

Ahmed A. Shabana

Einführung in die Mehrkörpersimulation



Ahmed A. Shabana

**Einführung in die
Mehrkörpersimulation**

Ahmed A. Shabana

Einführung in die Mehrkörpersimulation

Übersetzt von Carsten Heinisch

WILEY-VCH
Verlag GmbH & Co. KGaA

Titel der Originalausgabe

Ahmed A. Shabana

„Computational Dynamics“

(Print-ISBN 978-0-470-68615-7)

All rights reserved. Authorised translation from the english language edition published by John Wiley and Sons Ltd. Responsibility for the accuracy of the translation rests solely with Wiley-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA and is not the responsibility of John Wiley & Sons Ltd. No part of this book may be reproduced in any form without the written permission of the original copyright holder, John Wiley & Sons Ltd.

Autor

Ahmed A. Shabana

University of Illinois at Chicago

Mechanical Engineering

IL

USA

Übersetzung

Carsten Heinisch

redaktor.de

Fischerstraße 37

67655 Kaiserslautern

Alle Bücher von Wiley-VCH werden sorgfältig erarbeitet. Dennoch übernehmen Autoren, Herausgeber und Verlag in keinem Fall, einschließlich des vorliegenden Werkes, für die Richtigkeit von Angaben, Hinweisen und Ratschlägen sowie für eventuelle Druckfehler irgendeine Haftung.

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

© 2016 WILEY-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, Boschstr. 12, 69469 Weinheim, Germany

Alle Rechte, insbesondere die der Übersetzung in andere Sprachen, vorbehalten. Kein Teil dieses Buches darf ohne schriftliche Genehmigung des Verlages in irgendeiner Form – durch Photokopie, Mikroverfilmung oder irgendein anderes Verfahren – reproduziert oder in eine von Maschinen, insbesondere von Datenverarbeitungsmaschinen, verwendbare Sprache übertragen oder übersetzt werden. Die Wiedergabe von Warenbezeichnungen, Handelsnamen oder sonstigen Kennzeichen in diesem Buch berechtigt nicht zu der Annahme, dass diese von jedermann frei benutzt werden dürfen. Vielmehr kann es sich auch dann um eingetragene Warenzeichen oder sonstige gesetzlich geschützte Kennzeichen handeln, wenn sie nicht eigens als solche markiert sind.

Umschlaggestaltung Grafik-Design Schulz, Fußgönheim

Satz le-tex publishing services GmbH, Leipzig

Print ISBN 978-3-527-33664-7

ePDF ISBN 978-3-527-67809-9

ePub ISBN 978-3-527-67811-2

Mobi ISBN 978-3-527-67810-5

Gedruckt auf säurefreiem Papier.

Inhaltsverzeichnis

Vorwort *IX*

Danksagung *XIII*

1	Einführung	1
1.1	Mehrkörpersimulation	2
1.2	Bewegungen und Zwangsbedingungen	4
1.3	Freiheitsgrade	7
1.4	Kinematische Analyse	10
1.5	Kraftanalyse	13
1.6	Dynamische Gleichungen und ihre unterschiedlichen Formen	14
1.7	Direkte und inverse Dynamik	16
1.8	Ebene und räumliche Dynamik	18
1.9	Computermethoden und numerische Verfahren	20
1.10	Aufbau, Ziel und Schreibweisen dieses Buches	22
2	Lineare Algebra	25
2.1	Matrizen	26
2.2	Matrizenoperationen	28
2.3	Vektoren	38
2.4	Dreidimensionale Vektoren	48
2.5	Lösung algebraischer Gleichungssysteme	55
2.6	Dreiecksfaktorisierung	63
2.7	Die QR-Zerlegung	68
2.8	Singulärwertzerlegung	84
3	Kinematik	97
3.1	Kinematik starrer Körper	98
3.2	Geschwindigkeitsgleichungen	102
3.3	Beschleunigungsgleichungen	104
3.4	Kinematik eines sich auf einem starren Körper bewegendem Punkts	105
3.5	Kinematik mit Zwangsbedingungen	107

3.6	Der klassische kinematische Ansatz	115
3.7	Der rechnergestützte kinematische Ansatz	137
3.8	Formulierung der Antriebsbindungen	140
3.9	Formulierung von Gelenkbindungen	142
3.10	Computermethoden in der Kinematik	155
3.11	Umsetzung auf dem Computer	164
3.12	Kinematische Modellierung und Analyse	176
3.13	Schlussbemerkungen	184
4	Formen der dynamischen Gleichungen	193
4.1	Das d'Alembert'sche Prinzip	194
4.2	Das d'Alembert'sche Prinzip und die Newton-Euler-Gleichungen	199
4.3	Gebundene Dynamik	202
4.4	Erweiterte Formulierung	206
4.5	Lagrange-Multiplikatoren	208
4.6	Eliminierung der abhängigen Beschleunigungen	210
4.7	Einbettungsverfahren	213
4.8	Vereinigte Formulierung	215
4.9	Systeme mit offenen kinematischen Ketten	216
4.10	Systeme mit geschlossenen kinematischen Ketten	222
4.11	Schlussbemerkungen	229
5	Virtuelle Arbeit und Lagrange-Dynamik	231
5.1	Virtuelle Verrückungen	231
5.2	Kinematische Bindungen und Separation der Koordinaten	235
5.3	Virtuelle Arbeit	246
5.4	Beispiele für Kraftelemente	253
5.5	Ideale Bindungen	268
5.6	Das Prinzip der virtuellen Arbeit in der Statik	270
5.7	Das Prinzip der virtuellen Arbeit in der Dynamik	279
5.8	Die Lagrange-Gleichung	285
5.9	Gibbs-Appell-Gleichung	290
5.10	Die Hamilton-Formulierung	290
5.11	Der Zusammenhang zwischen der virtuellen Arbeit und dem Gauß'schen Eliminationsverfahren	297
6	Gebundene Dynamik	307
6.1	Verallgemeinerte Trägheit	308
6.2	Massenmatrix und Zentrifugalkräfte	313
6.3	Bewegungsgleichungen	319
6.4	System von starren Körpern	321
6.5	Eliminierung der Bindungskräfte	326
6.6	Lagrange-Multiplikatoren	336
6.7	Dynamische Bindungsgleichungen	344
6.8	Gelenkreaktionskräfte	352

6.9	Eliminierung der Lagrange-Multiplikatoren	355
6.10	Zustandsraumdarstellung	358
6.11	Numerische Integration	362
6.12	Implementierung von Algorithmen und dünn besetzten Matrizen	371
6.13	Differential- und algebraische Gleichungen	375
6.14	Inverse Dynamik	382
6.15	Statische Analyse	385
7	Räumliche Dynamik	393
7.1	Allgemeine Verschiebung	394
7.2	Endliche Rotation	395
7.3	Euler-Winkel	404
7.4	Geschwindigkeit und Beschleunigung	406
7.5	Verallgemeinerte Koordinaten	412
7.6	Verallgemeinerte Trägheitskräfte	416
7.7	Verallgemeinerte wirkende Kräfte	430
7.8	Dynamische Bewegungsgleichungen	438
7.9	Gebundene Dynamik	443
7.10	Formulierung der Gelenkbindungen	446
7.11	Newton-Euler-Gleichungen	456
7.12	Das d'Alembert'sche Prinzip	458
7.13	Linearer Impuls und Drehimpuls	459
7.14	Rekursive Verfahren	462
8	Spezielle Themen aus der Dynamik	489
8.1	Kreisel und Euler-Winkel	489
8.2	Rodriguez-Formel	494
8.3	Euler-Parameter	498
8.4	Rodriguez-Parameter	502
8.5	Quaternionen	504
8.6	Kontakt zwischen Körpern	508
8.7	Stabilität und Eigenwertuntersuchungen	514
9	Computercodes für Mehrkörpersysteme	521
9.1	Einführung in SAMS/2000	522
9.2	Codestruktur	525
9.3	Systemerkennung und Datenstruktur	527
9.4	Installation des Codes und theoretischer Hintergrund	529
9.5	Einrichtung von SAMS/2000	531
9.6	Anwendung des Codes	533
9.7	Körperdaten	535
9.8	Bindungsdaten	542
9.9	Durchführung der Simulationen	545
9.10	Stapelverarbeitung	548

- 9.11 Steuerung der Grafik 551
- 9.12 Möglichkeiten der Animation 554
- 9.13 Allgemeine Verwendung der Dateneingabemasken 554
- 9.14 Räumliche Analyse 558
- 9.15 Spezielle Module und Merkmale des Programms 561

