

Dortmunder Beiträge zur Entwicklung
und Erforschung des Mathematikunterrichts

RESEARCH

Sabrina Heiderich

Zwischen situativen und formalen Darstellungen mathematischer Begriffe

Empirische Studie zu
linearen, proportionalen und
antiproportionalen Funktionen



Springer Spektrum

Dortmunder Beiträge zur Entwicklung und Erforschung des Mathematik- unterrichts

Band 30

Herausgegeben von

S. Hußmann,

M. Nührenbörger,

S. Prediger,

C. Selter,

Dortmund, Deutschland

Eines der zentralen Anliegen der Entwicklung und Erforschung des Mathematikunterrichts stellt die Verbindung von konstruktiven Entwicklungsarbeiten und rekonstruktiven empirischen Analysen der Besonderheiten, Voraussetzungen und Strukturen von Lehr- und Lernprozessen dar. Dieses Wechselspiel findet Ausdruck in der sorgsamem Konzeption von mathematischen Aufgabenformaten und Unterrichtsszenarien und der genauen Analyse dadurch initiiertes Lernprozesse.

Die Reihe „Dortmunder Beiträge zur Entwicklung und Erforschung des Mathematikunterrichts“ trägt dazu bei, ausgewählte Themen und Charakteristika des Lehrens und Lernens von Mathematik – von der Kita bis zur Hochschule – unter theoretisch vielfältigen Perspektiven besser zu verstehen.

Herausgegeben von

Prof. Dr. Stephan Hußmann,

Prof. Dr. Marcus Nührenbörger,

Prof. Dr. Susanne Prediger,

Prof. Dr. Christoph Selter,

Technische Universität Dortmund, Deutschland

Weitere Bände in dieser Reihe <http://www.springer.com/series/12458>

Sabrina Heiderich

Zwischen situativen und formalen Darstellungen mathematischer Begriffe

Empirische Studie zu
linearen, proportionalen und
antiproportionalen Funktionen

Mit einem Geleitwort von Prof. Dr. Stephan Hußmann

 Springer Spektrum

Sabrina Heiderich
Technische Universität Dortmund, IEEM
Deutschland

Dissertation Technische Universität Dortmund, Fakultät für Mathematik, 2016

Tag der Disputation: 26.10.2016

Erstgutachter: Prof. Dr. Stephan Hußmann
Zweitgutachterin: Prof. Dr. Katja Lengnink

Dortmunder Beiträge zur Entwicklung und Erforschung des Mathematikunterrichts
ISBN 978-3-658-18869-6 ISBN 978-3-658-18870-2 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-658-18870-2

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Springer Spektrum

© Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH 2018

Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung, die nicht ausdrücklich vom Urheberrechtsgesetz zugelassen ist, bedarf der vorherigen Zustimmung des Verlags. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Bearbeitungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Der Verlag, die Autoren und die Herausgeber gehen davon aus, dass die Angaben und Informationen in diesem Werk zum Zeitpunkt der Veröffentlichung vollständig und korrekt sind. Weder der Verlag noch die Autoren oder die Herausgeber übernehmen, ausdrücklich oder implizit, Gewähr für den Inhalt des Werkes, etwaige Fehler oder Äußerungen. Der Verlag bleibt im Hinblick auf geografische Zuordnungen und Gebietsbezeichnungen in veröffentlichten Karten und Institutionsadressen neutral.

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier

Springer Spektrum ist Teil von Springer Nature
Die eingetragene Gesellschaft ist Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH
Die Anschrift der Gesellschaft ist: Abraham-Lincoln-Str. 46, 65189 Wiesbaden, Germany

Geleitwort

In der Didaktik der Funktionen liegt seit vielen Jahren ein breites Wissen über Lernstände, Fehlvorstellungen und typische Fehler vor. Dieser eher defizit-orientierten Sichtweise auf dieses Themenfeld stehen zwei Perspektiven gegenüber, die bislang noch wenig beforscht und entwickelt sind: Eine stärken- bzw. ressourcenorientierte und eine prozessorientierte Perspektive.

Gleichermaßen rudimentär entwickelt ist eine Sprache, diese Prozesse so zu beschreiben, so dass Kernelemente sichtbar und für Weiterentwicklungen nutzbar gemacht werden können.

Sabrina Heiderich hat sich mit der vorliegenden Arbeit diesem bedeutenden Thema der Mathematikdidaktik gewidmet, wissend um die einleitend genannte Problematik. Dabei wird das Spannungsfeld von Begriffsbildungsprozessen zwischen situativen und formalen Referenzsystemen diskutiert und empirisch untersucht. Die Arbeit knüpft an eine uneinheitliche Forschungslage an: Einerseits werden situativen Rahmungen eine maßgebliche Rolle bei der mathematischen Begriffsbildung beigemessen, andererseits liegen Befunde vor, die die Lokalität und Nichttransferierbarkeit von situativem Wissen beklagen, so dass die entsprechende formale Mathematik in ihrer Abstraktion nicht entwickelt werden kann. Die Forschungslage ist vermutlich aus dem Grunde so divers, da sich die dabei aufgeführten Befunde auf sehr unterschiedliche fachliche Gegenstände, Kontexte und Wissenstypen beziehen. Insofern setzt die vorliegende Arbeit am Kern des Problems an, wenn sie für einen spezifischen Gegenstand – hier die einfachen Funktionstypen (linear, proportional und antiproportional) – der Frage nachgeht, wie situativ gestütztes Wissen und fachliches Wissen zusammenhängen und jeweils als Argumentationsbasis dienen.

Dazu wird zu Beginn auf der fachlichen Ebene der Gegenstand der linearen und antiproportionalen Funktionen formal und semantisch aufbereitet, um für den Unterricht der Sekundarstufe fachlich relevante Argumentationslinien aufzuspüren. Bzgl. der situativen und kontextuellen Einbettung werden die zentralen Kontexte hinsichtlich einer epistemologischen Charakterisierung diskutiert. Diese Überlegungen sind die Basis für ein Untersuchungsdesign, mit dem relevante und zentrale Prozesse der Begriffsbildung zu diesem Gegenstand rekonstruiert und erklärt werden können. Im Fokus stehen Lernende, die die Funktionstypen im Unterricht schon kennengelernt haben. Dies ist insofern naheliegend, da die Nachhaltigkeit der situativ gestützten Begriffsbildungsprozesse mit denen der formal gestützten Begriffsbildungsprozesse kontrastiert werden können.

Entstanden ist ein tiefgehendes Verständnis von den stattfindenden Lernprozessen und deren inhaltlicher Strukturierung, wie auch ein hervorragendes Bild, das den Zusammenhang von proportionalem, linearem und antiproportionalem funktionalen Denken beschreibt, indem gezeigt wird, welche Lernprozesse hinderlich sind, welche förderlich sein können und wie die jeweiligen Hürden identifiziert und überwunden werden können. Insofern zeigt der Kern der vorliegenden Arbeit mehrere Facetten: Es galt das Denken von Lernenden in seiner Prozessstruktur zu verstehen, dabei die Potentiale und Hürden so zu nutzen, dass sowohl lokale Theorien zu den einfachen Funktionstypen als auch konkrete Lernarrangements weiterentwickelt werden konnten.

Mit dieser Arbeit hat Sabrina Heiderich zu einem in der Mathematikdidaktik bedeutsamen Inhaltsbereich eine gewinnbringende neue Perspektive eröffnet. Dabei zeichnet sich die Arbeit durch die Komplexität des theoretischen Fundaments, der Stringenz der systematischen und komplexen Analysen, der Sauberkeit und Angemessenheit der Methoden und der überzeugenden Ergebnisse aus.

Stephan Hußmann

Danksagung

Ohne das Netz aus kompetenten, hilfsbereiten und liebevollen Menschen wäre das Projekt „Diss“ nicht möglich gewesen. Folgenden Personen möchte ich daher an dieser Stelle herzlich danken.

Prof. Dr. Stephan Hußmann danke ich für sein Vertrauen, das er mir nach der Masterarbeit gegeben hat, für die fortwährende und qualitätssteigernde Unterstützung des Dissertationsprojekts durch intensive Gespräche und immer neu herausfordernde Rückmeldungen, für sein laterales Denken und für seine inspirierenden Lehrweisen.

Prof. Dr. Katja Lengnink danke ich für ihre fachliche und fachdidaktische Genauigkeit und für ihre ausgesprochen herzliche Mitwirkung als Zweitgutachterin.

Prof. Dr. Marcus Nührenböcker danke ich für die unkomplizierte Übernahme des Drittprüferamts.

Danken möchte ich der *Arbeitsgruppe Hußmann/Prediger*, insbesondere *Ines Bronner, Lara Sprenger, Maximilian Gerick, Karin Kempfer, Dr. Nadine Wilhelm und Dr. Frank Sprütten*, die neben ihren anregenden Diskussionen und konstruktiven Hinweisen zu Teilen des Forschungsprojekts ebenso das Leben rund um die Promotion besonders bereichert haben.

Ein weiterer Dank gilt den *MitarbeiterInnen am Institut für Entwicklung und Erforschung des Mathematikunterrichts*, die mir insbesondere in der Endphase auf so vielen verschiedenen Ebenen geholfen haben.

