikel befassen sich mit Iterationen (Runs), großen Abweichungen, einer Verallgemeinerung der TSCHEBYSCHEFFSchen Ungleichung für unimodale Verteilungen sowie mit einer Ungleichung von GUMBEL.

Von besonderem historischen Interesse ist die Vorlesung über Wahrscheinlichkeitsrechnung vom Sommersemester 1923. Sie ist, verglichen mit der damals existierenden Lehrbuchliteratur, ausgesprochen modern, und man kann es nur bedauern, daß HAUSDORFF diese Vorlesung nicht publiziert hat.

Den Abschluß des wahrscheinlichkeitstheoretischen Teiles von Band V bilden zwei Briefe HAUSDORFFS an RICHARD VON MISES aus dem Jahre 1919 mit einer grundsätzlichen Kritik des VON MISESSchen Kollektivbegriffs und des damit verbundenen Versuchs einer axiomatischen Begründung der Wahrscheinlichkeitstheorie.

Im Anhang des Bandes werden zwei nachgelassene Abhandlungen von CHRISTIAN HUYGENS abgedruckt, die HAUSDORFF 1903 in Ostwalds Klassikern ediert und mit ausführlichen Anmerkungen versehen hat.

Hinweise für den Leser

Im Anschluß an diese Hinweise findet sich ein vollständiges Schriftenverzeichnis HAUSDORFFS. Alle Literaturangaben in den Kommentaren mit der Abkürzung H, wie z. B. [H 1896], beziehen sich auf dieses Schriftenverzeichnis. HAUSDORFFS Arbeiten sind in den Literaturverzeichnissen nicht noch einmal aufgeführt. Die in diesem Band abgedruckten Arbeiten sind im Schriftenverzeichnis mit einem Stern versehen.

Die aus dem Nachlaß publizierten Faszikel sind wortgetreu wiedergegeben (mit Ausnahme heute nicht mehr gebräuchlicher mengentheoretischer Symbole; s. dazu S. 722). Von HAUSDORFF unterstrichene Worte oder Textstellen sind kursiv gedruckt. Der Übergang zu einem neuen Blatt im Original ist im Abdruck durch einen senkrechten Strich gekennzeichnet; am Rand ist in dieser Zeile die Nummer des neuen Blattes vermerkt.

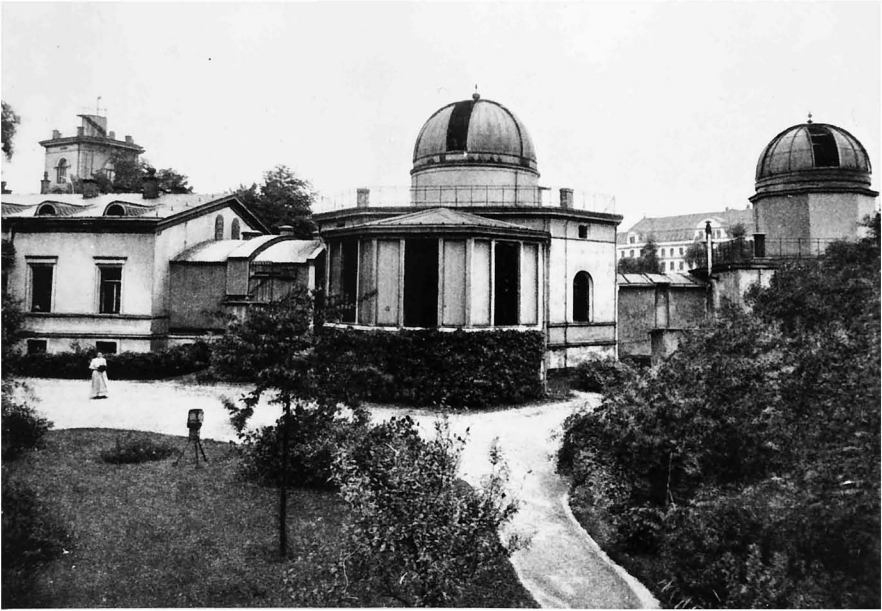
Der gesamte Nachlaß HAUSDORFFS ist katalogisiert. Die angegebenen Faszikelnummern beziehen sich stets auf diesen Nachlaßkatalog (*Findbuch Nachlaß HAUSDORFF*). Steht die Überschrift eines Nachlaßstückes in eckigen Klammern, stammt sie vom Verfasser des Katalogs, weil HAUSDORFF im Original keine Überschrift angegeben hat. Ist die Überschrift ohne Klammern gesetzt, stammt sie von HAUSDORFF selbst. Das gleiche gilt für Orts- und Zeitangaben.

Der Nachlaßkatalog mit bibliothekarischen und inhaltlichen Beschreibungen ist im Internet zugänglich unter www.aic.uni-wuppertal.de/fb7/hausdorff.

Danksagung

Das Erscheinen des Bandes V der gesammelten Werke FELIX HAUSDORFFS ist uns Anlaß, denen zu danken, die dieses Werk gefördert haben und weiter fördern. Der Deutschen Forschungsgemeinschaft danken wir dafür, daß sie durch ihre Unterstützung diese Edition ermöglicht hat. Der Nordrhein-Westfälischen Akademie der Wissenschaften gebührt unser besonderer Dank für die weitere finanzielle Förderung der Edition ab Beginn des Jahres 2002 und für den großzügig gewährten Druckkostenzuschuß. Schließlich danken wir den Editoren des vorliegenden Bandes für ihre selbstlose Arbeit und dem Springer-Verlag für die angenehme Zusammenarbeit und für die gute Ausstattung des Werkes.

Egbert Brieskorn
Friedrich Hirzebruch
Reinhold Remmert
Walter Purkert
Erhard Scholz



Sternwarte der Universität Leipzig im Johannistal

Die Aufnahme stammt aus dem Zeitraum 1886-1912. Sie zeigt also die Sternwarte zu der Zeit, als Felix Hausdorff an dieser Institution tätig war, von Februar 1893 bis Februar 1895 sogar in einer (vermutlich bezahlten) Anstellung als Rechner. 1912 wurde eine der Kuppeln durch eine neue ersetzt. Heute sind die Kuppeln und die Gebäude im Vordergrund verschwunden, nur das Gebäude mit dem viereckigen Turm links im Hintergrund ist noch vorhanden.