Literatur 569

Sachverzeichnis 573

Vorwort

Während der letzten drei Jahrzehnte ist die Mehrkörpersimulation (engl. *computational dynamics*) Gegenstand eingehender Forschungen gewesen. Mit dem Aufkommen von digitalen Hochgeschwindigkeitsrechnern ist das Thema enorm gewachsen; auch der Bedarf an Computerkapazitäten zur Simulation und für Rechnungen für physikalische und technische Systeme aus mehreren miteinander verbundenen Körpern hat die Mehrkörpersimulation schnell wachsen lassen. Solche Mehrkörpersysteme sind in ihrem Wesen hochgradig nichtlinear, und für ihre Untersuchung sind Matrizenrechnung, Numerik sowie Simulationen erforderlich. Dieses Buch will eine Einführung in das Thema der **Mehrkörpersimulation** geben; vom Niveau her ist es für Studierende gegen Ende ihres Bachelor-Studiums und im ersten Teil ihres Master-Studiums geeignet. Das Buch führt Konzepte, Definitionen und Verfahren ein, die im Bereich der Mehrkörperdynamik verwendet werden. Dazu werden zunächst die klassischen Ansätze diskutiert, um den Studierenden bei einem Überblick über die grundlegenden Ideen und Verfahren allgemein in der Mechanik zu helfen. Diese Ideen werden dann ausgebaut, um den Nutzen der klassischen Verfahren als Grundlage für die Untersuchung der Mehrkörperdynamik zu zeigen. Danach werden verschiedene rechenintensive Vorgehensweisen vorgestellt, wie sie in der computergestützten Untersuchung von Mehrkörpersystemen verwendet werden. Dieses Buch geht nur auf die Dynamik von starren Körpern ein.

Inhalt

Die dritte Auflage des Buches – auf dem diese erste deutsche Übersetzung basiert – ist in neun Kapitel aufgeteilt, die die grundlegenden Konzepte und Rechenverfahren für die Kinematik und Dynamik von Mehrkörpersystemen abdecken. In den meisten Kapiteln werden die vorgestellten Ideen und Verfahren anhand einfacher Beispiele erläutert. Die Aufgaben am Ende eines jeden Kapitels sind bewusst einfach gehalten, damit die Leser und Leserinnen sich auf die in dem Buch diskutierten Hauptideen und Rechenverfahren konzentrieren können. Bei der Entwicklung des Stoffs für dieses Buch werden nur bescheidene Vorkenntnisse in Mathematik und Dynamik vorausgesetzt.

Kapitel 1 führt einige grundlegende Definitionen ein, die im gesamten Buch verwendet werden. Der in diesem Kapitel vorgestellte Stoff dient auch als kurze Einführung in den Stoff, der von den darauffolgenden Kapiteln abgedeckt wird. Der Aufbau des Buches sowie die verwendete Notation wird am Ende dieses Kapitels diskutiert. Ich empfehle dringend, dieses Kapitel zu lesen, bevor die weiteren Kapitel bearbeitet werden.

Kapitel 2 gibt einen Überblick über einige Konzepte und Operationen der Matrix- und Vektoralgebra. Zu den hier diskutierten Themen gehören die Eigenschaften von Matrizen und Vektoren, die Identitäten sowie Verfahren zum Lösen von algebraischen Gleichungssystemen. In zwei Abschnitten dieses Kapitels werden Verfahren zur Matrizenzerlegung wie die **QR**-Zerlegung sowie Singulärwertzerlegungen (engl. *singular value decomposition*, SVD) diskutiert, die man in der dynamischen Analyse von Mehrkörpersystemen mit Zwangsbedingungen einsetzt, um einen minimalen Satz von unabhängigen Differentialgleichungen zu gewinnen. Der Leserin und dem Leser mit Vorwissen zur linearen Algebra wird der größte Teil des in diesem Kapitel vorgestellten Stoffs bereits vertraut sein.

In *Kapitel 3* wird die Kinematik von Mehrkörpersystemen mit Zwangsbedingungen diskutiert. Ich leite Gleichungen für Ort, Geschwindigkeit und Beschleunigung her; ferner zeige ich die Anwendung dieser Gleichungen in der kinematischen Untersuchung von Mehrkörpersystemen aus miteinander verbundenen Körpern. Die Anzahl der Freiheitsgrade eines Mehrkörpersystems hängt von der Anzahl und der Art der sogenannten Gelenke (engl. *joints*) ab, die die Systemkomponenten miteinander verbinden. Dann stelle ich verschiedene mechanische Gelenke sowie die Gleichungen ihrer kinematischen Zwangsbedingungen vor. Dabei wird gezeigt, dass die Beweglichkeit eines Mehrkörpersystems von der Anzahl der linear unabhängigen Bedingungsgleichungen ihrer Gelenke abhängt. Die Bedingungen, die das Zusammenwirken miteinander verbundener Körper beherrschen, werden durch einen Satz von nichtlinearen algebraischen Bedingungsgleichungen formuliert, die von den Systemkoordinaten abhängen. Dann kann man die Konfiguration des Systems bestimmen, indem man die nichtlinearen algebraischen Gleichungen mithilfe von numerischen und Computerverfahren löst.

Es gibt verschiedene computergestützte Verfahren, die gegenwärtig für die dynamische Analyse von Mehrkörperv Verfahren eingesetzt werden. Einige dieser Verfahren führen zu relativ großen Systemen von schwach gekoppelten Differential- und algebraischen Gleichungen; andere Verfahren führen zu kleineren Gleichungssystemen, deren Gleichungen aber stärker gekoppelt sind. *Kapitel 4* stellt verschiedene Formen der dynamischen Gleichungen vor. In diesem Kapitel entwickle ich die grundlegenden Gleichungen für Mehrkörpersysteme mithilfe der Newton'schen Mechanik; weiterführende analytische Verfahren nach Lagrange wie das Prinzip der virtuellen Arbeit sind dazu noch nicht erforderlich. Die Anwendung des d'Alembert'schen Prinzips auf die Herleitung der Euler-Gleichungen wird gezeigt; außerdem wird auf Grundlage der Newton'schen Mechanik und einiger einfacher Beispiele die Idee der Lagrange-Multiplikatoren eingeführt, mit denen man verallgemeinerte Zwangskräfte definieren kann. Systematische Verfahren zur Entwicklung einiger der dynamischen Gleichungen, die in Kapi-

tel 4 vorgestellt wurden, werden dann detailliert in den beiden darauffolgenden Kapiteln beschrieben.

Kapitel 5 stellt das **Prinzip der virtuellen Arbeit** vor, den Grundstein für die Entwicklung von vielen der bestehenden dynamischen Formulierungen. Die Konzepte der virtuellen Verrückung und der verallgemeinerten Kräfte, die für die Anwendung des Prinzips der virtuellen Arbeit nötig sind, werden vorgestellt. Dann skizziere ich ein systematisches Vorgehen auf Grundlage des Prinzips der virtuellen Arbeit, mit dem sich die Zwangskräfte aus den statischen und dynamischen Gleichungen eliminieren lassen. Zu den in Kapitel 5 diskutierten Themen gehören ferner die **Lagrange-Gleichung**, die **Gibbs-Appel-Gleichung** sowie die **kanonische Form** der Bewegungsgleichungen. Zum Abschluss von Kapitel 5 diskutiere ich den Zusammenhang zwischen der virtuellen Arbeit und dem Gauß'schen Eliminationsverfahren.

Kapitel 6 behandelt Computerverfahren in der Dynamik und diskutiert einige Vorgehensweisen zur Formulierung der Bewegungsgleichungen. In einem Ansatz werden diese Differentialgleichungen mithilfe der unabhängigen Variablen ausgedrückt, indem man **Einbettungsverfahren** oder **rekursive Verfahren** anwendet. Dieser Ansatz führt zu einem Satz gewöhnlicher Differentialgleichungen, in denen die Zwangskräfte automatisch herausfallen. Außerdem werden die Anwendung der **QR-Zerlegung** und der Singulärwertzerlegung diskutiert, mit denen man einen minimalen Satz von unabhängigen Differentialgleichungen erhält. In einem anderen Computerverfahren werden die Bewegungsgleichungen des Mehrkörpersystems sowohl mit abhängigen als auch mit unabhängigen Koordinaten formuliert. Dieser Ansatz führt zu einem großen System von schwach gekoppelten Gleichungen, in denen die Zwangskräfte explizit auftauchen. Diese Zwangskräfte lassen sich mit den sogenannten **Lagrange-Multiplikatoren** ausdrücken; sie führen auf ein gemischtes System aus algebraischen und Differentialgleichungen, das sich mit Matrizen- und mit Computerverfahren lösen lässt. Auch die numerischen Verfahren und die Formulierungen mithilfe dünn besetzter Matrizen, die man zur Lösung solcher gemischten Gleichungssysteme anwendet, werden in diesem Kapitel diskutiert.