Der studentischen Hilfskraft *Alicia Schützner* danke ich für ihre überaus gewissenhafte und zuverlässige Arbeit, die mich besonders hinsichtlich der Erstellung von Transkripten sehr entlastet hat.

Ein spezieller Dank gilt meinen Eltern, *Elisabeth und Jürgen Schäfer*, die schon immer an mich geglaubt haben und mir aufopferungsvoll jede Tür auf meinem Weg geöffnet haben. Das weiß ich sehr zu schätzen.

Meinen Eltern, meiner Tante *Inge* und meinem Onkel *Manfred Maaß* und meinen Schwiegereltern *Ida* und *Horst Heiderich* danke ich für ihre liebevolle Bekleidung der Ämter als Omas und Opas. Ein derartiger Rückhalt ist in dieser intensiven Phase ein wahrer Luxus.

Meinem Mann *Lars* und unserer wundervollen Tochter *Nela* danke ich dafür, dass sie durch- und mich ausgehalten haben. Ihr habt mir die nötige Abwechslung mit schönen Momenten gegeben, um neue Energien zu schöpfen.

Vor euch allen ziehe ich den Hut, den ich durch euch seit dem 26.10.2016 tragen darf. Danke!

Sabrina Heiderich

Inhaltsverzeichnis

Einleitung.....	1
1 Theoretische Festlegungen.....	7
1.1 Begriffe und Wissen.....	7
1.1.1 Perzeptive vs. individuelle Ebene	8
1.1.2 Individuelle vs. soziale Ebene.....	13
1.1.3 Situierete Ebene.....	15
1.1.4 Grundfunktionen von Begriffen	15
1.2 Situationen und mathematische Begriffe.....	18
1.2.1 Mathematische Darstellungen vs. Begriffe	18
1.2.2 Situativer Gebrauch mathematischer Begriffe	21
1.2.3 Situationsübergreifender Gebrauch mathematischer Begriffe	25
1.3 Beschreibungssprache und Vorbereitung des Analyseschemas	29
2 Fachliche Fokussierungen.....	33
2.1 Formale Fokussierungsebene	34
2.1.1 Der Begriff der Funktion	34
2.1.2 Der Begriff der linearen Funktion.....	36
2.1.3 Der Begriff der proportionalen Funktion	42
2.1.4 Der Begriff der antiproportionalen Funktion	46
2.1.5 Strukturierung der formalen Klassen	50
2.2 Lokale Bedeutungen aus formaler Perspektive	59
2.2.1 Grundvorstellungen und Darstellungen.....	59
2.2.2 Bedeutungen von a	62
2.2.3 Bedeutungen der additiven Änderungen.....	66
2.2.4 Bedeutungen der multiplikativen Änderungen	69
2.2.5 Strukturierung der formalen Bedeutungen.....	71
2.3 Situative Fokussierungsebene.....	74
2.3.1 Funktionale Aspekte von Situationen	74
2.3.2 Kontexte und Situationen.....	75
2.3.3 Strukturierung der Situationsklassen	78
2.4 Lokale Bedeutungen aus situativer Perspektive	79
2.4.1 Fundamentale Ideen, Kernideen und Grundvorstellungen.....	80

2.4.2	Strukturierung der situativen Bedeutungen.....	82
2.5	Empirische Einsichten.....	85
2.5.1	Bildungsstandards und typische Lernpfade	86
2.5.2	Identifizierungen zwischen Situationen und den mathematischen Begriffen	93
2.6	Diskussion, spezifiziertes Analyseschema und Festlegung auf Forschungsfragen.....	102
3	Methodische Festlegungen.....	109
3.1	Forschungsdesign	109
3.1.1	Forschungskontext.....	110
3.1.2	Erhebungsmethodik	112
3.1.3	Untersuchungsplanung.....	115
3.2	Auswertungsmethodik	125
3.2.1	Grobanalyse	125
3.2.2	Feinanalyse	126
4	Empirische Ergebnisse.....	143
4.1	Identifizierung der mathematischen Begriffe in Situationen.....	143
4.1.1	Begriff funktionaler Zusammenhang bzw. Begriff der Funktion..	144
4.1.2	Situationsklassen konstante Zunahme bzw. konstante Abnahme vs. Begriffe der Proportionalität bzw. Linearität.....	157
4.1.3	Situationsklassen gleichsinnige Vervielfachung bzw. gegensinnige Vervielfachung vs. Begriffe der Proportionalität bzw. Antiproportionalität	168
4.2	Unterscheidung der mathematischen Begriffe über verschiedene Situationen hinweg	189
4.2.1	Begriff der Proportionalität vs. Begriff der Linearität	189
4.2.2	Begriff der Proportionalität vs. Begriff der Antiproportionalität ..	205
4.2.3	Begriff der Linearität vs. Begriff der Antiproportionalität	216
4.3	Versuche zur Identifizierung und Unterscheidung.....	238
4.3.1	Situationsklassen und Begriffe kontrastieren.....	238
4.3.2	Situationsklassen und Begriffe variieren	262
5	Zusammenfassung und Perspektiven	287
	Literaturverzeichnis.....	309

Einleitung

Aufgabe: „100 Bonbons sollen bei einer Gruppe von Kindern fair geteilt werden.“

- I: Und was wäre das für euch für ein funktionaler Zusammenhang, wenn ihr den jetzt genau bezeichnen solltet?
- L: Ich glaube //**proportional**//.
- J: //Proportional// Ja!
- I: Ok. Warum?
- L: Ähm, weil wenn null Kinder ähm da sind, dann müssen/ obwohl, wenn null Kinder da sind, dann sind ja noch 100 Bonbons übrig. [...] Und ähm wenn dann zum Beispiel zwei Kinder da sind, dann müssen die ja wieder aufgeteilt werden, also 50, 50. [...] Also wär's vielleicht //**linear**//.
- J: //N...// nein, **antiproportional**. Es geht ja immer runter.

K	B
0	100
2	50

(Julius anschließende numerische Darstellung zur Bonbonaufgabe) [...]

- L: Ich glaube das ist gar keine/ äh gar **kein Zusammenhang**. [...] Ähm, weil das also äh je nachdem wie man das jetzt betrachtet. Also, wenn null Kinder da sind, dann sind ähm 100 Bonbons da. Aber wenn ähm schon zwei Kinder da sind, dann ist ja GAR kein Bonbon mehr da, weil die ja aufgeteilt werden. Also/
- J: Und EIN Kind ist ja auch noch 100.
- L: Ja, nee, dann hat das KIND ja die Bonbons. [...] je nachdem wie man das nimmt, ob man dann ähm ein Kind sieht, also aus der Sicht des Kindes oder aus der Sicht der äh/ der das gibt.

(Ausschnitt aus einem Diskurs zwischen der Interviewerin (I) und den Lernenden Lotta (L) und Julius (J), Gymnasium, Klasse 8)

Dieses Einstiegsbeispiel aus den empirischen Erhebungen steht beispielhaft für die verschiedenen Bausteine und Zielperspektiven dieses Dissertationsprojekts. Es geht um einen Fokus auf Individuen (Lernende, wie Lotta und Julius), deren Äußerungen und Handlungen zum Verstehen individuell verwendeter (mathematischer) Begriffe herangezogen werden. Es geht darum zu erheben, welche Einflüsse sowohl situative, als auch formal-mathematische Aspekte auf die Begriffsbildung der Lernenden haben. Dabei wird insbesondere auf Zeitpunkte in der Lernbiographie fokussiert, an denen die Vermittlung der relevanten Inhalte schon stattgefunden hat. Darüber hinaus geht es um den Lerngegenstand selbst, mit der Frage, welche Merkmale von Linearität, Proportionalität und Antiproportionalität maßgeblich sind, um sie in konkreten Situationen (wie bspw. in obiger Bonbonaufgabe) zu identifizieren und in verschiedenen Situationen voneinander zu unterscheiden.

Fokus auf individuelle Begriffe und Begriffsbildungsprozesse

Begriffe, als zentrale Momente menschlichen – nicht nur mathematischen – Denkens und Handelns (in Anl. an Hußmann 2009, S. 62), werden in dieser Arbeit systematisch über einen qualitativen Blick auf individuelle *Begründungen* („das ist [...] kein Zusammenhang [...], weil...“) und Konsequenzen im Rahmen ihres *praktischen* Gebrauchs erhoben. Einen Zugriff auf individuell verwendete Begriffe erhält man aus forschungsmethodischer Perspektive über explizite, intentionale Aussagen, in denen diese genutzt werden (individuelle Ebene). Diese Aussagen werden in diskursiven Praktiken expliziert (soziale Ebene). Eine Referenz für die Korrektheit von individuell für wahr gehaltenen Aussagen zu bestimmten Begriffen stellt die soziale Praxis dar. Inwieweit Begriffe tatsächlich gegenständlich existieren bzw. reale Objekte durch diese Begriffe bezeichnet werden, bleibt in der hier eingenommenen inferentialistischen Perspektive davon unberührt.

„Wir kennen nichts, als unsere Art, sie [die Gegenstände; S.H.] wahrzunehmen, die uns eigentlich ist“ (Kant 1787, S. 59).