*Quelle: Ilgands, H.-J.; Münzel, G.:
Die Leipziger Universitätssternwarten auf der Pleißenburg
und im Johannistal. Beucha 1995, S. 30*

Schriftenverzeichnis Felix Hausdorffs

einschließlich der unter dem Pseudonym
Paul Mongré veröffentlichten Schriften

- * [H 1891] *Zur Theorie der astronomischen Strahlenbrechung* (Dissertation). Ber. über die Verhandlungen der Königl. Sächs. Ges. der Wiss. zu Leipzig. Math.-phys. Classe 43 (1891), 481–566.
- * [H 1893] *Zur Theorie der astronomischen Strahlenbrechung II, III*. Ber. über die Verhandlungen der Königl. Sächs. Ges. der Wiss. zu Leipzig. Math.-phys. Classe 45 (1893), 120–162, 758–804.
- * [H 1895] *Über die Absorption des Lichtes in der Atmosphäre* (Habilitationsschrift). Ber. über die Verhandlungen der Königl. Sächs. Ges. der Wiss. zu Leipzig. Math.- phys. Classe 47 (1895), 401–482.
- * [H 1896] *Infinitesimale Abbildungen der Optik*. Ber. über die Verhandlungen der Königl. Sächs. Ges. der Wiss. zu Leipzig. Math.- phys. Classe 48 (1896), 79–130.
- * [H 1897a] *Das Risiko bei Zufallsspielen*. Ber. über die Verhandlungen der Königl. Sächs. Ges. der Wiss. zu Leipzig. Math.- phys. Classe 49 (1897), 497–548.
- [H 1897b] (Paul Mongré) *Sant' Ilario – Gedanken aus der Landschaft Zarathustras*. Verlag C.G.Naumann, Leipzig. VIII + 379 S. Wiederabdruck des Gedichts „Der Dichter“ und der Aphorismen 293, 309, 313, 324, 325, 337, 340, 346, 349 in *Der Zwiebelfisch* 3 (1911), S. 80 u. 88–90.
- [H 1897c] (Paul Mongré) *Sant' Ilario – Gedanken aus der Landschaft Zarathustras*. Selbstanzeige. Die Zukunft, 20.11.1897, 361.
- [H 1898a] (Paul Mongré) *Das Chaos in kosmischer Auslese – Ein erkenntniskritischer Versuch*. Verlag C. G. Naumann, Leipzig. VI und 213 S.
- [H 1898b] (Paul Mongré) *Massenglück und Einzelglück*. Neue Deutsche Rundschau (Freie Bühne) 9 (1), (1898), 64–75.
- [H 1898c] (Paul Mongré) *Das unreinliche Jahrhundert*. Neue Deutsche Rundschau (Freie Bühne) 9 (5), (1898), 443–452.
- [H 1898d] (Paul Mongré) *Stirner*. Die Zeit 213, 29.10.1898, 69–72.

- [H 1899a] *Analytische Beiträge zur nichteuklidischen Geometrie*. Ber. über die Verhandlungen der Königl. Sächs. Ges. der Wiss. zu Leipzig. Math.-phys. Classe 51 (1899), 161–214.
- [H 1899b] (Paul Mongré) *Tod und Wiederkunft*. Neue Deutsche Rundschau (Freie Bühne) 10 (12), (1899), 1277–1289.
- [H 1899c] (Paul Mongré) *Das Chaos in kosmischer Auslese*. Selbstanzeige. Die Zukunft 8 (5), (1899), 222–223.
- [H 1900a] (Paul Mongré) *Ekstasen*. Gedichtband. Verlag H.Seemann Nachf., Leipzig. 216 S.
- [H 1900b] *Zur Theorie der Systeme komplexer Zahlen*. Ber. über die Verhandlungen der Königl. Sächs. Ges. der Wiss. zu Leipzig. Math.-phys. Classe 52 (1900), 43–61.
- [H 1900c] (Paul Mongré) *Nietzsches Wiederkunft des Gleichen*. Die Zeit 292, 5.5. 1900, 72–73.
- [H 1900d] (Paul Mongré) *Nietzsches Lehre von der Wiederkunft des Gleichen*. Die Zeit 297, 9.6.1900, 150–152.
- * [H 1901a] *Beiträge zur Wahrscheinlichkeitsrechnung*. Ber. über die Verhandlungen der Königl. Sächs. Ges. der Wiss. zu Leipzig. Math.-phys. Classe 53 (1901), 152–178.
- [H 1901b] *Über eine gewisse Art geordneter Mengen*. Ber. über die Verhandlungen der Königl. Sächs. Ges. der Wiss. zu Leipzig. Math.-phys. Classe 53 (1901), 460–475. Englische Übersetzung in Plotkin, J. M. (Hrsg.): *Hausdorff on Ordered Sets*. American Mathematical Society, Providence (Rhode Island) 2005, 11–22.
- [H 1902a] (Paul Mongré) *Der Schleier der Maja*. Neue Deutsche Rundschau (Freie Bühne) 13 (9), (1902), 985–996.
- [H 1902b] (Paul Mongré) *Der Wille zur Macht*. Neue Deutsche Rundschau (Freie Bühne) 13 (12) (1902), 1334–1338.
- [H 1902c] (Paul Mongré) *Max Klingers Beethoven*. Zeitschrift für bildende Kunst, Neue Folge 13 (1902), 183–189.
- [H 1902d] (Paul Mongré) *Offener Brief gegen G.Landauers Artikel 'Die Welt als Zeit'*. Die Zukunft 10 (37), 14.6.1902, 441–445.
- [H 1902e] *W. Ostwald: Vorlesungen über Naturphilosophie* (Besprechung). Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht 33 (1902), 190–193.