Die räumliche Kinematik und Dynamik von Systemen starrer Körper sind Gegenstand von *Kapitel 7*. Die allgemeine Bewegung von starren Körpern ohne Nebenbedingungen im Raum wird mithilfe der unabhängigen Koordinaten der Verschiebung und der Rotation behandelt. Es folgt eine Beschreibung, wie man die Orientierung im Raum definieren kann. Dann wird die Formulierung der räumlichen kinematischen Geschwindigkeits- und Beschleunigungsgleichungen vorgestellt, gefolgt von Beispielen für Bedingungsgleichungen, die die räumlichen mechanischen Gelenke beschreiben. Das Kapitel behandelt ferner die Formulierung von erweiterten und rekursiven dynamischen Gleichungen für die beschränkte räumliche Bewegung von Mehrkörpersystemen.

Kapitel 8 dann diskutiert verschiedene Themen der Dynamik. Dazu gehören die Kreiselbewegung, die Rodriguez-Formel, Euler- und Rodriguez-Parameter, Quaternionen sowie die Berührung starrer Körper. Ferner wird die Stabilität von Mehrkörpersystemen mithilfe der Eigenwertanalyse behandelt.

Kapitel 9 widmet sich der Beschreibung von Universalprogrammcodes für Mehrkörpersysteme und deren Fähigkeiten. Als Beispiel dient der Computercode **SAMS/2000** (Systematic Analysis of Multibody Systems). Die Struktur dieses Codes und das Vorgehen bei seiner Anwendung werden anhand von ebenen und räumlichen kinematischen bzw. dynamischen Problemen beschrieben. Mit SAMS/2000 kann der Nutzer systematisch virtuelle Modelle von Mehrkörpersystemen entwickeln, die aus miteinander verbundenen Körpern bestehen. Die Leser und Leserinnen dieses Buches werden ermutigt, viele der angeführten Beispiele und Aufgaben mithilfe von Codes für Mehrkörpersysteme zu lösen. Die Anwendung solcher Codes sowie die Untersuchung der in diesem Buch vorgestellten Formulierungen ist notwendig, um die Verfahren und Algorithmen zu verstehen und schätzen zu lernen, die in der Industrie weithin zur Entwicklung von Mehrkörpersystemsoftware verwendet werden. Die *Ausbildungslizenz* von SAMS/2000 ist auf nur vier starre Körper beschränkt, außerdem fehlen die Funktionen zur Simulation von flexiblen Körpern und Gleisen sowie einige Simulationsoptionen, die in Kapitel 9 diskutiert wurden.

Mehrere Abschnitte sind sowohl im Inhaltsverzeichnis als auch in der Überschrift mit einem Sternchen gekennzeichnet. Einige dieser Abschnitte – etwa die Abschn. 2.7 und 2.8 – können beim ersten Durcharbeiten des Buches übersprungen werden. Das Ziel der Mehrkörperdynamik ist es, allgemeine Algorithmen zu entwickeln, die sich auf eine große Anzahl von Anwendungen anwenden lassen. Die Übungsaufgaben sind mit diesem Ziel im Hinterkopf entworfen worden.

Einheiten und Notation

In diesem Buch wird durchgängig das **Internationale Einheitensystem (SI)** verwendet. Die drei mechanischen Basiseinheiten dieses Systems sind Meter (Länge), Kilogramm (Masse) und Sekunde (Zeit). Die Krafteinheit ist das **Newton**, es wird aus den drei Basiseinheiten abgeleitet.

Vektoren und Matrizen werden mit fett-kursiven Buchstaben bezeichnet. Hochgestellte Indizes bezeichnen die Nummer des Körpers. Beispielsweise bezeichnet der Ausdruck a^i einen Skalar a , der mit dem i -ten Körper eines Mehrkörpersystems verbunden ist; der Ausdruck $\boldsymbol{a}^i$ hingegen bezeichnet einen Vektor oder eine Matrix, die mit dem i -ten Körper zusammenhängt. Um zwischen einem hochgestellten Index und einem Exponenten zu unterscheiden, verwenden wir Klammern, wenn eine Größe zu einer bestimmten Potenz erhoben wird. Beispielsweise ist $(a^3)^2$ ein Skalar a , der mit Körper 3 verbunden ist und zur Potenz 2 erhoben wird.

Ahmed A. Shabana

Danksagung

Ich möchte mich bei meinen Studenten und Kollegen bedanken, von denen ich wichtige Anregungen für die Entwicklung dieses Buches erhalten habe. Insbesondere erwähnen möchte ich J.H. Choi, M. Gofron, K.S. Hwang, Z. Kusculuoglu, H.C. Lee, M. Omar, T. Ozaki, M.K. Sarwar, M. Shokohifard und D. Valtora. Ich danke Toshikazu Nakanishi von Komatsu, Ltd. für die Simulationsergebnisse des Kettenfahrzeugs, das in Kapitel 6 vorgestellt wird; und ich danke Graham Sanborn, Hiroyuki Sugiyama und Khaled Zaazaa für ihre Mitwirkung an Kapitel 9. Ich möchte ferner dem US Army Research Office und der Federal Railroad Administration für ihre Unterstützung unserer Forschungen im Bereich der Mehrkörpersimulation danken.

Dank gebührt ferner Denise Burt für ihre ausgezeichnete Arbeit bei der Reinschrift einiger Kapitel des ursprünglichen Manuskripts; Frank Cerra, Bob Argentieri und Eric Willner, den Senior Engineering Editors; Kimi Sugeno und Debbie Cox, den Assistant Managing Editors; Bob Hilbert, dem Associate Managing Editor; Nicky Skinner, dem Projektbetreuer. Die Herstellungsabteilung von John Wiley & Sons verdient besonderen Dank für ihre Kooperation und ihre uneingeschränkt professionelle Betreuung bei der Erstellung der ersten, zweiten und dritten Auflage dieses Buches. Nicht zuletzt danke ich auch meiner Familie für ihre Geduld während der Jahre, in denen ich die verschiedenen Auflagen dieses Buches vorbereitet habe.

Ahmed A. Shabana

1

Einführung

Moderne Maschinen- und Luftfahrtsysteme sind oft sehr komplex und bestehen aus vielen Komponenten, die durch Gelenke und Kraftelemente wie Federn, Dämpfer und Stellglieder miteinander verbunden sind. In der modernen Literatur nennt man solche Systeme **Mehrkörpersysteme**. Beispiele dafür sind Maschinen, Anlagen, Roboter, Fahrzeuge, räumliche Tragwerke und biomechanische Systeme. Die Kinetik eines solchen Systems ist durch oft komplizierte Beziehungen bestimmt, die sich aus der Relativbewegung und den Verbindungskräften zwischen den Systemkomponenten ergeben. Abbildung 1.1 zeigt einen hydraulischen Bagger, den man als Beispiel für ein Mehrkörpersystem aus vielen Komponenten verstehen kann. Beim Entwurf eines solchen Kettenfahrzeugs muss sich der Ingenieur (oder die Ingenieurin) mit vielen ineinander verflochtenen Fragen zur Bewegung und den Kräften der einzelnen Komponenten der Maschine befassen. Beispiele für solche Fragen sind etwa: Welchen Zusammenhang gibt es zwischen der Fahrgeschwindigkeit des Baggers und der Bewegung der Raupenketten? Welchen Einfluss haben die Kontaktkräfte zwischen den Verbindungsgliedern der Raupenketten und den Baggerkomponenten auf die Bewegung des Systems? Welche Wirkung haben die Reibungskräfte zwischen den Raupenketten und dem Untergrund auf die Bewegung und die Leistung des Baggers? Wie beeinflusst die Wechselwirkung zwischen der Kette und dem Boden die Dynamik des Baggers und wie lassen sich die Bodeneigenschaften charakterisieren? Wie hängen die Kräfte und die Maximalgeschwindigkeit des Baggers von der Geometrie der Kettenglieder ab? Solche und viele andere wichtige Fragen müssen angesprochen werden, bevor der Entwurf des Baggers abgeschlossen ist. Um die vielen ineinander verflochtenen Fragen sauber beantworten zu können, ist es nötig, ein detailliertes dynamisches Modell eines solchen komplexen Systems zu erstellen. In diesem Buch behandeln wir die Entwicklung der dynamischen Gleichungen für ein komplexes Mehrkörpersystem wie den Raupenkettenbagger aus Abb. 1.1 in allen Einzelheiten. Die hier vorgestellten Verfahren erlauben es der Leserin und dem Leser¹⁾, die kinematischen und dynamischen Gleichungen für große mecha-

1) Um den Text durch solche Formulierungen nicht zu schwerfällig werden zu lassen, wird in Zukunft auf die explizite Nennung beider Geschlechter verzichtet. Alle Leserinnen dieses Buches mögen sich bitte auch bei dem Wort „Leser“ mit angesprochen fühlen – gemeint sind sie auf jeden Fall. (Anm. d. Übers.)