Begriffe werden empirisch wahrnehmbar über ihre *Darstellungen* (perzeptive Ebene; bspw. wie die oben textlich visualisierte Bonbonaufgabe oder die numerische Visualisierung von Julius). Eine Darstellung erhält ihre Bedeutung durch die Begriffe, die dem Individuum zur Verfügung stehen, durch diese er die Darstellung empirisch wahrnehmen oder auch erstellen kann.

Im sozialen Diskurs muss die eigene Position durch das Hervorbringen von Gründen gerechtfertigt werden („Aber wenn ähm schon zwei Kinder da sind, dann ist ja GAR kein Bonbon mehr da, weil die ja aufgeteilt werden“). Durch die Position des Gegenübers („Und EIN Kind ist ja auch noch 100“) werden im sozialen Diskurs begriffliche Bedeutungen ausgelotet und weiterentwickelt. Das wechselseitige Zusammenspiel einer individuellen, perzeptiven und sozialen Ebene charakterisiert dabei Begriffe und Begriffsbildungsprozesse.

Fokus auf eine situative und formale Dimension

In den ersten beiden von Winter (1996) formulierten Grunderfahrungen für einen allgemeinbildenden Mathematikunterricht heißt es, dass die „Mathematik als nützliche, brauchbare Disziplin“ im Rahmen mathematischer Modellbildung erlebt und „die innere Welt der Mathematik“ (S. 35ff) im Zuge individueller Begriffsbildung erfahren werden soll.

Durch die Doppelnatur von Begriffen zwischen situativen Phänomenen und formaler Mathematik (vgl. Vollrath 1982, Freudenthal 1973) kann die Zuschreibung von Bedeutungen zu mathematischen Begriffen unterschiedlich verankert sein. Dabei bedarf es der Betrachtung sowohl von Merkmalen der Situation, um einen Zugang zu dieser zu erhalten und auf ihrer Basis zu argumentieren, als auch der Betrachtung von formalen Merkmalen, die den mathematischen Be-

griff kennzeichnen, um diesen zu charakterisieren. Im Idealfall sind die bedeutungsgebenden Aussagen (der Individuen oder der sozialen Gruppe) auf situativer und formaler Ebene aufeinander bezogen, sie können aber auch koexistieren und sich sogar widersprechen.

Diese bedeutsame Dualität mathematischer Begriffe wird in der vorliegenden Arbeit genauer untersucht und mit Hilfe einer *situativen* und einer *formalen Fokussierungsebene* konkretisiert. Dabei sollen relevante Bedeutungen von Begriffsmerkmalen auf beiden Ebenen und in ihrem Zusammenspiel untersucht werden.

Fokus auf die Begriffe lineare, proportionale und antiproportionale Funktion

Gegenstandsspezifisch geht es um den Begriff der Funktion (bzw. funktionale Abhängigkeit, funktionaler Zusammenhang), der als fundamentale Idee (Bruner 1970) der Mathematik beschrieben wird (vgl. Heymann 1996, Tietze et al. 1997, Vohns 2005).

In den Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss (Beschluss der KMK vom 4.12.2003) und für die Allgemeine Hochschulreife (Beschluss der KMK vom 18.10.2012) wird die Leitidee ‚Funktionaler Zusammenhang‘ als eine von fünf relevanten Ideen für den Unterricht zentral positioniert. Auch wird bereits in den Bildungsstandards für den Primarbereich (Beschluss der KMK vom 15.10.2004) unter dem mathematischen Kompetenzbereich ‚Muster und Strukturen‘ ein Erkennen, Beschreiben und Darstellen ‚funktionaler Beziehungen‘ in Sachsituationen und Tabellen gefordert (vgl. S. 11). Diese werden in der Sekundarstufe I unter dem Blickwinkel verschiedener Funktionstypen mit charakteristischen Eigenschaften thematisiert und münden in der Sekundarstufe II in die Differential- und Integralrechnung der Analysis.

In dieser Arbeit wird ein Fokus auf die ersten Spezifizierungen des Funktionsbegriffs gerichtet – den linearen, proportionalen und antiproportionalen Funktionen –, die einen Grundstein für weitere Funktionstypen legen.

Ziel der fachlichen Strukturierungen und empirischen Analysen ist ein besseres Verstehen des Gegenstandsbereichs der elementaren Funktionen als mathematische Begriffe und ihrer Anwendung in verschiedenen Situationen mit variierenden Kontexten unter besonderer Berücksichtigung individueller Potentiale und Hürden.

Vorliegende Forschungsergebnisse verweisen aus quantitativer Perspektive auf Hürden in der Identifizierung und Unterscheidung dieser Typen in Situationen. Insbesondere wird eine Identifizierung von Abnahmeprozessen mit den Begriffen Linearität und Antiproportionalität als problematisch benannt (vgl. De Bock et al. 2015, Kurth 1992, Suarez 1977).

Mit einem qualitativen Blick auf Lernstände, aber auch auf Lernprozesse soll dieses Forschungsprojekt einen Beitrag dazu leisten, Gelingensbedingungen

und Hürden bei der Unterscheidung der Funktionstypen auf situativer, wie auf formaler Ebene und in ihrem Zusammenwirken zueinander offen zu legen und hinsichtlich der Hürden mögliche Ansätze für eine Überwindung zu formulieren und zu erproben.

Aufbau der Arbeit

In den **theoretischen Festlegungen** in Kapitel 1 werden zum einen die lerntheoretischen (philosophisch-inferentialistischen und psychologisch-orientierten) Grundannahmen der Arbeit hinsichtlich individueller und sozialer Wissenskonstruktionsprozesse diskutiert, zum anderen wird die Bedeutung von so verstandenen Begriffen in ihrer Verwendung in lebensweltlichen Situationen geklärt. Dabei werden geeignete (Analyse-)Kategorien (u.a. Fokussierungen, Festlegungen und inferentielle Relationen) zur Beschreibung konventionaler und individueller Übersetzungsprozesse zwischen situativen und formalen Darstellungen mathematischer Begriffe fixiert.

In den **fachlichen Fokussierungen** in Kapitel 2 wird der Lerngegenstand linearer, proportionaler und antiproportionaler Funktionen in seiner mathematikdidaktisch relevanten, sowohl formalen als auch situativen Dimension und seinen jeweiligen Bedeutungen je spezifiziert und strukturiert, um auf Grundlage der Forschungslage eine begründete Festlegung auf folgende, relevante Forschungsfragen abzuleiten.

I. Ebene individueller Begründungsmuster:

Welche Merkmale werden im Rahmen individueller Identifizierungen zur *Begründung* funktionaler Zusammenhänge in Situationen und zur Unterscheidung der Begriffe der linearen, proportionalen und antiproportionalen Funktionen genutzt?

- a) Auf der *situativen Fokussierungsebene* bzgl. linearer, proportionaler und antiproportionaler Zusammenhänge: Welche Merkmale von konkreten Situationen und über verschiedene Situationen hinweg stellen Potentiale und Hürden für die individuellen Identifizierungen und Begründungen der verwendeten Begriffe dar?
- b) Auf der *formalen Fokussierungsebene* bzgl. linearer, proportionaler und antiproportionaler Funktionen: Welche Merkmale in den Darstellungsformen stellen Potentiale und Hürden für die individuellen Identifizierungen und Begründungen der verwendeten Begriffe dar?
- c) Inwiefern werden Merkmale der *situativen* und *formalen Fokussierungsebene* im Rahmen gelingender und nicht gelingender, individueller Identifizierungen isoliert bzw. aufeinander bezogen verwendet?

II. Ebene des Lerngegenstands:

Welche Hinweise ergeben sich (insbesondere im Rahmen linearer und antiproportionaler Abnahmeprozesse) für eine Restrukturierung des mathematischen Lerngegenstands linearer, proportionaler und antiproportionaler Funktionen hinsichtlich ihrer Identifizierung und Unterscheidung in Situationen und über verschiedene Situationen hinweg?

In den **methodischen Festlegungen** in Kapitel 3 werden das Forschungsdesign und die qualitative Auswertungsmethodik theoriegeleitet entwickelt und diskutiert.

Als Bausteine der **empirischen Ergebnisse** werden in Kapitel 4 die erhobenen Lernstände zur Identifizierung der mathematischen Begriffe in Situationen, der Unterscheidung der mathematischen Begriffe über verschiedene Situationen hinweg und die sich anknüpfenden Lernprozesse mit Schwerpunkt auf der Kontrastierung und Variation der Begriffe ausführlich dargestellt, feinanalytisch in den Blick genommen und bezogen auf die (Re-)Strukturierungen der fachlich-konventionalen Festlegungen im Rahmen der gemeinsamen Analysesprache diskutiert.

Die **Zusammenfassung und Perspektiven** in Kapitel 5 bündeln die gewonnenen Erkenntnisse entlang der Forschungsfragen und geben einen Ausblick auf mögliche Anschlussfragen.

1 Theoretische Festlegungen

Ziel dieser Arbeit ist die empirisch-qualitative Untersuchung des individuellen Gebrauchs der Begriffe der linearen, proportionalen und antiproportionalen Funktionen in konkreten Situationen und über verschiedene Situationen hinweg.