- [H 1903a] *Das Raumproblem* (Antrittsvorlesung an der Universität Leipzig, gehalten am 4.7.1903). Ostwalds Annalen der Naturphilosophie 3 (1903), 1–23.
- [H 1903b] (Paul Mongré) *Sprachkritik*. Neue Deutsche Rundschau (Freie Bühne) 14 (12), (1903), 1233–1258.
- * [H 1903c] *Christian Huygens' nachgelassene Abhandlungen: Über die Bewegung der Körper durch den Stoss. Über die Centrifugalkraft*. Herausgegeben von Felix Hausdorff. 79 Seiten, mit Anmerkungen Hausdorffs auf den Seiten 63–79. Verlag W.Engelmann, Leipzig 1903. Unveränderter Nachdruck: Akademische Verlagsgesellschaft m. b. H., Leipzig, ohne Jahresangabe.
- [H 1903d] *J. B. Stallo: Die Begriffe und Theorien der modernen Physik* (Besprechung). Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht 34 (1903), 138–142.
- * [H 1903e] *W. Grossmann: Versicherungsmathematik* (Besprechung). Zeitschr. für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht 34 (1903), 361.
- * [H 1903f] *M. Kitt: Grundlinien der politischen Arithmetik* (Besprechung). Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht 34 (1903), 361.
- [H 1904a] *Der Potenzbegriff in der Mengenlehre*. Jahresbericht der DMV 13 (1904), 569–571. Engl. Übers. in Plotkin, a. a. O. (s. [H 1901b]), 31–33.
- [H 1904b] *Eine neue Strahlengeometrie* (Besprechung von E.Study: *Geometrie der Dynamen*). Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht 35 (1904), 470–483.
- [H 1904c] (Paul Mongré) *Gottes Schatten*. Die neue Rundschau (Freie Bühne) 15 (1), (1904), 122–124.
- [H 1904d] (Paul Mongré) *Der Arzt seiner Ehre, Grotteske*. Die neue Rundschau (Freie Bühne) 15 (8), (1904), 989–1013. Neuherausgabe als: *Der Arzt seiner Ehre. Komödie in einem Akt mit einem Epilog*. Mit 7 Bildnissen, Holzschnitte von Hans Alexander Müller nach Zeichnungen von Walter Tiemann, 10 Bl., 71 S. Fünfte ordentliche Veröffentlichung des Leipziger Bibliophilen-Abends, Leipzig 1910. Neudruck: S.Fischer, Berlin 1912, 88 S.
- [H 1904e] (Paul Mongré) *Max Klinger, Beethoven*. Begleittext zur Abbildung der Klingerschen Skulptur in: *Meister der Farbe. Beispiele der gegenwärtigen Kunst in Europa. Mit begleitenden Texten*. E. A. Seemann, Leipzig 1904, Abb. Nr. 4.

- [H 1905] *B. Russell, The principles of mathematics* (Besprechung). Vierteljahresschrift für wissenschaftliche Philosophie und Sociologie 29 (1905), 119–124.
- [H 1906a] *Die symbolische Exponentialformel in der Gruppentheorie*. Ber. über die Verhandlungen der Königl. Sächs. Ges. der Wiss. zu Leipzig. Math.-phys. Klasse 58 (1906), 19–48.
- [H 1906b] *Untersuchungen über Ordnungstypen I, II, III*. Ber. über die Verhandlungen der Königl. Sächs. Ges. der Wiss. zu Leipzig. Math.-phys. Klasse 58 (1906), 106–169. Engl. Übers. in Plotkin, a. a. O. (s. [H 1901b]), 35–95.
- [H 1907a] *Untersuchungen über Ordnungstypen IV, V*. Ber. über die Verhandlungen der Königl. Sächs. Ges. der Wiss. zu Leipzig. Math.-phys. Klasse 59 (1907), 84–159. Engl. Übers. in Plotkin, a. a. O. (s. [H 1901b]), 97–171.
- [H 1907b] *Über dichte Ordnungstypen*. Jahresbericht der DMV 16 (1907), 541–546. Engl. Übers. in Plotkin, a. a. O. (s. [H 1901b]), 175–180.
- [H 1908] *Grundzüge einer Theorie der geordneten Mengen*. Math. Annalen 65 (1908), 435–505. Engl. Übers. in Plotkin, a. a. O. (s. [H 1901b]), 197–258.
- [H 1909a] *Die Graduierung nach dem Endverlauf*. Abhandlungen der Königl. Sächs. Ges. der Wiss. zu Leipzig. Math.-phys. Klasse 31 (1909), 295–334. Engl. Übers. in Plotkin, a. a. O. (s. [H 1901b]), 271–301.
- [H 1909b] *Zur Hilbertschen Lösung des Waringschen Problems*. Math. Annalen 67 (1909), 301–305.
- [H 1909c] (Paul Mongré) *Strindbergs Blaubuch*. Die neue Rundschau (Freie Bühne) 20 (6), (1909), 891–896.
- [H 1910a] (Paul Mongré) *Der Komet*. Die neue Rundschau (Freie Bühne) 21 (5), (1910), 708–712.
- [H 1910b] (Paul Mongré) *Andacht zum Leben*. Die neue Rundschau (Freie Bühne) 21 (12), (1910), 1737–1741.
- [H 1911] *E. Landau, Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen* (Besprechung). Jahresbericht der DMV 20 (1911), 2. Abteilung, IV Literarisches, 1. b. Besprechungen, 92–97.
- [H 1912] (Paul Mongré) *Biologisches*. Licht und Schatten 3 (1912/13), H. 35 (unpaginiert).
- [H 1914a] *Grundzüge der Mengenlehre*. Verlag Veit & Co, Leipzig. 476 S. mit 53 Figuren. Nachdrucke: Chelsea Pub. Co. 1949, 1965, 1978.