Abb. 1.1 Hydraulischer Raupenkettensbagger. (Foto mit freundlicher Genehmigung der Komatsu Ltd.)

nische Systeme und Fluggeräte aus mehreren miteinander verbundenen Körpern systematisch aufzubauen. Auch das Vorgehen zum Lösen der sich ergebenden gekoppelten nichtlinearen Gleichungen wird diskutiert.

1.1 Mehrkörpersimulation

In der Vergangenheit führte man die Untersuchung von Maschinen- und Luftfahrtsystemen meist mithilfe grafischer Verfahren durch. Computergestützte Verfahren spielten damals eine nur geringe Rolle, weil es keine leistungsstarken Rechner gab. Man interessierte sich hauptsächlich für die Untersuchung von Systemen aus einer relativ kleinen Anzahl von Körpern, sodass man die gewünschten Lösungen mithilfe von grafischen Verfahren oder händischen Rechnungen erhalten konnte. Erst das Aufkommen von Hochgeschwindigkeitsrechnern machte es möglich, auch komplexe Systeme aus einer großen Anzahl von Körpern und Gelenken zu untersuchen. Dazu wurden klassische Ansätze auf Basis der **Newton'schen** und der **Lagrange'schen Mechanik** wiederentdeckt und in eine für die Verwendung mit digitalen Hochgeschwindigkeitscomputern geeignete Form gebracht.

Obwohl die zugrunde liegenden Theorien bei der Entwicklung von Computeralgorithmen für die Untersuchung von Maschinen- und Luftfahrtsystemen

dieselben sind wie in den klassischen Ansätzen, müssen Ingenieure und Wissenschaftler heutzutage außerdem weitreichende Kenntnisse der Matrizenrechnung und numerischer Verfahren erwerben, um die Computertechnik effizient nutzen zu können. Dieses Buch führt in die klassischen und modernen Ansätze ein, die bei der kinematischen und dynamischen Untersuchung von mechanischen Systemen und Fluggeräten aus mehreren miteinander verbundenen *starren* Körpern bestehen. Das Hauptaugenmerk der Darstellung liegt auf der Modellierung von allgemeinen Mehrkörpersystemen und der Herleitung der Zusammenhänge, die die dynamische Bewegung solcher Systeme bestimmen. Das Ziel ist es, allgemeine Verfahren zu entwickeln, die sich auf eine große Klasse von Mehrkörpersystemen anwenden lassen. Dabei werden viele grundlegende und Computerprobleme behandelt, um die Vorzüge und Beschränkungen der verschiedenen Verfahren anzusprechen, die beim Formulieren und Lösen der Bewegungsgleichungen von Mehrkörpersystemen verwendet werden. Dies ist das Thema des allgemeinen Bereichs der *computational dynamics* (man übersetzt diesen Begriff meist mit **Computerdynamik** oder **Mehrkörpersimulation**), die sich mit der computer-gestützten Lösung der Bewegungsgleichungen von großen Systemen befasst.

Die Rolle der Computerdynamik besteht vor allem darin, die Werkzeuge bereitzustellen, die man für die dynamische Simulation von Mehrkörpersystemen benötigt. Für die Untersuchung und computergestützte Simulation eines gegebenen Systems lassen sich verschiedene Werkzeuge verwenden. Dies ist hauptsächlich dem Umstand geschuldet, dass die Form der kinematischen und dynamischen Gleichungen, die die Dynamik eines Mehrkörpersystems bestimmen, nicht eindeutig ist; daher ist es wichtig, diejenigen Werkzeuge und diejenige Form der Bewegungsgleichungen zu wählen, die sich für die jeweilige Anwendung am besten eignen. Das ist eine nicht immer einfache Aufgabe, die eine große Vertrautheit mit den verschiedenen Formulierungen und Prozeduren voraussetzt, die im allgemeinen Bereich der Computerdynamik verwendet werden. Die Form der Bewegungsgleichungen hängt von der Wahl der Koordinaten ab, die man zur Definition der Systemkonfiguration verwendet. Man kann eine kleine oder große Anzahl von Koordinaten wählen. Vom numerischen Standpunkt her hat jede Wahl ihre Vorzüge und Nachteile: Die Wahl einer kleinen Anzahl von Koordinaten führt immer zu einem komplizierten Gleichungssystem; sie hat aber den Vorzug, dass nur eine geringe Anzahl von Gleichungen gelöst werden muss. Die Wahl einer großen Anzahl von Koordinaten andererseits hat den Vorzug, dass sich einfachere und weniger stark gekoppelte Gleichungen ergeben – um den Preis, dass die Dimension des Problems steigt. Das Hauptaugenmerk dieses Buches liegt auf der Herleitung und Anwendung von verschiedenen Formen der Bewegungsgleichungen. Einige Formulierungen führen auf ein großes System von Gleichungen, die mithilfe von redundanten Koordinaten ausgedrückt werden; andere hingegen führen auf ein kleines Gleichungssystem, das sich mit dem minimalen Satz von Koordinaten ausdrücken lässt. Vorzüge und Nachteile jeder dieser Formulierungen bei der Betrachtung von Mehrkörpersystemen mit Zwangsbedingungen werden detailliert diskutiert.

Allgemein lassen sich Mehrkörpersysteme einteilen in **starre Mehrkörpersysteme** und **flexible Mehrkörpersysteme**. Starre Mehrkörpersysteme sollen nur aus starren Körpern bestehen, die durch masselose Federn, Dämpfer und/oder Stellglieder (Aktoren) verbunden sind. Mit anderen Worten: Wenn man starre Mehrkörpersysteme betrachtet, sollen die einzigen Komponenten, die Trägheit aufweisen, starre Körper sein. Flexible Mehrkörpersysteme hingegen enthalten sowohl starre als auch verformbare Körper. Verformbare Körper zeigen Trägheit und eine Elastizität, die von den Deformationen abhängt. Wenn sich der verformbare Körper bewegt, ändert sich seine Form, und seine Trägheits- und seine elastischen Eigenschaften werden zu Funktionen der Zeit. Daher ist die Untersuchung von verformbaren Körpern schwieriger als die von starren Körpern. In diesem Buch werden wir nur den Zweig der Mehrkörpersimulation betrachten, der sich mit starren Mehrkörpersystemen befasst. Die Theorie der flexiblen Mehrkörpersysteme werden von mir in einem spezielleren Buch (Shabana, 2005) behandelt.

1.2

Bewegungen und Zwangsbedingungen

Systeme wie Maschinen, Anlagen, Roboter, Fahrzeuge, Raumfahrzeuge und biomechanische Systeme bestehen aus vielen Körpern, die durch unterschiedliche Arten von Gelenken miteinander verbunden sind, sowie verschiedenen Arten von Krafterelementen wie Federn, Dämpfer und Stellglieder. Die Gelenke dienen häufig dazu, die Beweglichkeit des Systems zu beeinflussen und die Bewegung der Systemkomponenten auf bekannte, vorgegebene Richtungen zu beschränken. Mithilfe der Gelenke und Krafterelemente werden Mehrkörpersysteme dafür entworfen, bestimmte Aufgaben zu erfüllen; einige dieser Aufgaben sind ganz einfach, andere können ziemlich kompliziert sein und die Verwendung ganz bestimmter Typen von mechanischen Verbindungen sowie ausgeklügelte Steuerungsalgorithmen erfordern. Daher ist es schon in der Entwurfsphase wesentlich, die Dynamik solcher Systeme zu verstehen, und das ist erst recht bei der Leistungsbewertung und Konstruktionsverbesserungen notwendig. Um die Dynamik eines Mehrkörpersystems zu verstehen, muss man die Bewegung seiner Komponenten untersuchen. In diesem Abschnitt behandle ich einige der grundlegenden Konzepte und Definitionen, die für die Beschreibung der Bewegung von starren Körpern verwendet werden, und führe Beispiele für Gelenke ein, die bei der Anwendung von Mehrkörpersystemen verbreitet sind.