Dieses Kapitel soll zur Vorbereitung auf die fachlichen, stoffdidaktischen Festlegungen (Kap. 2) ein Fundament aus philosophischen, psychologischen und mathematikdidaktischen Annahmen schaffen, das eine theoretisch-fundierte Sichtweise mit daran angelehnter Beschreibungssprache und ein entsprechendes Analyseinstrument zur Verfügung stellt, mit dessen Hilfe individuelle Bearbeitungen von mathematischen Aufgaben analysiert werden können.

Zu Beginn werden grundlegende, philosophische Theorieelemente zum Wissensbegriff und zum Gebrauch von Begriffen im Wechselspiel zwischen Individuum und seiner perceptiven und sozialen Umwelt dargelegt. Diese werden unter dem psychologischen Fokus der ‚Epistemologie der inferentiell gegliederten Begründungsnetze‘ (Hußmann & Schacht 2015, Hußmann et al. submitted) betrachtet. Eine verknüpfende Perspektive auf das Zusammenwirken der individuellen, perceptiven und sozialen Ebene wird durch die Annahme der Situiertheit von Wissen geschaffen. Zusammenfassend werden Begriffen zentrale Grundfunktionen zugeschrieben (Kap. 1.1). Die fokussierten Kategorien werden im Rahmen des Interesses der individuellen Nutzung mathematischer Begriffe und ausgewählter, mathematikdidaktischer Theorien hinsichtlich ihrer Relevanz zum begrifflichen Umgang in konkreten und verschiedenen Situationen diskutiert (Kap. 1.2). Aus diesen theoretischen Fixierungen wird die für das Forschungsvorhaben relevante Beschreibungssprache aus *Festlegungen*, *Urteilen*, *inferentiellen Relationen*, *Fokussierungen*, *Situationen*, einer *situativen* und *formalen Fokussierungsebene* und ihren *Situations-* bzw. *formalen Klassen* abgeleitet, die in ein deskriptives Analyseschema aus theoretischer Perspektive zur empirischen Erfassung individueller Identifizierungen von Situationen mit mathematischen Begriffen integriert werden (Kap. 1.3).

1.1 Begriffe und Wissen

„Es bedeutet anzuerkennen, daß Konzeptionen, Theorien und Systeme des Denkens immer dadurch, daß sie benutzt werden, einer Entwicklung offenstehen. Es unterstreicht die Lektion, daß wir ebenso nach Hinweisen, sie zu ändern, Ausschau halten müssen, wie nach Gelegenheiten, sie zu bestätigen.

Sie sind Werkzeuge. Wie im Falle aller Werkzeuge liegt ihr Wert nicht in ihnen selbst, sondern in ihrer Fähigkeit zu arbeiten, die sich in den Konsequenzen ihres Gebrauchs zeigt“

(John Dewey 1989, S. 189f).

In dieser Arbeit soll der Gebrauch vorhandenen Wissens spezifischer Begriffe in konkreten Situationen und über verschiedene Situationen hinweg empirisch untersucht werden. Dadurch ergibt sich zunächst die grundlegende Frage nach der Problematik des Erfassens individueller Begriffe: ‚Wie kann ich (als Forscher) wissen, was ein anderer weiß und seinen individuellen Begriffen zugrunde liegt?‘ mit spezifischem Blick auf den Gebrauch mathematischer Begriffe.

Den Ausgangspunkt für die in dieser Arbeit eingeschlagene Perspektive auf Begriffe und deren Gebrauch bildet der sprachanalytische Ansatz der ‚Epistemologie der inferentiell gegliederten Begründungsnetze‘, der verschiedene philosophische und psychologische Ideen miteinander vereint (Hußmann & Schacht 2015, Hußmann et al. submitted). Dabei werden unterschiedliche Bezüge aus philosophischen Ansätzen und deren Entwicklungen, die einen eher konventionalen Blick implizieren, für einen psychologischen Fokus brauchbar gemacht. Dazu werden zentrale Kategorien als ‚Beschreibungssprache für mathematische Lernprozesse‘ (Schacht 2012, S. 36, Hervorh. i. Orig.) genutzt, um Begriffsbildungsprozesse und individuelle Begriffe empirisch zu ergründen (vgl. Hußmann & Schacht 2009a, 2009b, Schacht 2012, Schindler 2014, Richter 2014).

Dieser Ansatz bietet die Möglichkeit individuelle und konventionale Begriffe - ohne den Anspruch der Existenz einer objektiven, allgemeinen Wirklichkeit - im Rahmen einer Sprache zu beschreiben und zu vergleichen, indem der Gehalt von Begriffen durch ihren Gebrauch im Zuge expliziter Äußerungen erklärt wird.

Grundlegende, theoretische Pfeiler dieser Arbeit und dieses Ansatzes sind die Annahme der ‚Rationalität menschlichen Denkens und Handelns‘ und die ‚Konzeptualisierung von Diskursen als Sprachspiele‘ (vgl. Hußmann et al. submitted). Diese Grundannahmen werden im Folgenden anhand der für die Festlegung der Facetten des Wissensbegriffs entscheidenden drei Bezugspunkte der perzeptiven, individuellen und sozialen Ebene unter Rückbezug auf die philosophischen Anleihen erklärt. Aufgrund der Korrespondenz der drei Ebenen untereinander werden diese durch die Dichotomien ‚perzeptiv vs. individuell‘ (Kap. 1.1.1) und ‚individuell vs. sozial‘ (Kap. 1.1.2) nacheinander diskutiert. Eine verknüpfende Ebene bildet die Annahme der ‚Situiertheit von Wissen‘ (Kap. 1.1.3), die die perzeptive, individuelle und soziale Ebene gleichsam fokussiert und verbindende Theorien ableitet.

1.1.1 Perzeptive vs. individuelle Ebene

„Gedanken ohne Inhalt sind leer,
Anschauungen ohne Begriffe sind blind“
(Kant 1787, S.75).

Die perzeptive Ebene umfasst die Ebene der gegenständlichen ‚Objekte‘, die für uns sinnlich wahrnehmbar sind. Dabei werden die Dinge der Welt nicht als

‚Dinge an sich‘, sondern als ‚Erscheinungen für uns‘ interpretiert und können auch nur so erkannt werden (vgl. Kant 1787). Diese Ansicht bringt die individuelle Ebene ins Spiel, die den menschlichen Verstand umfasst. Kants Zitat beschreibt die gegenseitige Wechselbeziehung, dass Anschauungen auf der einen Seite nur durch ‚Begriffe‘ des Verstandes gedacht werden können und so zu ‚Erscheinungen‘ werden und auf der anderen Seite diese Begriffe des Verstandes nur durch sinnliche, also empirisch erfahrbare Anschauungen hervorgerufen werden können.

„Daher ist es eben so notwendig, seine Begriffe sinnlich zu machen (d.i. ihnen den Gegenstand in der Anschauung beizufügen), als seine Anschauungen sich verständlich zu machen (d.i. sie unter Begriffe zu bringen). [...] Nur daraus, daß sie sich vereinigen, kann Erkenntniß entspringen“ (Kant 1787, S. 75f).

Dass die perzeptive Ebene erst durch den individuellen Verstand Bedeutung bekommt, hat Heidegger (1967, 1. Aufl. 1927) mit dem Begriff der ‚Zuhandenheit‘ ausgedrückt und damit ebenfalls eine andere Sicht auf die empirisch wahrnehmbaren Dinge, als ihrer bloßen Vorhandenheit, zugrunde gelegt. Die Zuhandenheit des ‚Seienden‘ (wertbehaftete Dinge der Welt) ist dabei mit seinem pragmatischen Charakter verknüpft, die das ‚Sein‘ (Verständnishorizont) mit diesem in Verbindung bringt. Er rückt dabei insbesondere die durch den Verstand mit den Dingen der Umwelt verknüpfte Handlung in den Vordergrund und spricht von einem ‚besorgenden‘ Gebrauch zwischen der hier betrachteten individuellen und perzeptiven Ebene.

„Wir nennen das im Besorgen begegnende Seiende das *Zeug*. [...] Zum Sein von *Zeug* gehört je immer ein Zeugganzes, darin es dieses *Zeug* sein kann, das es ist. *Zeug* ist wesentlich »etwas, um zu...«. Die verschiedenen Weisen des »Um-zu« wie Dienlichkeit, Beiträglichkeit, Verwendbarkeit, Handlichkeit konstituieren eine Zeugganzheit. In der Struktur »Um-zu« liegt eine *Verweisung* von etwas auf etwas“ (Heidegger 1967, S. 68, Hervorh. i. Orig.).

Die sinnlich-erfahrbaren Dinge sind untrennbar mit ihrer Funktion, ihrem „gebrauchend-hantierende[n] Umgang“ (a.a.O., S. 69) verknüpft. Ein Etwas kann vom Individuum nur als ein ‚etwas, um zu...‘ gedacht werden. Diese Zuhandenheit ergibt sich aus dem praktischen Umgang (bspw. das Hämmern mit einem Hammer). „*Zuhandenheit ist die ontologisch-kategoriale Bestimmung von Seiendem, wie es »an sich« ist*“ (Heidegger 1967, S. 71, Hervorh. i. Orig.). Dabei darf das Seiende aber nicht als zuerst Vorhandenes aufgefasst werden (bspw. der Hammer ‚an sich‘). „Die Seinsart [des; S.H.] Seienden ist die Zuhandenheit“ (Heidegger 1967, S. 71).