- [H 1914b] *Bemerkung über den Inhalt von Punktmengen.* Math. Annalen 75 (1914), 428–433.
- [H 1916] *Die Mächtigkeit der Borelschen Mengen.* Math. Annalen 77 (1916), 430–437.
- [H 1917] *Selbstanzeige von Grundzüge der Mengenlehre.* Jahresber. der DMV 25 (1917), Abt. Literarisches, 55–56.
- [H 1919a] *Dimension und äußeres Maß.* Math. Annalen 79 (1919), 157–179.
- [H 1919b] *Der Wertvorrat einer Bilinearform.* Math. Zeitschrift 3 (1919), 314–316.
- [H 1919c] *Zur Verteilung der fortsetzbaren Potenzreihen.* Math. Zeitschrift 4 (1919), 98–103.
- [H 1919d] *Über halbstetige Funktionen und deren Verallgemeinerung.* Math. Zeitschrift 5 (1919), 292–309.
- [H 1921] *Summationsmethoden und Momentfolgen I, II.* Math. Zeitschrift 9 (1921), I: 74–109, II: 280–299.
- [H 1923a] *Eine Ausdehnung des Parsevalschen Satzes über Fourierreihen.* Math. Zeitschrift 16 (1923), 163–169.
- [H 1923b] *Momentprobleme für ein endliches Intervall.* Math. Zeitschrift 16 (1923), 220–248.
- [H 1924] *Die Mengen G_δ in vollständigen Räumen.* Fundamenta Mathematicae 6 (1924), 146–148.
- [H 1925] *Zum Hölderschen Satz über $\Gamma(x)$.* Math. Annalen 94 (1925), 244–247.
- [H 1927a] *Mengenlehre*, zweite, neubearbeitete Auflage. Verlag Walter de Gruyter & Co., Berlin. 285 S. mit 12 Figuren. 1937 erschien in Moskau: F. Hausdorff: *Teoria mnoshestvch* (Mengentheorie). Kapitel 1–5 dieses Buches sind eine Übersetzung der entsprechenden Kapitel von [H 1927a], die restlichen Kapitel haben Alexandroff und Kolmogoroff neu verfaßt.
- [H 1927b] *Beweis eines Satzes von Arzelà.* Math. Zeitschrift 26 (1927), 135–137.
- [H 1927c] *Lipschitzsche Zahlensysteme und Studysche Nablafunktionen.* Journal für reine und angewandte Mathematik 158 (1927), 113–127.
- [H 1930a] *Die Äquivalenz der Hölderschen und Cesàroschen Grenzwerte negativer Ordnung.* Math. Zeitschrift 31 (1930), 186–196.

- [H 1930b] *Erweiterung einer Homöomorphie*. *Fundamenta Mathematicae* 16 (1930), 353–360.
- [H 1930c] *Akrostichon zum 24. Februar 1930*. In: Walter Tiemann (Hrsg.) *Der Verleger von morgen, wie wir ihn wünschen*. Verlag der Freunde Kirsteins, Leipzig, 1930, S.9.
- [H 1931] *Zur Theorie der linearen metrischen Räume*. *Journal für reine und angewandte Mathematik* 167 (1931/32), 294–311.
- [H 1932] *Eduard Study*. Worte am Sarge Eduard Studys, 9. Januar 1930. Chronik der Rheinischen Friedrich Wilhelms-Universität zu Bonn für das akademische Jahr 1929/30. Bonner Universitäts-Buchdruckerei Gebr. Scheur, Bonn 1932.
- [H 1933a] *Zur Projektivität der δ s-Funktionen*. *Fundamenta Mathematicae* 20 (1933), 100–104.
- [H 1933b] *Problem 58*. *Fundamenta Mathematicae* 20 (1933), 286.
- [H 1934] *Über innere Abbildungen*. *Fundamenta Mathematicae* 23 (1934), 279–291.
- [H 1935a] *Mengenlehre*, dritte Auflage. Mit einem zusätzlichen Kapitel und einigen Nachträgen. Verlag Walter de Gruyter & Co., Berlin. 307 S. mit 12 Figuren. Nachdruck: Dover Pub. New York, 1944. Englische Ausgabe: Set theory. Übersetzung aus dem Deutschen von J.R.Aumann et al. Chelsea Pub. Co., New York 1957, 1962, 1967.
- [H 1935b] *Gestufte Räume*. *Fundamenta Mathematicae* 25 (1935), 486–502.
- [H 1935c] *Problem 62*. *Fundamenta Mathematicae* 25 (1935), 578.
- [H 1936a] *Über zwei Sätze von G.Fichtenholz und L.Kantorovitch*. *Studia Mathematica* 6 (1936), 18–19.
- [H 1936b] *Summen von \aleph_1 Mengen*. *Fundamenta Mathematicae* 26 (1936), 241–255. Engl. Übers. in Plotkin, a. a. O. (s. [H 1901b]), 305–316.
- [H 1937] *Die schlichten stetigen Bilder des Nullraums*. *Fundamenta Mathematicae* 29 (1937), 151–158.
- [H 1938] *Erweiterung einer stetigen Abbildung*. *Fundamenta Mathematicae* 30 (1938), 40–47.
- [H 1969] *Nachgelassene Schriften*. 2 Bände. Ed.: G. BERGMANN, Teubner, Stuttgart 1969. Band I enthält aus dem Nachlaß die Faszikel 510–543, 545–559, 561–577, Band II die Faszikel 578–584, 598–658 (alle Faszikel sind im Faksimiledruck wiedergegeben).

Inhaltsverzeichnis

Teil I. Astronomie und Optik

A. Veröffentlichte Arbeiten

Zur Theorie der astronomischen Strahlenbrechung (Dissertation).....	3
Zur Theorie der astronomischen Strahlenbrechung II, III	91
Über die Absorption des Lichtes in der Atmosphäre (Habilitationsschrift)	213
Infinitesimale Abbildungen der Optik	313

B. Arbeiten aus dem Nachlaß

Die Vorlesung „Figur und Rotation der Himmelskörper“ (1895/96).....	381
Hausdorffs Notizen über mittlere Bewegung	401

Teil II. Wahrscheinlichkeitstheorie

A. Veröffentlichte Arbeiten

Das Risiko bei Zufallsspielen	443
Beiträge zur Wahrscheinlichkeitsrechnung	527
W. Grossmann: Versicherungsmathematik (Besprechung)	591
M. Kitt: Grundlinien der politischen Arithmetik (Besprechung)	591

B. Arbeiten aus dem Nachlaß

Vorlesung „Wahrscheinlichkeitsrechnung“ (1923)	595
[Rademacher-Funktionen]	757
[Asymptotische Verteilung der Ziffern in einem g -adischen Bruch]	761
[Starkes Gesetz der großen Zahl; Cantor-Darstellung reeller Zahlen]	768
[Große Abweichungen]	776
Kettenbrüche	791
Iterationen	799
Verschärfung der Tschebyscheffschen Ungleichung	805
[Gleichheit f. ü. von Zufallsvariablen; Unabhängigkeit]	818
Kai-Lai Chung, Sur un théorème de M. Gumbel	820
Zwei Briefe Felix Hausdorffs an Richard von Mises	825

Anhang

Christian Huygens' nachgelassene Abhandlungen: Über die Bewegung der Körper durch den Stoss. Über die Centrifugalkraft. Herausgegeben und mit Anmerkungen versehen von Felix Hausdorff	835
Personenregister	919
Sachregister	927

Teil I. Astronomie und Optik

Zur Theorie der astronomischen Strahlenbrechung
(Dissertation).