Bewegungen ohne Zwangsbedingungen

Die Bewegung eines starren Körpers setzt sich zusammen aus Translationen und Rotationen. Die Untersuchung einer reinen **Translationsbewegung** ist relativ einfach, und die dynamischen Beziehungen, denen diese Art der Bewegung unterliegt, sind vollständig verstanden. Eine **finite Rotation** hingegen ist nicht so einfach, weil die Rotation großer starrer Körper zu **geometrischen Nichtlinea-**

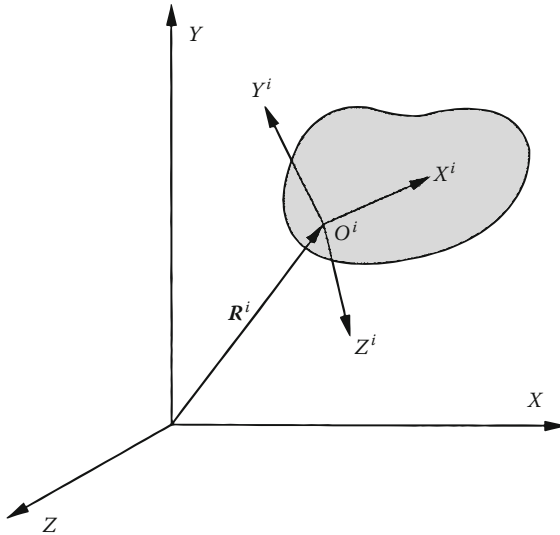


Abb. 1.2 Bewegung eines starren Körpers.

ritäten führen kann. Abbildung 1.2 zeigt einen starren Körper, hier als Körper i bezeichnet. Die allgemeine Bewegung dieses Körpers lässt sich bequem in einem Inertialsystem mit den Koordinaten XYZ beschreiben, indem man das Körpersystem $X^iY^iZ^i$ einführt, dessen Ursprung O^i fest mit einem Punkt des starren Körpers verbunden ist. Die allgemeine Bewegung des starren Körpers lässt sich dann mithilfe der Translation des **Referenzpunkts** O^i und einem Satz von Koordinaten beschreiben, die die Orientierung des Körpersystems bezüglich des inertialen Bezugssystems angeben. Beispielsweise kann man die allgemeine ebene Bewegung dieses Körpers mithilfe von drei unabhängigen Koordinaten angeben, die die Translation des Körpers entlang der X - und der Y -Achse sowie dessen Rotation um die Z -Achse definieren. Die zwei Translations- und die eine Rotationskomponente sind drei unabhängige Koordinaten, weil jede von ihnen sich beliebig ändern lässt, wenn die jeweils anderen beiden fest sind. Der Körper lässt sich entlang der X -Achse verschieben, wobei seine Auslenkung entlang der Y -Achse und seine Rotation um die Z -Achse fest bleiben.

Bei einer räumlichen Analyse ist die Konfiguration eines starren Körpers, der sich ohne Nebenbedingungen im dreidimensionalen Raum bewegt, durch die Angabe von sechs Koordinaten eindeutig festgelegt. Drei Koordinaten beschreiben die Translationen des Körpers entlang der drei paarweise senkrecht aufeinanderstehenden Achsen X , Y und Z , drei weitere Koordinaten geben die Rotationen des Körpers um diese drei Achsen an. Es handelt sich um sechs **unabhängige Koordinaten**, da sie jeweils beliebig gewählt werden können.

Mechanische Gelenke

Mechanische Systeme sind im Allgemeinen für spezielle Operationen entworfen. Jedes von ihnen hat eine topologische Struktur, die einem bestimmten Zweck dient. Die Körper in einem mechanischen System können sich nicht frei gegeneinander bewegen, weil sie durch **Gelenke** (Verbindungen, engl. *joints*) oder **Kraftelemente** (engl. *force elements*) verbunden sind. Kraftelemente wie Federn oder Dämpfer können zwar die Bewegung der Körper in eine oder mehrere Richtungen beeinflussen, sie verhindern die Bewegung in diese Richtungen aber nicht vollständig. Folglich kann ein Kraftelement die Anzahl der unabhängigen Koordinaten, die zur Beschreibung des Systems nötig sind, nicht verringern. Mechanische Gelenke wie die in Abb. 1.3 gezeigten Typen hingegen werden verwendet, um Bewegungen nur in bestimmte Richtungen zuzulassen. Diese Gelenke verringern also die Anzahl der unabhängigen Koordinaten eines Systems, da sie die Bewegung in einige Richtungen verhindern. Abbildung 1.3a zeigt ein **Schubgelenk** (translatorisches Gelenk, engl. *prismatic (translational) joint*), das Relativbewegungen zwischen den beiden Körpern i und j nur entlang der Gelenkachse zulässt. Die Verwendung eines solchen Gelenks nimmt dem Körper i die Freiheit, sich relativ zum Körper j in einer anderen Richtung als der Gelenkachse zu verschieben. Ebenso nimmt es dem Körper i die Freiheit, bezüglich des Körpers j zu rotieren. Abbildung 1.3b zeigt ein **Drehgelenk** (Scharniergelenk, engl. *revolute (pin) joint*), das nur Relativedrehungen zwischen den Körpern i und j zulässt. Ein solches Gelenk nimmt also dem Körper i die Freiheit, sich bezüglich des Körpers j zu verschieben. Das in Abb. 1.3c gezeigte **Zylindergelenk** (engl. *cylindrical joint*) erlaubt dem Körper i , sich entlang der Gelenkachse gegen den Körper j zu verschieben und um die Gelenkachse zu rotieren. Allerdings nimmt es dem Körper i die Freiheit, sich entlang anderer Achsen bezüglich j zu verschieben bzw. um eine andere als die Gelenkachse zu rotieren. Abbildung 1.3d schließlich zeigt ein **Kugelgelenk** (engl. *spherical (ball) joint*), das relative Verschiebungen zwischen den Körpern i und j verhindert; es erlaubt dem Körper i nur, um drei senkrecht aufeinanderstehende Achsen gegen den Körper j zu rotieren.

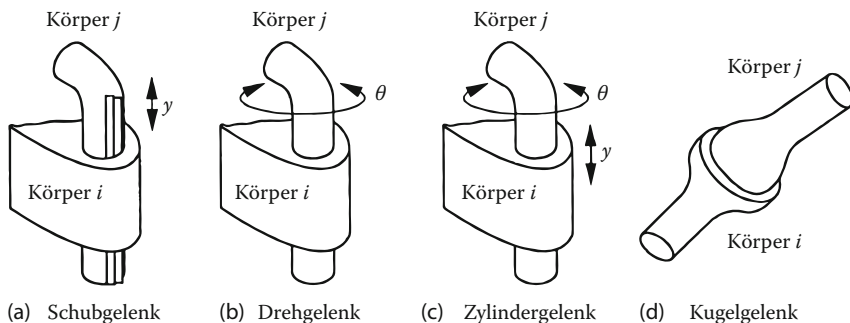


Abb. 1.3 Mechanische Gelenke.

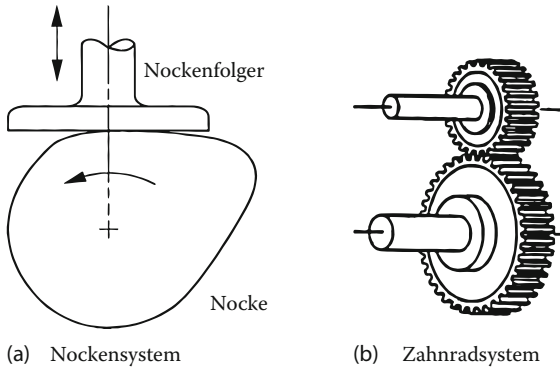


Abb. 1.4 Nocken- und Zahnradssysteme.