Aus diesen Annahmen soll für den Zusammenhang der individuellen und perzeptiven Ebene im Rahmen des eingenommenen Ansatzes der ‚Epistemologie der inferentiell gegliederten Begründungsnetze‘ festgelegt werden, dass den Begriffen des Verstandes durch ihre inbegriffene Zuhandenheit eine Priorität vor den perzeptiven Dingen zugesprochen wird. Die individuellen Begriffe lenken unsere Wahrnehmung (vgl. Hußmann et al. submitted).

Diese Sichtweise setzt dabei auf der individuellen Ebene eine Rationalität menschlichen Handelns und Denkens voraus:

„empirical things can be seen as rationally constrained by cases of its perceptually *appearing* to a subject that things are thus and so“ (McDowell 1994, xvii, Hervorh. i. Orig.).

Dabei wird davon ausgegangen, dass wir verstehen, was wir tun oder sagen. Der zentrale Bezugspunkt ist der Ansatz eines ‚semantischen Inferentialismus‘ des Sprachphilosophen Robert B. Brandom (2000a, 2000b, 2001). Als ein Schüler Wilfrid Sellars postuliert er, dass „*das Begreifen eines Begriffs im Beherrschen des Gebrauchs eines Wortes besteht*“ (Brandom 2001, S. 16, Hervorh. i. Orig.). Hierbei wird der Fokus auf einen linguistischen Pragmatismus gerichtet. Im Rahmen einer diskursiven Praxis und damit der Tätigkeit des expliziten Anwendens von Begriffen in Form von Aussagen und deren Begründungszusammenhängen wird der Gehalt eines Begriffs beschrieben. Was die Begriffe bedeuten, wird über das *Wie* des Umgehens mit ihnen erklärt.

Diese Auffassung kehrt sich vom Repräsentationalismus ab, der unter anderem von René Descartes postuliert wurde, mit der Annahme, dass der Zugang zur Wirklichkeit über mentale Bilder erfolgt, die Abbilder der Realität sein sollen. In inferentialistischer Perspektive spielen ontologische Fragen zur Passung zwischen ‚mentalenen Vorstellungen‘ und der vermeintlich objektiven Welt keine Rolle. Der Wahrheitsbegriff speist sich in dieser pragmatischen (im Vergleich zu einer repräsentationalistischen) Sicht ausschließlich aus sprachlich expliziten Äußerungen. Dabei geht es hinsichtlich des Zusammenhangs zwischen Sprache und Verstand um „ein *Expilzitmachen des Impliziten*, [...] [bei dem] etwas, was wir zunächst nur tun können, zu etwas wird, was wir sagen können“ (Brandom 2001, S. 18f Hervorh. i. Orig.).

Ebenso wie bei einer konstruktivistischen Betrachtungsweise wird im Rahmen dieser Arbeit der „Wissenserwerb als ein individueller Aufbauprozess gesehen [...] – im Unterschied etwa zu einem Abbildungsprozess“ (Steiner 2006, S. 166), bei dem das Individuum Vorwissen mit in die Lernsituation bringt und sein Wissen durch Interaktionen mit seiner materiellen, sozialen und kulturellen Umwelt entwickelt und verifiziert (vgl. Taber 2006). Allerdings erfolgt dies durch einen Prozess des Ausdrückens, des Explizitmachens mithilfe des Verwendens von Begriffen im Sinne eines ‚relationalen Expressivismus‘.

„Ein solcher *relationaler* Expressivismus wird sprachliche Performanzen und die intensionalen Zustände, die durch sie ausgedrückt werden, jeweils als wesentliche Bestandteile eines Ganzen verstehen, das nur in Begriffen ihrer Relation verständlich ist“ (Brandom 2001, S. 19, Hervorh. i. Orig.)

Dabei werden das Implizite und Explizite als untrennbar voneinander angesehen (‚relational‘). Das Verständnis des einen ist nicht ohne das Verständnis des anderen denkbar (Brandom 2001, S. 18ff).

Beim Explizieren von Begriffen wird der Fokus auf ganze Aussagen, auf **Festlegungen** gerichtet, die Begriffe miteinander verknüpfen. Bei der Festlegung

„Der Graph einer linearen Funktion ist eine Gerade“ geben die Begriffe ‚Graph‘ und ‚Gerade‘ dem Begriff ‚lineare Funktion‘ einen spezifischen Gehalt und umgekehrt.

Die Rationalität menschlichen Denkens und Handelns (neben nichtbegrifflichen Wesen) beinhaltet aus inferentialistischer Perspektive die Fähigkeit sowohl Gründe für seine Festlegungen angeben zu können, als auch zu wissen, worauf man sich durch diese im Sinne von Konsequenzen noch festgelegt hat (Brandom 2001, S. 21ff).

Der Wert dieses Ansatzes, bezogen auf den Zusammenhang von Individuum und Umwelt, liegt darin nicht zu erklären, was ein Begriff bzw. die Repräsentation des Begriffs in den Köpfen der Individuen ist (in die wir nicht hineinschauen können), sondern wie die Individuen mit den Begriffen umgehen und diese explizit anwenden (können). Im Folgenden soll geklärt werden, *welcher Art* diese Begriffe sind.

Zentrales Element ist der Begriff des **Urteils** zur Klärung des Gehalts eines Begriffs. Dabei bilden nicht die Begriffe die kleinsten Einheiten, sondern Urteile über einen Begriff (vgl. Schacht 2012, S. 19).

„Da keine Vorstellung unmittelbar auf den Gegenstand geht, als bloß die Anschauung, so wird ein Begriff niemals auf einen Gegenstand unmittelbar, sondern auf irgend eine andre Vorstellung von demselben (sie sei Anschauung oder selbst schon Begriff) bezogen. Das **Urtheil** ist [...] die mittelbare Erkenntniß eines Gegenstandes, mithin die Vorstellung einer Vorstellung desselben“ (Kant 1787, S. 93, Hervorh. S.H.).

Als Vermittler zwischen der individuellen und perzeptiven Ebene soll das Urteil gelten, durch welches sich der Begriff erst auf die empirisch wahrgenommenen Dinge beziehen kann.

„Wir können [...] alle Handlungen des Verstandes auf Urtheile zurückführen, so daß der Verstand überhaupt als ein Vermögen zu urtheilen vorgestellt werden kann. Denn er ist [...] ein Vermögen zu denken. Denken ist das Erkenntniß durch Begriffe. [...] [Ein Begriff ist; S.H.] nur dadurch Begriff, daß unter ihm andere Vorstellungen enthalten sind, vermittelt deren er sich auf Gegenstände beziehen kann“ (Kant 1787, S. 94).

Der zitierte, philosophisch verstandene Begriff des Urteils wird in dieser Arbeit für einen psychologischen Fokus auf und damit für empirische Erkenntnisse über individuelle Begriffe genutzt. Ein visuell wahrnehmbarer, gezeichneter Graph einer ‚Geraden‘ in einem Koordinatensystem kann nur als solcher erkannt werden, wenn der Begriff der Geraden in Form eines Urteils beim Individuum vorhanden ist, bspw. ‚Eine Gerade hat eine konstante Steigung‘. Andernfalls zeigt dieser womöglich nur eine ‚Linie‘. Eine konventionale Bedeutung des Begriffs ‚Gerade‘ wird durch die soziale Ebene bestimmt (vgl. Kap. 1.1.2).

Eine weitere Begründung für die Priorisierung des Urteils als kleinste Einheit neben dem Begriff liegt darin, „weil es das erste Element innerhalb der traditionellen logischen Hierarchie ist, für das man *Verantwortung* übernehmen kann“ (Brandom 2001, S. 25, Hervorh. i. Orig.). Das Übernehmen von Verant-

wortung für ein Urteil wird in der Hinsicht verstanden, dass man dieses auf der einen Seite explizit mit anderen Urteilen begründen kann und auf der anderen Seite ebenfalls die Konsequenzen seiner Urteile als wahr anerkennt (Hußmann et al. submitted). Eine Begründung des Urteils ‚Eine Gerade hat eine konstante Steigung‘ könnte bspw. das Urteil ‚Bei jedem Schritt bei der ersten Größe (als feste Länge Eins) verändert sich die zweite Größe um einen konstanten Wert‘ liefern. Eine direkte Konsequenz dieses Urteils ist, dass eine Gerade keine variierende Steigung hat.

Der Gehalt eines Begriffs klärt sich in dieser psychologisch ausgerichteten ‚Epistemologie der inferentiell gegliederten Begründungsnetze‘ (Hußmann et al. submitted) über die Gesamtheit der Urteile, die diesem Begriff in einer ‚Urteilkette‘ bzw. einem ‚Urteilsnetz‘ zugeschrieben werden und die diesen Begriff beinhalten. Begriffe übernehmen dabei die Rolle von ‚Prädikaten‘ in Urteilen.