Ber. über die Verhandlungen der Königl. Sächs. Ges. der Wiss. zu
Leipzig. Math.-phys. Classe **43**, 481–566.

[H 1891]

Felix Hausdorff, *Zur Theorie der astronomischen Strahlenbrechung*.

1. Die vorliegende Arbeit steht im engsten Zusammenhange mit der von Herrn BRUNS unlängst in den Berichten der K. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften (Sitzung vom 23. April 1894) veröffentlichten Abhandlung: *Zur Theorie der astronomischen Strahlenbrechung*¹⁾. Der dort auseinandergesetzte Gedankengang führte insofern zu einer Umkehrung des bisher gebräuchlichen Verfahrens, als er den meteorologischen Theil ans Ende, den rein astronomischen an den Anfang der Untersuchung verlegt; als das hypothetische Element, das nun einmal nicht zu umgehen ist, wird nicht, wie bisher, die empirisch noch wenig erforschte Constitution der Atmosphäre, sondern die analytische Form des Refractionsausdruckes angesetzt, die mit hinlänglich genau bekannten, beobachteten Refractionswerthen ohne Zwischenrechnung verglichen und hinterher erst zur Ableitung der zugehörigen meteorologischen Annahmen benutzt wird. Refractionsbeobachtungen stellen sich hiernach als Ausgangspunkt dar zur Bestimmung der mittleren verticalen Temperaturänderung in freier Luft, und zugleich vereinfacht sich die Aufgabe, solche Beobachtungen zu reduciren und zur Construction von Tafeln heranzuziehen, in dem Sinne, dass jeder analytische Ausdruck, der gewissen Bedingungen genügt und sich dem numerischen Verlaufe der vorgelegten Refraction eng genug anschliesst, als eine brauchbare Lösung anzusehen ist. In beiden Beziehungen nun erscheint eine etwas erweiterte Durcharbeitung des Themas wünschens-

1) Der Kürze halber soll diese Abhandlung, auf die im Folgenden durchgängig Bezug genommen wird, unter der Bezeichnung (*HB*) citirt werden.

werth, gegentüber derjenigen Behandlungsweise, die zur Grundlegung der Methode nothwendig und hinreichend war. Bezüglich der physikalischen Anwendung darf die Frage nicht ausser Acht gelassen werden, welchen Grad von Zuverlässigkeit die aus Refractionsbeobachtungen abgeleitete Constitution der Atmosphäre beanspruchen darf. Diese Frage lässt sich kaum theoretisch, wohl aber praktisch entscheiden, indem man die interpolatorische Darstellung der Refraction auf möglichst viele und verschiedene Arten versucht und die daraus folgenden Temperaturabnahmen berechnet: stimmen die erhaltenen Zahlen hinlänglich nahe überein, so ist das Urtheil gerechtfertigt, dass der Erfolg unserer Methode »von der benutzten Formel nur in untergeordneter Weise, wesentlich dagegen von der Beschaffenheit des Beobachtungsmaterials beeinflusst wird« (*HJB* p. 210). Aber auch im rein astronomischen Interesse wäre es zu wünschen, ebensowohl über eine Mehrheit hinlänglich zuverlässiger Refractionstafeln als über verschiedene hinlänglich biegsame Anschlussformeln verfügen zu können, da die Möglichkeit nicht von vornherein ausgeschlossen ist, dass zwischen einer bestimmten Formel und einer bestimmten Tafel durch zufällige Umstände ein guter Anschluss zum Vorschein kommt, der unter anderen Umständen ausgeblieben wäre. Eine Vermuthung dieser Art dürfte z. B. hinsichtlich der eingliedrigen unvollständigen Formel von TH. v. OPPOLZER erlaubt sein, die von allen Refractionstafeln in den höheren Zenithdistanzen systematisch abweicht, ausser von der BESSEL'schen, bei der sich die systematische Natur der Widersprüche nicht erkennen lässt. Nur die Prüfung einer Mehrzahl von Interpolationsformeln gestattet den Inductionsschluss, dass sich, sei es durch eine unter ihnen selbst oder aus ihrer analytischen Nachbarschaft, jedem bereits vorhandenen oder künftig zu erwartenden Refractionsmaterial in seinem ganzen Umfange eine erschöpfende analytische Darstellung geben lässt.

Von dem hiermit skizzirten Programm bringt nachstehende Arbeit den ersten Theil zur Ausführung. Sie enthält eine Reihe von Anschlüssen an die mittlere Refraction, sowie die zugehörigen Formeln für Brechungsindex und Lufttemperatur; die rechnerische Durcharbeitung dieses zweiten, meteorologischen Theiles, sowie die Berücksichtigung periodischer Glieder und variabler Elemente, bleibt einer späteren Veröffentlichung vorbehalten. Die Anschlüsse sind nach dem Charakter der benutzten Formel

in drei Gruppen getheilt, die durch besondere Ueberschriften gekennzeichnet sind. Vorher ist noch Folgendes zu bemerken.