Andere Arten von Verbindungen, die häufig in mechanischen Systemen verwendet werden, sind **Nocken** (engl. *cams*) und **Zahnräder** (engl. *gears*). Abbildung 1.4 zeigt Beispiele. In Abb. 1.4a ist eine Nocke zu sehen, die die Rotationsbewegung der Nocke in die gewünschte Auf- und Ab-Bewegung des **Folgers** (engl. *follower*) umsetzt. Ein Zahnrad bzw. eine Zahnstange hingegen überträgt eine bestimmte Art der Bewegung (Translations- oder Rotationsbewegung) von einem Körper auf einen anderen. Die in Abb. 1.4b gezeigten Zahnräder sollen die Rotationsbewegung von einer Welle auf eine andere übertragen. Das Verhältnis der Rotationsgeschwindigkeiten des Antriebs- und des angetriebenen Zahnrads hängt vom Durchmesser der **Grundkreise** (engl. *base circle*) der beiden Zahnräder ab.

1.3

Freiheitsgrade

Ein mechanisches System kann aus mehreren Körpern bestehen, die durch Gelenke und Kraftelemente von verschiedener Art und in unterschiedlicher Zahl verbunden sind. Die **Freiheitsgrade** eines Systems sind definiert als die Anzahl der unabhängigen Koordinaten, die man benötigt, um die Konfiguration des Systems zu beschreiben. Die Anzahl der Freiheitsgrade hängt von der Anzahl der Körper sowie von der Anzahl und der Art der Gelenke in dem System ab. Das in Abb. 1.5 gezeigte **Schubkurbelgetriebe** (engl. *slider crank mechanism*) wird in verschiedenen technischen Anwendungen eingesetzt, etwa in Automotoren und Pumpen. Der Mechanismus besteht aus vier Körpern: Körper 1 ist der Zylinder (die Führung), Körper 2 ist die Kurbel, Körper 3 die Pleuelstange und Körper 4 das Schubglied (meist der Kolben). Das Getriebe hat drei Drehgelenke und ein Schubgelenk. Doch obwohl der Mechanismus aus mehreren Körpern und mehreren Gelenken besteht, hat er nur einen Freiheitsgrad, d. h., die Bewegung aller Körper in diesem System lässt sich durch eine einzige unabhängige Variable be-

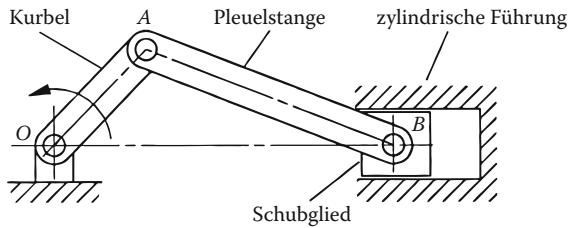


Abb. 1.5 Schubkurbelgetriebe.

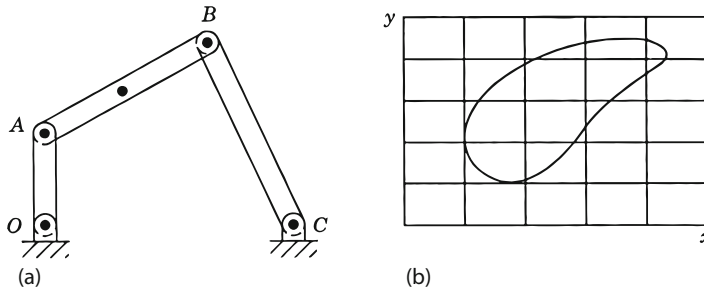


Abb. 1.6 Viergelenkgetriebe (Gelenkviereck).

einflussen und beschreiben. In diesem Fall benötigt man nur eine Eingangskraft (einen Motor oder ein Stellglied), um die Bewegung des Mechanismus zu steuern. So erzeugt beispielsweise eine vorgegebene Rotationsbewegung der Kurbel die gewünschte geradlinige Bewegung des Schubglieds. Wenn man die geradlinige Bewegung des Schubglieds als unabhängige Variable betrachtet, kann man die Kraft auf das Schubglied so wählen, dass man die gewünschte Rotationsbewegung der Kurbel OA erhält. In ähnlicher Weise muss man zur vollständigen Beschreibung eines Mehrkörpersystems mit zwei Freiheitsgraden zwei eingeleitete Kräfte angeben, und um die Bewegung eines Systems mit n Freiheitsgraden zu beschreiben, werden n Eingangskräfte benötigt.

Abbildung 1.6a zeigt ein weiteres Beispiel eines einfachen planaren Mechanismus, des sogenannten **Viergelenkgetriebes** oder Gelenkvierecks (engl. *four-bar mechanism*). Es hat ebenfalls nur einen einzigen Freiheitsgrad und ist in vielen industriellen und technischen Anwendungen zu finden. Die Bewegung der einzelnen Verbindungsstücke in diesem Mechanismus kann durch eine Eingangskraft gesteuert werden, etwa indem man die Kurbel OA mit einem Motor in O antreibt. Eine gewünschte Bewegungstrajektorie des Kopplungsstücks AB erhält man durch eine passende Dimensionierung der Verbindungsstücke des Mechanismus. Abbildung 1.6b zeigt die Bewegung, die der Mittelpunkt des Kopplungsstücks AB vollführt, wenn die Kurbel OA des Mechanismus eine vollständige Drehung ausführt. Durch andere Abmessungen erhält man andere Bewegungstrajektorien.

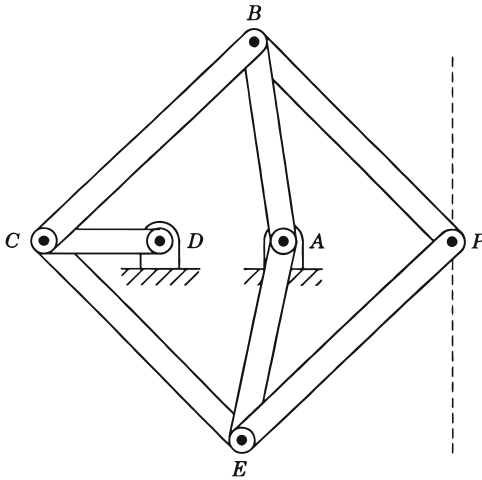


Abb. 1.7 Peaucellier-Inversor.

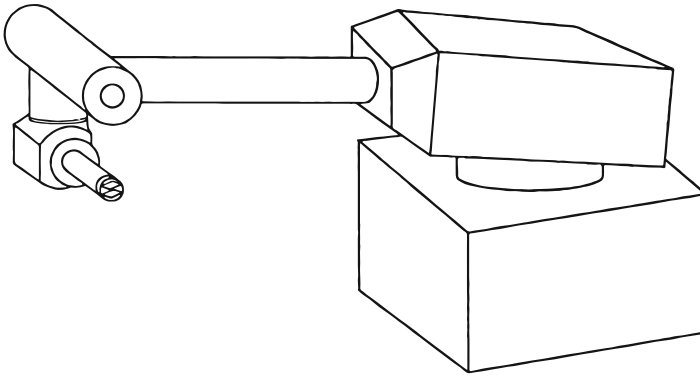


Abb. 1.8 Roboterarmen.

Ein weiterer Mechanismus mit einem einzigen Freiheitsgrad ist der in Abb. 1.7 gezeigte **Peaucellier-Inversor** (engl. *Peaucellier mechanism*), ein Koppelgetriebe zur Überführung einer Kreisbewegung in eine Geradenbewegung und umgekehrt. Die Geometrie des Inversors ist so gewählt, dass $BC = BP = EC = EP$ und $AB = AE$ gilt. Die Punkte A , C und P sollen immer auf einer Geraden durch A liegen. Der Mechanismus erfüllt immer die Bedingung $AC \times AP = c$ mit einer Konstante c , der sogenannten **Inversionskonstante**. Für den Fall $AD = CD$ sollte der Punkt P sich exakt geradlinig bewegen.

Die Mehrzahl der mechanischen Systeme bildet **geschlossene kinematische Ketten** mit einem einzigen Freiheitsgrad, in denen jeder Bestandteil mit mindestens zwei anderen Bestandteilen verbunden ist. Beispiele für offene Ketten mit mehreren Freiheitsgraden sind Roboterarmen wie in Abb. 1.8. Sie sind so konstruiert, dass sie einige Aspekte menschlicher Bewegungen nachbil-

den können, und werden in vielen Anwendungen wie Schweißen, Lackieren, Materialtransport und Montage eingesetzt. Einige dieser Anwendungen erfordern hohe Präzision, sodass ausgeklügelte Sensoren und Steuerungssysteme zum Einsatz kommen.