„Begriffe [lassen sich; S.H.] nur als Abstraktionen verstehen anhand der Rolle, die sie beim Urteilen spielen. Ein Begriff ist nichts anderes als ein Prädikat eines möglichen Urteils“ (Brandom 2001, S. 208f).

Dabei können die vollständigen Gehalte individueller Begriffe nicht in einzelnen Aussagen beschrieben werden. Sie tauchen in den Festlegungen neben anderen Begriffen mit der Rolle von Prädikaten auf (vgl. Hußmann & Schacht 2015, S. 109). Bei der Aussage ‚Der Graph einer linearen Funktion ist eine Gerade‘ bekommen die Begriffe ‚Graph‘, ‚lineare Funktion‘ und ‚Gerade‘ untereinander eine Bedeutung, da sie miteinander verknüpft werden. Durch weitere Urteile, die in inferentieller Gliederung zueinander stehen, wie ‚Eine Gerade hat eine konstante Steigung‘, erhält hier der Begriff der ‚Geraden‘ als Prädikat (als Satzbaustein), das mit anderen Bestandteilen der Aussage verknüpft wird, eine zusätzliche Bedeutung zum ersten Urteil. Die Gesamtheit individueller Urteilsnetze gibt den individuellen Begriffen Struktur. Individuelle Begriffe werden umgekehrt als Prädikate in Urteilen interpretiert, die inferentiell in Netzen aus Prämissen und Konklusionen verwoben sind.

Im Folgenden soll geklärt werden, inwiefern sich individuelle Urteile und Urteilsnetze, die bestimmten Begriffen ihren Gehalt geben, in Bezug zur perceptiven Ebene *entwickeln* (ihr Bezug zur sozialen und konventionalen Ebene wird in Kap. 1.1.2 konkretisiert).

Entscheidend ist dabei das stetige Bestreben des Individuums eine Kohärenz zwischen der Struktur der individuellen Urteilsnetze herzustellen und diese aufrecht zu erhalten. Mögliche Friktionen als Unstimmigkeiten oder Widersprüche zwischen individuellen Urteilen bzw. Urteilsnetzen können in der Auseinandersetzung mit empirisch wahrnehmbaren ‚Objekten‘ auftreten (vgl. Hußmann et al. submitted). Betrachtet man bspw. visuell einen konstant fallenden Graphen in einem Koordinatensystem, der das Urteil hervorruft ‚Die voneinander abhängigen Größen verändern sich je mehr-desto weniger‘ und dieses steht

in inferentieller Verknüpfung zu dem Urteil ‚Das ist eine antiproportionale Funktion‘, so könnte sich ein Widerspruch zu den Urteilen ‚Das ist eine Gerade‘ und ‚Der Graph einer linearen Funktion ist eine Gerade‘ ergeben.

Neben der perceptiven ist es aber ebenso die soziale Ebene, die einen besonderen Einfluss auf die individuellen Urteile, deren Urteilsnetze und damit den Gehalt individueller Begriffe nimmt. Im Folgenden soll daher die Korrespondenz der individuellen und sozialen Ebene vor dem Hintergrund der philosophischen Idee der ‚Sprachspiele‘ diskutiert werden.

1.1.2 Individuelle vs. soziale Ebene

„Ob eine Äußerung der Bestätigung einer Behauptung gleichkommt, und dementsprechend einer Begriffsanwendung, hängt davon ab, welchen Status ihr die anderen Mitglieder der Sprachgemeinschaft zuweisen“
(Brandom 2000b, S. 609).

Die soziale Ebene beschreibt den Fokus auf die sozialen Interaktionen. Dabei wird der Blick zur Klärung des Gehalts von Begriffen auf Äußerungen als Bewegungen in sozialen Diskursen gelegt. Beim Menschen (im Vergleich zum Tier) fußen Reaktionen in derartigen Diskursen auf einem begrifflichen Verständnis im Vergleich zu einfachen Reiz-Reaktionen. „Was dem Papagei fehlt, ist das begriffliche Verständnis seiner Reaktion. [...] Für den Papagei hat seine Reaktion keine Bedeutung“ (Brandom 2000b, S. 601). Der Begriff des ‚Sprachspiels‘ impliziert

„eine Reaktion, die verlässlich und differenziert durch das sichtbare Vorhandensein eines wahrnehmbaren Sachverhalts ausgelöst wurde, [die; S.H.] dann als etwas gelten kann, das im eigentlichen Sinne als ein Bericht (oder das Zustandekommen einer Überzeugung, *dass* so-und-so der Fall ist) zu charakterisieren ist, wenn sie einen bestimmten Spielzug oder das Einnehmen einer bestimmten Spielposition darstellt – und zwar in einem Spiel, das darin besteht, *Gründe* anzugeben und zu erfragen. Die Reaktion muss eine Verpflichtung auf einen Inhalt darstellen, der sowohl als Grund dienen oder auch eine Begründung erfordern kann, d.h. einen Inhalt, der die Rolle von Annahmen oder Schlüssen in *Folgerungen* spielen kann. Die Reaktion des Beobachters hat einen begrifflichen Inhalt nur insofern, als sie einen Knoten im Netz der inferenziellen Beziehungen einnimmt“ (Brandom 2000b, S. 601, Hervorh. i. Orig.).

Das Sprachspiel beschreibt die Fähigkeit der Artikulierbarkeit und gleichsam Begründbarkeit von individuellen Begriffen in Konfrontation mit der perceptiven und sozialen Ebene.

Damit stellt der Zusammenhang zur sozialen Umwelt und damit der Rechtfertigung individueller Urteile durch das Individuum einen weiteren, entscheidenden Faktor für den Abgleich und die Anpassung der eigenen Urteilsnetze dar. „Die subjektiven Theorien müssen innerhalb der sozialen Realität viabel sein. [...] Subjektive Theorien werden durch die gemeinsame Aushandlung zu kollektiven und anerkannten Theorien“ (Hußmann 2002, S. 6f). Das zentrale Medium ist dabei die Sprache.

Brandoms leitende Idee bezogen auf das Sprachspiel folgt der Auffassung, dass die diskursive Praxis inferentiell gegliedert ist: „Über Begriffe zu reden heißt, über Rollen in Begründungszusammenhängen zu reden“ (Brandom 2000a, S. 22). Der soziale Diskurs mit anderen erfordert das Verlangen und das Geben (können) von Gründen. Jede eingegangene Festlegung, als explizites Urteil, impliziert eine Berechtigung und zwar in der Form, dass man gute Gründe für die eingegangene Festlegung hat (vgl. Brandom 2001, S. 64).

Die individuelle Wahrheit von Begriffen (als ein individuelles Fürwahrhalten eines Urteilsnetzes zu einem Begriff) wird neben der Auseinandersetzung mit empirisch wahrnehmbaren ‚Objekten‘ (Kap. 1.1.1) ebenfalls im sozialen Sprachspiel in Konfrontation mit der sozialen Umwelt ausgehandelt. Dabei können getroffene Aussagen sowohl als Prämisse als auch als Konklusion in **inferentiellen Relationen** dienen, um die in ihnen formulierten Auffassungen propositional gehaltvoll zum Ausdruck zu bringen. Dieser propositionale Gehalt impliziert die Eigenschaft der Behauptbarkeit (vgl. Brandom 2000a, S. 240). Die behauptbare Aussage ‚Der Graph einer linearen Funktion ist eine Gerade‘ (Konklusion) kann bspw. dem behauptbaren Grund ‚Bei einer linearen Funktion ist die Steigung konstant‘ (Prämisse) unterliegen. Die inferentielle Relation wird dabei als Verknüpfung beider Festlegungen verstanden.

Das Sprachspiel beinhaltet jedoch nicht nur die Sprache an sich. Das ‚Spiel‘ ergibt sich maßgeblich durch gesellschaftliche Rahmenbedingungen, die gewisse Spielregeln mit sich bringen (vgl. Schindler 2014, S. 23f, in Anl. an Wittgenstein 1967) und die hervorgerufenen Gründe und Konsequenzen bedingen. Damit haben sie einen wichtigen Einfluss auf das Hervorrufen bestimmter, individueller Urteile. So ist es bspw. denkbar, dass im Klassengespräch des Mathematikunterrichts bei dem gezeichneten Graphen an der Tafel beim Lernenden das Urteil ‚Das ist eine Gerade‘ hervorgerufen wird, da im Rahmen dieses sozialen Umfelds von ‚Geraden‘ gesprochen wird. Dieses muss aber auf individueller Ebene nicht zwangsläufig in inferentieller Relation zu dem Urteil ‚Eine Gerade hat eine konstante Steigung‘ stehen, sondern kann bspw. die Begründung ‚Eine Gerade ist eine Linie‘ implizieren, da der mathematische Begriff einer ‚Geraden‘ beim Individuum womöglich nur als Bezeichner vorhanden ist.

„Lernen wird [dabei; S.H.] als das zunehmende Beherrschen tragfähiger inferentieller Relationen zwischen Festlegungen aufgefasst“ (Schacht 2012, S. 337).