Die zur Vergleichung dienenden Refractionstafeln sind dieselben, die auch in *(HB)* benutzt worden sind, jedoch mit folgenden Modificationen. Als gemeinsames Vergleichsobject aller Anschlüsse wurde nur die a. a. O. mit *(G)* bezeichnete mittlere Refraction nach GYLDÉN (Pulkowaer Tafeln) beibehalten; hingegen wurde, nachdem zwei verschiedene Versuche das gleiche negative Resultat ergeben hatten, auf die mittlere Refraction der Tabulae Regiomontanae *(B)* vorläufig verzichtet. Wahrscheinlich wird erst eine Neubearbeitung der ARGELANDER'schen Beobachtungen zu einem wesentlich besseren Erfolge führen. — An Stelle der ausgeschiedenen BESSEL'schen Refraction konnte, wenigstens für den grösseren Theil der Rechnungen, die von Herrn RADAU in seinem »Essai sur les réfractions astronomiques« (Paris 1889) tabulirte mittlere Refraction, gültig für 0° Lufttemperatur und 760 mm Druck bei 0° Quecksilbertemperatur, herangezogen werden, die wie *(G)* theoretischen Ursprungs ist und im Folgenden mit *(R)* bezeichnet werden soll. — Was endlich die Refraction *(O)*, nämlich die im Zenith und Horizont an *(B)* angeschlossene v. OPPOLZER'sche Formel, anbelangt, so erleidet ihre Anwendung eine natürliche Ausnahme in den Fällen, wo die zu untersuchende Anschlussformel selbst aus KRAMP'schen Functionen zusammengesetzt ist. Ueberdies wurde, womit sachlich kein Unterschied verbunden ist, an Stelle von *(O)* eine nach derselben Formel, aber mit etwas anderen Constanten gerechnete Refraction *(OB)* gesetzt, die mit *(B)* und *(O)* zwar in der Zenithconstante *Z* übereinstimmt, aber im Horizont um 4",66 differirt; über ihre Entstehung giebt § 3 Auskunft. Die folgende Tafel I vereinigt für eine Reihe von Zenithdistanzen ϑ die Werthe von *(B)* mit den neu eingeführten *(OB)* und *(R)*; zur Vergleichung sind den Differenzen *(B) — (OB)* die Differenzen *(OB) — (O)* hinzugefügt. *(G)* findet sich an einer späteren Stelle.

Tafel I.

ϑ	(B)	(OB)	(R)	(B) — (OB)	(OB) — (O)
10° 0'	10',18	10',18	10',65	0',00	0',00
20 0	21,02	21,02	21,98	0,00	0,00
30 0	33,33	33,33	34,86	0,00	0,00
40 0	48,42	48,42	50,64	0,00	0,00
50 0	68,71	68,71	71,86	0,00	0,00
60 0	99,67	99,67	104,26	0,00	0,00
70 0	157,27	157,29	164,58	— 0,02	+ 0,02
75 0	212,09	212,13	222,07	— 0,04	0,02
80 0	316,16	316,22	334,40	— 0,06	0,05
84 0	349,28	349,35	366,29	— 0,07	0,06
82 0	389,63	389,68	408,77	— 0,05	0,08
83 0	439,69	439,74	464,56	— 0,02	0,11
84 0	503,31	503,27	528,70	+ 0,04	0,17
85 0	586,5	586,27	616,53	+ 0,23	0,25
10	603,3	602,59	633,83	+ 0,71	0,27
20	621,2	619,77	652,04	+ 1,43	0,29
30	639,6	637,87	674,24	+ 1,73	0,31
40	658,6	656,95	691,47	+ 1,65	0,33
50	678,3	677,11	712,85	+ 1,19	0,36
86 0	698,9	698,44	735,45	+ 0,49	0,39
10	720,7	720,95	759,39	— 0,25	0,42
20	743,7	744,85	784,77	— 1,15	0,46
30	768,3	770,24	811,74	— 1,91	0,50
40	795,0	797,15	840,33	— 2,15	0,54
50	823,7	825,82	870,80	— 2,12	0,59
87 0	854,6	856,38	903,28	— 1,78	0,64
10	887,8	889,01	937,98	— 1,21	0,70
20	923,4	923,89	975,04	— 0,49	0,77
30	960,9	961,25	1014,76	— 0,35	0,85
40	1000,7	1001,33	1057,32	— 0,63	0,94
50	1043,0	1044,39	1103,10	— 1,39	1,03
88 0	1088,6	1090,77	1152,36	— 2,17	1,14
10	1138,0	1140,84	1205,44	— 2,84	1,27
20	1191,9	1194,90	1262,79	— 3,00	1,41
30	1250,9	1253,49	1324,92	— 2,59	1,57
40	1315,6	1317,09	1392,18	— 1,49	1,75
50	1386,7	1386,30	1465,29	+ 0,40	1,96
89 0	1464,6	1464,78	1544,91	+ 2,82	2,20
10	1549,8	1544,29	1631,70	+ 5,51	2,47
20	1642,7	1634,75	1726,57	+ 7,95	2,79
30	1743,5	1734,14	1830,43	+ 9,36	3,16
40	1852,3	1843,65	1944,42	+ 8,65	3,58
50	1969,2	1964,66	2069,68	+ 4,54	4,08
90 0	2094,1	2098,76	2207,68	— 4,66	+ 4,66

Der Partialbruch.

2. Im vorliegenden Abschnitt wird eine Versuchsreihe zu Ende geführt, die der Hauptsache nach bereits in der Arbeit des Herrn BRUNS ihre Erledigung gefunden hat. Die Partialbruchformel

$$(1.) \quad R = H \cotg \frac{\psi}{2} \frac{1 + \frac{n''}{n} u}{N},$$

worin die Bezeichnungen

$$N = 1 + n' u + n'' u^2,$$

$$u = \cotg \psi \cotg \frac{\psi}{2},$$

$$\tg \psi = \sin \varphi \tg \vartheta,$$

$$H \sin \varphi = Zn$$

eingeführt und Z, H, φ, n', n'' die fünf disponiblen Parameter sind, soll, der in (H B) § 9 gegebenen Vorschrift entsprechend, durch Einführung der Zwangsbedingung

$$(2.) \quad U = n'' \left(1 + \frac{2}{n} - \frac{n'}{n} \right) - 1 = 0$$

von einem Parameter befreit und in dieser Gestalt nicht nur an (G), (OB) und (R), sondern auch an die davon wesentlich verschiedene Refraction (B) angeschlossen werden. Bezüglich der letzteren ist daran zu erinnern, dass die ausserordentliche Biegsamkeit der Formel (1.) zwar ein Constantensystem aufzufinden gestattete, das selbst an den durch Fehlerreste entstellten Verlauf der (B) einen engen Anschluss bewirkt, und dass dieser Anschluss durch Einführung der Bedingung (2.) verschlechtert wird, dass aber in Wirklichkeit gerade die letztere Darstellung den Vorzug verdienen dürfte, eben weil sie die übergrosse Nachgiebigkeit der Partialbruchformel auch gegen fehlerhaftes Zahlenmaterial einschränkt. Dass sich zu diesem Zwecke gerade die Bedingung (2.) eignet, wird durch das Verhalten der gesetzmässiger verlaufenden Refractionen (OB), (G) und (R) nahe gelegt.