Während die *Anzahl* der Freiheitsgrade eines Systems eindeutig ist und von dessen topologischer Struktur abhängt, ist die *Art* der Freiheitsgrade als solche nicht eindeutig, wie vorhin beim Schubkurbelgetriebe gezeigt: In diesem einfachen Mechanismus kann man die Rotation der Kurbel oder die Translation des Schubglieds als den Freiheitsgrad des Systems ansehen. Je nachdem, welchen Freiheitsgrad man auswählt, lässt sich als Antrieb des Mechanismus ein Motor oder ein Stellglied verwenden. Bei der Konstruktion und Steuerung von Mehrkörpersystemen ist es entscheidend, die Freiheitsgrade des Systems genau zu kennen, um die Bewegung zu erzeugen und zu steuern. Die Anzahl und die Art der Freiheitsgrade legen die Anzahl und die Art der Motoren und Stellglieder fest, die an den Gelenken angreifen, um die Bewegung des Mehrkörpersystems zu erzeugen und zu steuern. In Kapitel 3 werden einfache Kriterien angegeben, um die Anzahl der Freiheitsgrade eines Mehrkörpersystems zu bestimmen. Diese Kriterien hängen sowohl von der Anzahl der Körper in dem System als auch von Anzahl und Art der Gelenke ab. Wenn die Komplexität des Systems zunimmt, kann die Anwendung dieser Kriterien zur Bestimmung der Systemfreiheitsgrade allerdings in die Irre führen. Aus diesem Grund gebe ich in Kapitel 6 ein numerisches Verfahren an, mit dem sich die Freiheitsgrade auch in komplexen Mehrkörpersystemen bestimmen lassen.

1.4

Kinematische Analyse

In der **kinematischen Analyse** (engl. *kinematic analysis*) befassen wir uns mit den geometrischen Aspekten der Bewegung der Körper, ohne die Kräfte zu betrachten, die diese Bewegung verursachen. In den klassischen Ansätzen der kinematischen Analyse bestimmt man zuerst die Freiheitsgrade. Dann entwickelt man die kinematischen Zusammenhänge und drückt sie mithilfe der Systemfreiheitsgrade und deren zeitlichen Ableitungen aus. Der Schritt, die Orte und Orientierungen der Körper in dem mechanischen System zu bestimmen, wird als **Positionsanalyse** (engl. *position analysis*) bezeichnet. In diesem ersten Schritt werden alle benötigten Auslenkungsvariablen bestimmt. Der zweite Schritt der kinematischen Analyse ist dann die **Geschwindigkeitsanalyse** (engl. *velocity analysis*), in der man die jeweiligen Geschwindigkeiten der Systembestandteile als Funktion der zeitlichen Änderung der Freiheitsgrade bestimmt. Dazu kann man die in der Positionsanalyse gewonnenen kinematischen Zusammenhänge differenzieren. Sobald die Auslenkungsvariablen und die Geschwindigkeiten bestimmt sind, kann man mit dem dritten Schritt der kinematischen Analyse fortfahren, der sogenannten **Beschleunigungsanalyse** (engl. *acceleration analysis*). Dabei werden

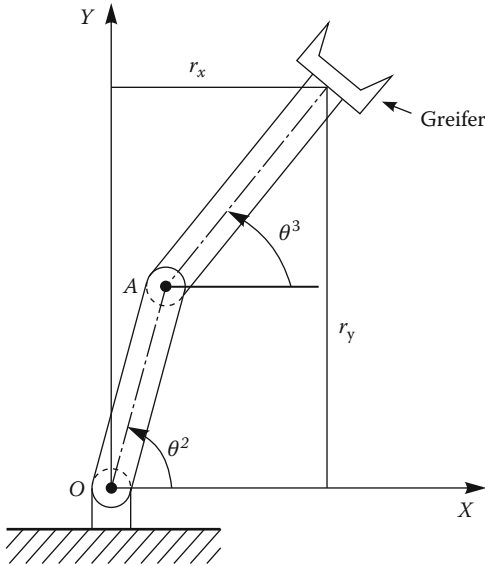


Abb. 1.9 Roboterarm mit zwei Freiheitsgraden.

die Geschwindigkeitszusammenhänge nach der Zeit abgeleitet, sodass man die jeweiligen Beschleunigungen der Körper in dem System erhält.

Um die drei Hauptschritte der kinematischen Analyse zu demonstrieren, betrachten wir den in Abb. 1.9 gezeigten Manipulator aus zwei Gliedern. Dieser Manipulator hat zwei Freiheitsgrade, als die man die Winkel θ^2 und θ^3 auffassen können, die die Orientierungen der beiden Glieder angeben. Wir setzen deren Längen mit l^2 und l^3 an. Die globale Position des Greifers ist in dem XY -Koordinatensystem durch die beiden Koordinaten r_x und r_y bestimmt. Diese Koordinaten lassen sich mithilfe der beiden Freiheitsgrade θ^2 und θ^3 folgendermaßen ausdrücken:

$$\left. \begin{aligned} r_x &= l^2 \cos \theta^2 + l^3 \cos \theta^3 \\ r_y &= l^2 \sin \theta^2 + l^3 \sin \theta^3 \end{aligned} \right\} \quad (1.1)$$

Beachten Sie, dass die Position eines beliebigen Punktes auf den Gliedern des Manipulators sich im XY -Koordinatensystem mithilfe der Freiheitsgrade θ^2 und θ^3 bestimmen lässt. Gleichung (1.1) fasst den Schritt der Positionsanalyse zusammen. Wenn θ^2 und θ^3 bekannt sind, kann man die Position des Greifers oder jedes anderen Punktes auf den Gliedern des Manipulators angeben.

Die Geschwindigkeitsgleichungen erhält man, indem man die Positionsgleichungen (1.1) nach der Zeit differenziert. Dann ergibt sich

$$\left. \begin{aligned} \dot{r}_x &= -\dot{\theta}^2 l^2 \sin \theta^2 - \dot{\theta}^3 l^3 \sin \theta^3 \\ \dot{r}_y &= \dot{\theta}^2 l^2 \cos \theta^2 + \dot{\theta}^3 l^3 \cos \theta^3 \end{aligned} \right\} \quad (1.2)$$

Wenn die Freiheitsgrade θ^2 und θ^3 sowie deren Zeitableitungen gegeben sind, dann kann man die Geschwindigkeit des Greifers mithilfe der eben hergeleiteten kinematischen Gleichungen bestimmen. Es lässt sich auch zeigen, dass man die Geschwindigkeit eines beliebigen anderen Punkts auf dem Manipulator in gleicher Weise bestimmen kann.

Wenn man die Geschwindigkeitsgleichungen (1.2) nach der Zeit differenziert, erhält man folgende Gleichungen für die Beschleunigung des Greifers:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{r}_x &= -\ddot{\theta}^2 l^2 \sin \theta^2 - \ddot{\theta}^3 l^3 \sin \theta^3 - (\dot{\theta}^2)^2 l^2 \cos \theta^2 - (\dot{\theta}^3)^2 l^3 \cos \theta^3 \\ \ddot{r}_y &= \ddot{\theta}^2 l^2 \cos \theta^2 + \ddot{\theta}^3 l^3 \cos \theta^3 - (\dot{\theta}^2)^2 l^2 \sin \theta^2 - (\dot{\theta}^3)^2 l^3 \sin \theta^3 \end{aligned} \right\} \quad (1.3)$$

Wenn also die Freiheitsgrade sowie deren erste und zweite zeitliche Ableitung bekannt sind, kann man die absolute Beschleunigung des Greifers (oder die Beschleunigung eines beliebigen anderen Punkts auf dem Manipulator) berechnen.

Beachten Sie, dass es zur Bestimmung der Systemkonfiguration nicht nötig ist, die Kraftgleichungen zu bestimmen, wenn die Freiheitsgrade sowie deren erste und zweite zeitliche Ableitung bekannt sind. Die kinematischen Gleichungen für Position, Geschwindigkeit und Beschleunigung reichen aus, um die Koordinaten, Geschwindigkeiten und die Beschleunigungen aller Punkte auf den Bestandteilen eines Mehrkörpersystems anzugeben. Ein System, für das alle Freiheitsgrade bekannt sind, heißt **kinematisch bestimmtes System** (engl. *kinematically driven system*). Wenn einer oder mehrere Freiheitsgrade des Systems nicht bekannt sind, muss man allerdings mithilfe der Bewegungsgesetze die Kraftgleichungen aufstellen, um die Systemkonfiguration zu bestimmen. Ein solches System wird in diesem Buch als **dynamisch bestimmtes System** bezeichnet (engl. *dynamically driven system*).