Für eine Beurteilung der konventionalen Richtigkeit inferentieller Relationen werden begriffliche Gehalte aber nicht nur über explizit sprachlich verknüpfte, inferentielle Relationen geudeutet:

„Jene Inferenzen, deren Korrektheiten die begrifflichen Gehalte ihrer Prämissen und Konklusionen bestimmen, lassen sich [...] als *materiale* Inferenzen bezeichnen“ (Brandom 2001, S. 76, Hervorh. i. Orig.).

Die konventionale Korrektheit einer inferentiellen Relation zwischen bspw. den Festlegungen ‚Eine lineare Funktion mit positivem, festen Faktor steigt‘ und ‚Eine lineare Funktion mit negativem, festen Faktor sinkt‘ ergibt sich aus den Gehalten der Begriffe ‚positiv‘ und ‚negativ‘ und ‚steigt‘ und ‚sinkt‘. Dabei übernehmen die begrifflichen Gehalte selbst inferentielle Rollen (vgl. Brandom 2001, S. 80).

1.1.3 Situierete Ebene

„Mathematik-Lernen [...] ist nur aus der jeweiligen konkreten Anordnung von sachlich/sozialen Lebensumständen in seiner Entstehung und seinem Verlauf zu verstehen. Um dies kurz auf den Begriff zu bringen, sprechen wir hier von situiertem Lernen“ (Lave 1993, S. 14).

Die situierte Ebene legt einen verbindenden Fokus auf die individuelle, perzeptive und soziale Ebene. Bei der Theorie des Situierten Lernens tritt der Fokus auf eine ‚community of practice‘ in den Vordergrund. Dabei verkörpert das Individuum zweierlei, ein „member of a community and agent of activity“ (Lave & Wenger 1991, S. 122).

„Trotz aller Unterschiede stimmen die Ansätze der situierten Kognition darin überein, daß Lernen stets situiert ist, daß Wissen durch das wahrnehmende Subjekt konstruiert, gleichzeitig aber auch in einer Gesellschaft ‚geteilt‘ wird (*shared cognition*) und daß Denken und Handeln nur im Kontext verstanden werden kann“ (Reinmann-Rothmeier & Mandl 1997, S. 368, Hervorh. i. Orig.).

Der Kontextbegriff umfasst in der Perspektive des situierten Lernens ganze ‚Aktivitätssysteme‘, die sowohl das Individuum, die soziale Gruppe, als auch die Lernumgebungen mit ihren materiellen Gegebenheiten fokussiert (vgl. Gersztenmaier & Mandl 2001).

Die Entwicklung individueller Begriffe ergibt sich unter diesen Annahmen aus der Auseinandersetzung mit der perzeptiven und sozialen Umwelt und umgekehrt. Dabei wird in dieser Arbeit davon ausgegangen, dass die Annahme der Situietheit den Ausgangspunkt bei der Entwicklung von Begriffen und damit von Urteilen und ihren Vernetzungen darstellt: „Situations might be said to coproduce knowledge through activity“ (Brown, Collins & Duguid 1989, S. 32). Durch das Handeln in Situationen entwickeln sich die individuellen, inferentiellen Netze. Diese sind jedoch nicht auf bestimmte Situationen beschränkt, sondern können eine Gültigkeit für Klassen von Situationen besitzen (vgl. Kap. 1.1.4 und 1.2.3)

1.1.4 Grundfunktionen von Begriffen

Eckes (1996) schreibt Begriffen aus einer psychologischen Perspektive die drei Grundfunktionen ‚Kategorisierung‘, ‚Inferenz‘ und ‚Kommunikation‘ zu (vgl. S. 274), die sich gut mit den bisherigen theoretischen Festlegungen verknüpfen lassen:

Begriffe kategorisieren das Wissen. Der Zweck dieser Kategorien ist es, vorhandenes Wissen überhaupt mit neuen Erfahrungen verknüpfen bzw. auf neue Erfahrungen anzuwenden zu können.

„Kategorisierung [...] dient dem Zugriff auf Wissen, das mit dem angesprochenen Begriff assoziiert ist. Dieses Wissen kann dann für unterschiedliche *Inferenzen* [...] genutzt werden. Hierzu zählen Schlüsse auf nicht direkt beobachtbare Merkmale, Erklärungen beobachteter Verhaltensweisen oder Zustände, Vorhersagen künftiger Verhaltensweisen bzw. Zustandsänderungen oder auch Verallgemeinerungen [...]. Kategorisieren heißt also, über Wissen zu verfügen, insbesondere heißt es, über *mehr* Wissen zu verfügen, als mit der unmittelbaren Beobachtung gegeben ist. Aus pragmatischer Sicht ist das Inferenzpotential eines Begriffs eng mit seiner Nützlichkeit verknüpft: Ein Begriff ist um so nützlicher, je mehr Inferenzen, Erklärungen oder Vorhersagen die Kenntnis der Begriffszugehörigkeit einer Entität erlaubt“ (Eckes 1996, S. 275, Hervorh. i. Orig.).

Dieses *mehr* Wissen resultiert in der eingenommenen inferentialistischen Perspektive aus dem individuellen Urteilsnetz zu dem hervorgerufenen, spezifischen Begriff.

Diese Arbeit nutzt den Begriff der **Fokussierung** (vgl. Schindler 2014), um den Zugriff auf Situationen zu kategorisieren. Der Begriff der **Situation** könnte breit gefasst (im Sinne der Situietheit) als Wahrnehmung durch die handelnde Person beschrieben werden und würde damit alle beschriebenen Ebenen implizieren. Als tatsächlich fassbare Analyseeinheit für den empirischen Teil dieser Arbeit und im Zuge des Interesses an individuellen mathematischen Begriffen bezogen auf situative Aufgaben erscheint es sinnvoll den Situationsbegriff auf die perzeptive Ebene, speziell die gestellte Aufgabe auf Basis der situativen Darstellung, die mathematische Elemente enthält, zu reduzieren (vgl. Schindler 2014, S. 56, Richter 2014, S. 25f). Der Begriff der Fokussierung in Anlehnung und als Erweiterung des Begriffs der ‚concepts-in-action‘ Gérard Vergnauds (1988, 1996, 1998) entspringt der Annahme, dass durch bestimmte Aspekte, die durch unser vorhandenes Vorwissen gelenkt sind, eine individuell relevante Auswahl an Informationen der konkreten Situation entsteht und damit ein individuell-verfügbares Urteilsnetz hervorgerufen wird, auf dessen Basis Situationen konzeptualisiert werden (vgl. Kap. 1.2.3). Dies impliziert die theoretische Festlegung, dass dem individuellen Verfügungen über Begriffe Priorität über die empirisch wahrnehmbaren Dinge zugesprochen wird (vgl. Kap. 1.1.1). Die Fokussierungen haben in der konkreten Situation für das Individuum Relevanz, um Informationen zu identifizieren und auszuwählen (vgl. Vergnaud 1998, S. 168ff).

„Für ein solches Fokussieren kann all jenes dienen, was [man; S.H.] [...] als Kategorie nutzen kann, um in einer Situation einen Fokus auf bestimmte Aspekte zu setzen“ (Schindler 2014, S. 57).

Vergnaud beschreibt concepts-in-action durch konventionale Kategorien. Fokussierungen unterliegt ein breiteres Verständnis hinsichtlich der zusätzlichen Berücksichtigung (womöglich anderer) individuell relevanter Kategorien.

In tatsächlicher Reihenfolge fokussiert das Individuum relevante Kategorien, die Urteile aus einem spezifischen Urteilsnetz hervorrufen. Aus empirischer

(Forscher-)Perspektive ermöglichen die sprachlich-expliziten Festlegungen Rückschlüsse auf aktivierte Fokussierungen und damit genutzte Kategorien zur Erschließung der Situation. Aus der Festlegung ‚Die voneinander abhängigen Größen verändern sich je mehr-desto weniger‘ lassen sich bspw. die individuell-relevanten Fokussierungen ‚Abhängige Größen‘ und ‚Mehr-weniger-Zusammenhang‘ (‚Monotonie‘) rekonstruieren, die als Kategorien genutzt werden, um sich die vorliegende, mathematische Aufgabe neben anderen Fokussierungen, die ebenfalls maßgeblich sein können, zu erschließen.

Die Grundfunktion der ‚Kommunikation‘ (vgl. Eckes 1996) von Begriffen schafft schließlich die Verbindung zur sozialen Ebene, indem das bewusste Verfügen über Begriffe, als das Verfügen über ein spezifisches Urteilsnetz, das sprachliche Interagieren in einem sozialen Umfeld erst ermöglicht. Die aktivierten, individuellen Fokussierungen beziehen sich dann nicht nur auf die empirisch wahrgenommenen Angebote, wie oben beispielhaft beschrieben, sondern auch auf das Tun und Sagen der am Diskurs beteiligten Personen.

Zum Erklären des möglichen Entstehens von Friktionen im Umgang mit der perceptiven und sozialen Ebene ist es sinnvoll eine Differenzierung zwischen ‚individuellen‘, ‚sozial-geteilten‘ und ‚konventionalen Urteilen‘ vorzunehmen.