Zur ersten Bestimmung der Parameterwerthe ist an der genannten Stelle ein Verfahren entwickelt, von dem im Folgenden

kein Gebrauch gemacht werden soll. Es hat sich bei verschiedenen Versuchen herausgestellt, dass der Anschluss an die höheren Zenithconstanten $Z', Z'' \dots$, d. h. an die Coefficienten der Tangentenentwicklung

$$R = Z \operatorname{tg} \vartheta - Z' \operatorname{tg} \vartheta^3 + Z'' \operatorname{tg} \vartheta^5 - \dots,$$

ziemlich grosse Differenzen in den Refractionen der höheren Zenithdistanzen übrig lässt, während umgekehrt eine Verkleinerung dieser Differenzen zwar eine Abweichung in den $Z', Z'' \dots$, jedoch keine irgendwie merkliche Verschlechterung des Anschlusses in den niederen Zenithdistanzen zur Folge hat. Da dieser Sachverhalt nicht ohne Interesse ist und bei allen Anschlussversuchen wiederkehrt, mag er hier durch einige Zahlenbeispiele belegt werden. Die Werthe von Z, Z', Z'', H in den vier betrachteten Fällen sind ¹⁾

	(B)	(OB)	(G)	(R)
Log Z	4,764560	4,764560	4,760320	4,784009
Log Z'	8,84044	8,836874	8,82705	8,825249
Log Z''	6,3500	6,38934	6,3400	6,32584
Log H	3,320997	3,324963	3,344860	3,343936

Die Zenithconstanten von (R) waren unmittelbar der RADAU'schen Arbeit zu entnehmen (p. 36); für (OB) folgen sie aus der semi-convergenten Entwicklung der KRAMP'schen Function; für (B) und (G) endlich wurden in einer Reihe von Zenithdistanzen zwischen 60° und 80° mit den Tafelwerthen die betreffenden Gleichungen angesetzt und durch Mittelbildung rohe Werthe von Z' und Z'' hergeleitet. Log Z' ist höchstens auf 4, Log Z'' kaum auf 3 Stellen sicher. Die Abweichung in den Zenithconstanten zweier Refractionen, die bis zu 80° fast genau mit einander übereinstimmen, erstreckt sich aber, wie die Vergleichung zwischen (B) und (OB) zeigt, auch auf die noch leidlich sicheren Decimalen; ebenso ergeben die nachher abzuleitenden definitiven Anschlüsse der Partialbruchformel an (B), (OB), (G) und (R) für Z' die vier Werthe

$$\operatorname{Log} Z' \quad 8,83542 \quad 8,83284 \quad 8,82421 \quad 8,82439.$$

¹⁾ Hier wie im Folgenden überall sind die gemeinen Logarithmen durch Log, die natürlichen durch log von einander unterschieden.

Schliesst man andererseits die Partialbruchformel mit $U = 0$ in der vorgeschriebenen Weise an die Tafelwerthe von H , Z , Z' , Z'' an, so erhält man in den drei Fällen (B), (OB) und (G) nachstehende Constantenwerthe

	(B)	(OB)	(G)
Log sin φ	9,006527	9,404935	9,057728
Log n'	0,704208	0,789442	0,747364
Log n''	0,773355	1,024340	0,930240
Log $\frac{n''}{n}$	0,207394	0,359002	0,320972

und folgende Widersprüche zwischen Tafel und Formel¹⁾

φ	(B) — R	(OB) — R	(G) — R
70°	0,00	0,00	0,00
80	+ 0,44	0,00	+ 0,06
85	+ 4,72	— 0,43	+ 0,42
86	+ 3,00	— 0,30	+ 0,45
87	+ 2,92	— 0,72	— 0,08
88	+ 6,26	— 4,66	— 0,69
89	+ 15,99	— 3,32	— 2,20
89,5	+ 22,52	— 3,50	— 2,44
90	0,00	0,00	0,00

die, wie die unmittelbare Vergleichung mit den Zahlen (HB) p. 498 lehrt, eine starke Abirrung von dem dort bereits erreichten Gebiete engeren Anschlusses zu erkennen geben.

Wir kehren deshalb zu der früheren Methode zurück und bestimmen die Parameterwerthe zunächst durch Festhaltung zweier Coincidenzstellen (85° und 89°); die hieraus durch Auflösung linearer Gleichungen folgenden Werthe von n' und n'' verwandeln, in (2.) eingesetzt, diese Bedingung in eine Gleichung zur Bestimmung der letzten Unbekannten sin φ . Die in Betracht kommende Wurzel ist ihrer Lage nach bereits durch die in (HB)

1) Wo aus dem umgebenden Texte ohne Weiteres ersichtlich ist, nach welcher Formel und mit welchen Constanten die Refraction gerechnet wurde, soll dieselbe einfach mit R bezeichnet werden.

p. 204 mitgetheilten Werthe von U hinlänglich charakterisirt und ihre genaue Bestimmung bietet nichts Besonderes; höchstens verdient der Umstand Erwähnung, dass bei Anwendung der regula falsi die Bildung des Differentialquotienten unterlassen und einfach

$$3 \delta \log \sin \varphi = \delta U$$

gesetzt werden kann. Gehen wir nämlich von den Formeln (34.) in (HB) aus, so wird zunächst

$$\begin{aligned} \delta U &= -\frac{n' n''}{n} \delta \log n' + (U+1) \delta \log n'' + \frac{n''}{n} (n' - 2) \delta s \\ &= \alpha x + \beta y + \gamma z, \\ \alpha &= -\frac{n' n''}{n}, \\ \beta &= -\frac{n' n''^2 - n^2 (U+1)}{n'' n' - n^2}, \\ \gamma &= -\frac{n'}{U} \left[3 \frac{n''}{n} - 3 + U \left(2 \frac{n''}{n} - 3 \right) \right]. \end{aligned}$$