In den klassischen Ansätzen muss man sich auf seine Intuition verlassen, um die Freiheitsgrade des Systems auszuwählen. Wenn das System eine komplexe topologische Struktur hat oder aus einer großen Anzahl von Körpern besteht, können beim Einsatz der klassischen Verfahren allerdings Schwierigkeiten auftreten: Diese Verfahren führen für einfache Mechanismen zwar zu einfachen Gleichungen, für die Analyse einer großen Klasse von Anwendungen mechanischer Systeme eignen sie sich jedoch nicht. Viele der grundlegenden Konzepte in den klassischen Ansätzen sind jedoch dieselben, wie sie auch für moderne Computerverfahren verwendet werden.

In Kapitel 3 werden zwei Ansätze für kinematisch bestimmte Mehrkörpersysteme diskutiert: der klassische und der Computeransatz. Im **klassischen Ansatz**, geeignet für die Analyse einfacher Systeme, nimmt man an, dass die Systemfreiheitsgrade sich leicht erkennen lassen und dass man alle kinematischen Variablen unkompliziert mithilfe der Freiheitsgrade ausdrücken kann. Bei komplexeren Systemen wird es jedoch notwendig, ein anderes, computergestütztes Verfahren wie den **Computeransatz** zu verwenden. Hier formuliert man zunächst die kinematischen Bedingungsgleichungen, die die mechanischen Gelenke und die vorgegebenen Bewegungstrajektorien beschreiben; das führt zu einem relativ großen System nichtlinearer algebraischer Gleichungen, die sich

durch Computer und numerische Methoden lösen lassen. Dieses Computerverfahren kann als Ausgangspunkt für die Entwicklung vielseitig verwendbarer Computerprogramme dienen, mit denen sich eine große Klasse von kinematisch bestimmten Systeme – wie in Kapitel 3 diskutiert – behandeln lässt.

1.5

Kraftanalyse

Die Kräfte in einem Mehrkörpersystem kann man einteilen in Trägheitskräfte, äußere Kräfte und Gelenkkräfte. **Trägheit** (engl. *inertia*) ist die Eigenschaft eines Körpers, die den Widerstand gegen jegliche Änderung seines Bewegungszustands verursacht. Eine Trägheitskraft hängt im Allgemeinen sowohl von der Masse und der Form des Körpers als auch von seiner Geschwindigkeit und der Beschleunigung ab. Wenn ein Körper in Ruhe ist, sind seine Trägheitskräfte null. **Gelenkkräfte** (engl. *joint forces*) sind die Reaktionskräfte, die deswegen entstehen, weil die verschiedenen Teile eines Mehrkörpersystems miteinander verbunden sind. Man bezeichnet diese Kräfte manchmal auch als **innere Kräfte** oder **Zwangskräfte** (engl. *constraint forces*). Nach dem dritten Newton'schen Gesetz sind die Reaktionskräfte zwischen zwei miteinander verbundenen Körpern entgegengesetzt gleich (d. h. gleicher Betrag, aber entgegengesetzte Richtung). In diesem Buch werden alle diejenigen Kräfte, die weder Trägheits- noch Gelenkkräfte sind, als **äußere Kräfte** (engl. *external forces*) bezeichnet. Beispiele dafür sind Feder- und Dämpferkräfte, Drehmomente von Motoren, Kräfte von Stellgliedern oder Gravitationskräfte.

Während wir uns in der Kinematik nur mit Bewegungen befassen, ohne die verursachenden Kräfte zu betrachten, sind wir bei der dynamischen Analyse an der Bewegung und den ihr zugrunde liegenden Kräften interessiert. Anders als bei einer statischen oder kinematischen Analyse, in der man nur algebraische Gleichungen verwendet, ist in der dynamischen Analyse die Bewegung eines Mehrkörpersystems durch Differentialgleichungen zweiter Ordnung bestimmt. In diesem Buch werden verschiedene Verfahren für die dynamische Analyse von mechanischen Systemen behandelt, die aus miteinander verbundenen starren Körpern bestehen. Um die Herleitungen in den späteren Kapiteln nachvollziehen zu können, wird nur vorausgesetzt, dass der Leser mit dem **zweiten Newton'schen Gesetz** vertraut ist. Nach diesem Gesetz ist die auf ein Teilchen wirkende Kraft gleich der Änderungsrate des Teilchenimpulses. Das zweite Newton'sche Gesetz führt – zusammen mit den **Euler'schen Gleichungen** für die Rotation eines starren Körpers – auf die dynamischen Bedingungen für die starren Körper. Mit dem d'Alembert'schen Prinzip, nach dem man Trägheitskräfte wie wirkende Kräfte behandeln kann, lässt sich das schlagkräftige **Prinzip der virtuellen Arbeit** herleiten. Lagrange nahm dieses Prinzip als Ausgangspunkt für die Herleitung seiner dynamischen Gleichung, die mithilfe der (skalaren) Arbeit und Energie ausgedrückt wird. Das d'Alembert'sche Prinzip, das Prinzip der virtuellen Arbeit und die Lagrange-Gleichungen werden im Detail in den Kapiteln 4 und 5 diskutiert.

1.6

Dynamische Gleichungen und ihre unterschiedlichen Formen

Abhängig von der Anzahl der Koordinaten, die man zur Definition der Konfiguration des mechanischen Systems auswählt, kann man unterschiedliche Gleichungsstrukturen erhalten und somit verschiedene Lösungsverfahren anwenden. Einige der Formulierungen führen zu Gleichungen, die mithilfe der Zwangskräfte ausgedrückt werden, bei anderen Formulierungen hingegen fallen die Zwangskräfte automatisch heraus. Beispielsweise kann man die Bewegungsgleichungen für ein einfaches System wie den Block in Abb. 1.10 mithilfe eines minimalen Satzes von unabhängigen Koordinaten formulieren, man kann aber auch einen redundanten Satz von Koordinaten verwenden, die nicht vollständig unabhängig sind. Da das System einen Freiheitsgrad hat – entsprechend der Bewegung in horizontaler Richtung –, genügt eine einzige Gleichung, um die Konfiguration des Blocks zu definieren. Diese Gleichung lässt sich einfach schreiben als

$$m\ddot{x} = F \quad (1.4)$$

Darin ist m die Masse des Blocks, x ist seine Koordinate, und F ist die auf den Block wirkende Kraft. Beachten Sie, dass man die obige Gleichung bei gegebener Kraft nach der Beschleunigung auflösen kann. Beachten Sie auch, dass die obige Gleichung keine Reaktionskräfte enthält, weil die Bewegung mithilfe des Freiheitsgrades beschrieben wird. Wie wir in den folgenden Kapiteln sehen werden, ist es immer möglich, einen Satz von dynamischen Gleichungen aufzustellen, in denen keine Zwangskräfte vorkommen, wenn man Freiheitsgrade nutzt. Das **Prinzip der virtuellen Arbeit der Dynamik** gibt uns ein kraftvolles Werkzeug an die Hand, mit dem wir systematisch einen Satz von dynamischen Gleichungen für ein Mehrkörpersystem mit Zwangsbedingungen aufstellen können, ohne dass diese Gleichungen die Zwangskräfte enthalten. Dieses Prinzip wird ausführlich in Kapitel 5 behandelt.

Ein weiterer Ansatz, mit dem man Bewegungsgleichungen für das in Abb. 1.10 gezeigte einfache System aufstellen kann, ist die Verwendung von redundanten Koordinaten. Wir könnten beispielsweise die Dynamik des Blocks mithilfe der

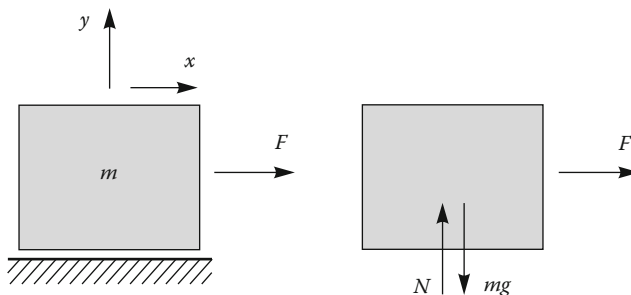


Abb. 1.10 Formen der Bewegungsgleichung.