Um auf den numerisch vorliegenden Fall zu kommen, haben wir die variirte Coincidenzbedingung

$$\delta R = ax + by + cz = 0$$

für die zwei vorgeschriebenen Zenithdistanzen \mathfrak{P}_1 und \mathfrak{P}_2 anzusetzen und δU durch z allein auszudrücken, also zu schreiben

$$\begin{aligned} &(a_1 b_2 - a_2 b_1) \delta U = \\ &= z \{ \alpha (b_1 c_2 - b_2 c_1) - \beta (a_1 c_2 - a_2 c_1) + \gamma (a_1 b_2 - a_2 b_1) \}. \end{aligned}$$

Mit den gegebenen Ausdrücken a, b, c folgt aber

$$\begin{aligned} a_1 b_2 - a_2 b_1 &= \frac{u_2 - u_1}{u_1 u_2} \cdot b_1 b_2, \\ a_1 c_2 - a_2 c_1 &= \frac{u_2 - u_1}{u_1 u_2} \cdot c_1 c_2, \\ b_1 c_2 - b_2 c_1 &= \frac{u_2 - u_1}{u_1 u_2} \cdot \left(\frac{n''}{n} - 1 \right) \cdot \frac{b_1 b_2 \cdot c_1 c_2}{a_1 a_2}, \quad \text{also} \\ \frac{\delta U}{z} &= \alpha \left(\frac{n''}{n} - 1 \right) \frac{c_1 c_2}{a_1 a_2} - \beta \frac{c_1 c_2}{b_1 b_2} + \gamma. \end{aligned}$$

Geht U gegen Null, so bleiben sowohl α und β als die Verhältnisse $\frac{c}{a}$ und $\frac{c}{b}$ endlich, während in γU als Nenner auftritt; wir können also, wenn U schon hinreichend klein ist, schreiben

$$\delta U = \gamma z = -\frac{3n' n'' - n}{U} z = 3 \delta s .$$

Ist somit die Gleichung (2.) aufgelöst, so geschieht die weitere Verbesserung von R nach der reducirten Formel

$$\delta R = ax + by ,$$

der, falls auch H als variabel betrachtet wird, rechts das Glied

$$\frac{\partial R}{\partial H} \delta H = \frac{R}{H} \frac{n \delta H}{n + n'' u}$$

hinzuzufügen ist. Sind $x, y, \delta H$ gefunden, so liefern die Definitionsgleichungen von x und y zusammen mit

$$\delta U = -\frac{n' n''}{n} \delta \log n' + \delta \log n'' + \frac{n''}{n} (n' - 2) (\delta s + \delta \log H) = 0$$

durch Auflösung die logarithmischen Variationen von $n', n'', \sin \varphi$.

Diese letzte Verbesserung von R erfordert in den verschiedenen Fällen eine verschiedene Behandlung. Bei $(OB), (G)$ und (R) sind, wie nach den früheren Resultaten vorauszusehen war, die nach der ersten Näherung (Coincidenz bei 85° und 89° mit $U = 0$) übrig bleibenden Widersprüche bereits so klein, dass von einer förmlichen Ausgleichung Abstand genommen werden kann; auch eine Variation von H wurde nach vergeblichen Versuchen, die Durchschlingung beider Refractionscurven in der Nähe des Horizonts mit nochmaligem Zeichenwechsel der Differenzen durch ein mässiges δH zu verhindern, unterlassen und über die Differentialverbindungen x und y einfach so verfügt, dass die Widersprüche durchgängig möglichst klein werden —: eine Festsetzung, die dazu führt, die Coincidenzstellen ein wenig nach dem Horizont hin zu verschieben, nämlich von 85° und 89° nach etwa 87° und $89,5^\circ$. Die Differenzen werden dann namentlich in der unmittelbaren Nähe des Horizontes etwas kleiner, wovon für die spätere Temperaturbestimmung ein Vortheil zu erwarten ist (vgl. *(HB)* p. 218). In Tafel II sind die auf diese

Weise hergeleiteten Constantensysteme zusammengestellt und der Gang der Differenzen durch einige Zahlenwerthe charakterisirt. Der späteren Weiterverwendung wegen sollen die verschiedenen Anschlüsse, insoweit sie zu einer Art definitiver Resultate führen, durch Buchstabenbezeichnung auseinandergehalten werden; der vorangehende Buchstabe beziehe sich auf die darstellende Function, der nachfolgende auf das dargestellte Object. Bestimmen wir für die Partialbruchformel den Buchstaben P , so sind hiernach die Bezeichnungen (PG) , (POB) etc. ohne Weiteres verständlich. Die Differenzen sind in Hunderttheilen der Secunde ausgedrückt.

Tafel II.

	(POB)	(PG)	(PR)
Log sin φ	9,063742	9,024033	9,029096
Log n'	0,757294	0,746490	0,733062
Log n''	0,934464	0,846994	0,892788
Log $\frac{n''}{n}$	0,310049	0,274448	0,300765
Log H	3,321963	3,344860	3,343936
φ	$(OB) - (POB)$	$(G) - (PG)$	$(R) - (PR)$
80° 0'	— 5	— 4	— 6
85 0	— 9	— 12	— 11
86 0	— 7	— 4	— 9
87 0	0	— 4	0
88 0	+ 12	+ 12	+ 18
89 0	+ 12	0	+ 17
89 30	— 4	— 4	0
89 40	— 5	— 4	— 2
89 50	— 7	— 5	— 8
90 0	0	0	0

Etwas umständlicher ist die Herleitung von (PB) . Die Auflösung der Gleichung $U = 0$ mit Coincidenz in 85° und 89° lieferte das Constantensystem