„Die konventionelle Bedeutung meint die Bedeutung, die Personen einer Sprachgemeinschaft miteinander teilen. [...] Man kann sie auch als die Überschneidungsmenge habituellen Bedeutungswissens der zu einer Kultur gehörenden Personen bezeichnen. [...] In den konventionellen Bedeutungen einer Sprache steckt das Wissen und Fühlen einer Kultur und Gesellschaft“ (Seiler 2008, S.70).

Dabei ist die konventionale Bedeutung eines Begriffs nicht mit einer hier nicht betrachteten, vermeintlich objektiven zu verwechseln. Diese Trennung impliziert aber ebenfalls, dass sozial-geteilte Urteile in spezifischen Gruppen (bspw. Lerngruppen) ebenfalls nicht den konventionalen Urteilen einer Gesellschaft entsprechen müssen.

Diese Differenzierung ermöglicht ein sichtbar machen von Friktionen zwischen der perceptiven und individuellen Ebene und zwischen unvereinbaren, individuellen, sozial-geteilten und konventionalen Urteilen bzw. Urteilsnetzen zu spezifischen Begriffen (vgl. Hußmann et al. submitted). Derartige, mögliche Widersprüche zwischen Urteilen werden durch einen vernetzten Blick auf alle Ebenen deutlich. Verschiedene Szenarien können nun erklären, warum Friktionen aus konventionaler Sicht für das Individuum keine Widersprüche erzeugen oder sogar in der Regel nicht erzeugt werden. Individuelle Urteile können womöglich auf unterschiedlich inferentiell gegliederten Urteilsketten bzw. -netzen liegen, die nicht miteinander verknüpft sind. Weiter ist denkbar, dass sie für unterschiedliche Situationen zu Rate gezogen werden oder sie nur in unterschiedlichen sozialen Diskursen (beeinflusst durch Rahmenbedingungen) für das Individuum relevant sind.

1.2 Situationen und mathematische Begriffe

Der spezifische mathematikdidaktische Fokus dieser Arbeit macht die Klärung der Position *mathematischer* Begriffe im Rahmen der inferentialistischen Perspektive notwendig (Kap. 1.2.1). Darüber hinaus sollen die mathematischen Begriffe neben ihrem Gebrauch in konkreten Situationen mithilfe der obigen Beschreibungssprache auch in ihrer Anwendung über verschiedene Situationen hinweg und hinsichtlich des Konzepts situationsübergreifender Fokussierungen und Urteile analysiert werden. Dazu werden empirische Vorgehensweisen ausgewählter mathematikdidaktischer Konzepte zum situativen (Kap. 1.2.2) und situationsübergreifenden (Kap. 1.2.3) Gebrauch von Begriffen beschrieben und mit der gewählten Beschreibungssprache sowohl verbunden als auch durch diese erweitert.

1.2.1 Mathematische Darstellungen vs. Begriffe

Ausgehend von der Rationalität menschlichen Denkens und Handelns und der Annahme, dass die perzeptive Ebene, die Ebene der empirisch wahrnehmbaren ‚Objekte‘ als ‚Erscheinungen‘, erst durch die individuellen Begriffe und die Idee der ‚Zuhandenheit‘ auf der individuellen Ebene Bedeutungen bekommen (vgl. Kap. 1.1.1), erhalten die mathematischen, empirisch wahrnehmbaren ‚Objekte‘ ebenso ihre Gehalte erst durch die individuellen, mathematischen Begriffe. Die potentiell wahrnehmbaren ‚mathematischen Objekte‘, die für diese Arbeit relevant sind, werden als **Darstellungen** interpretiert. Die Darstellung bspw. einer linearen Funktion in einer Tabelle (als formale Darstellung) kann das Individuum nur dann wahrnehmen, wenn das inferentielle Netz seines hervorgerufenen Begriffs einen Zugang zur linearen Funktion in einer Tabelle ermöglicht.

Im Zuge der hier eingenommenen Perspektive wird der Fokus auf eine Differenzierung (aber untrennbare Korrespondenz) zwischen empirisch wahrnehmbaren ‚Objekten‘ der perzeptiven Ebene und inferentiell gegliederten Begriffen der individuellen Ebene gelegt, nicht aber, wie bspw. in folgenden Auszügen, mathematische Begriffe von Begriffen anderer Disziplinen unterschieden:

„Der für eine wissenschaftliche Mathematikdidaktik wesentliche Aspekt in der Natur des mathematischen Wissens besteht darin, daß mathematische Begriffe sich nicht direkt auf Dinge der Welt beziehen, sondern auf *Beziehungen zwischen Dingen*. [...] Dies bedeutet insbesondere, daß die mathematischen Begriffe, wie Zahlen, Funktionen, Vektoren, – die ja keine Dinge im herkömmlichen Sinne sind, sondern Beziehungen verkörpern – in der Wahrnehmung oder auch in einer anderen intuitiven Erfahrung nicht direkt zugänglich sind – wie zum Beispiel reale oder physische Gegenstände –, sondern durch Zeichen bzw. Symbole repräsentiert werden müssen (Steinbring 1998, S. 162, Hervorh. i. Orig.).“

„there is an important gap between mathematical knowledge and knowledge in other sciences [...]. We do not have any perceptive or instrumental access to mathematical objects [hier verstanden als

mathematische Begriffe; S.H.] [...]. The only way of gaining access to them is using signs, words or symbols, expressions or drawings" (Duval 2000, S. 61).

Ein einzelnes, sinnlich wahrnehmbares ‚Objekt‘ (bspw. ein Stift) entspricht ebenfalls nicht seinem Begriff, denn ein Begriff ist „nur dadurch Begriff, daß unter ihm andere Vorstellungen enthalten sind, vermittelt derer er sich auf Gegenstände beziehen kann“ (Kant 1787, S. 94). Das einzelne, konkrete Objekt ist auch nur eine spezifische Darstellung des Begriffs, die man empirisch wahrnehmen kann. So wie sich bspw. die Tabelle, der Graph oder die Funktionsgleichung zum Begriff der Funktion verhält, so verhalten sich einzelne konkrete ‚Objekte‘ (bspw. verschieden farbige oder unterschiedlich geformte Stifte) zu ihrem zugehörigen Begriff. Unter der Idee der Zuhandenheit ist es erst die gemeinsame Funktion, das ‚um zu...‘ (vgl. Heidegger 1967) verschiedener Objekte, die den Begriff in Form inferentieller Beziehungen schärft (bspw. um zu schreiben, um zu malen, usw.). Dies ist keine Besonderheit mathematischer Begriffe, sondern von Begriffen überhaupt.

„Für Kant verhalten sich Begriffe zu Anschauungen [...] wie das *Allgemeine zum Besonderen*. [...] Begriffe seien etwas *Allgemeines*, das am besten mit *Prädikaten* ausgedrückt werden könne. Den Gegensatz bildet das nichtbegriffliche *Besondere*, wie es durch die Verwendung singulärer Termini [...] ausgedrückt wird. Der Gedanke lautet hier [bei Brandom; S.H.], daß Prädikate Dinge *klassifizieren*, etwas über sie *sagen*, statt sie einfach nur herauszugreifen. Das ist die Fortsetzung von Kants Gedanken, daß die Anschauungen das Besondere repräsentieren. [...] Ein wichtiges Beispiel ist Frege, für den Begriffe Funktionen von (Sequenzen von) singulären Termini auf Wahrheitswerte sind. Sie sind für ihn also wesentlich Dinge, die *auf* die von singulären Termini herausgegriffenen Gegenstände *zutreffen* können, im Kontrast zu jenen *Gegenständen*, auf die Begriffe *zutreffen* können“ (Brandom 2000a, S. 853f, Hervorh. i. Orig.).

Die Grundfunktion der Kategorisierung von Begriffen (vgl. Kap. 1.1.4) beschreibt hier also, dass die konkreten Darstellungen (bspw. verschiedene Stifte) unter dem Begriff (bspw. ‚Stift‘) eingestuft werden können und ein konkret wahrgenommenes Objekt als solches mit dem Begriff benannt werden kann. Mit dieser Kategorisierung ist aber ein ‚mehr Wissen‘ über die konkrete Beobachtung hinaus verbunden, das die Idee der Grundfunktion der Inferenz impliziert (vgl. Kap. 1.1.4). Je mehr Inferenzen das Netz des Begriffs aufspannen, desto nützlicher ist dieser in seinem Gebrauch (es bedarf mehr Inferenzen, um einen Stift von einem Pinsel zu unterscheiden, mit dem man ebenfalls schreiben und malen kann; bspw. die Prämisse Farbe zunächst aufzutragen, um malen zu können).

Es soll also nicht zwischen mathematischen Begriffen und Begriffen anderer Disziplinen differenziert werden, sondern zwischen allgemeinen ‚Objekten‘ als Begriffe und empirisch wahrnehmbaren, konkreten ‚Objekten‘ als Darstellungen. Der Darstellungsbegriff bezieht sich damit auf die rein perzeptive Wahrnehmung, die den Eingang in das „Reich der diskursiven Festlegungen und Berechtigungen – die Quellen der empirischen [...] Dimension begrifflichen

Gehalts“ (Brandom 2000a, S. 221) beschreibt. Kant geht dabei davon aus, dass Sinnlichkeit und Verstand zwei Stämme menschlicher Erkenntnis sind.

„Vermittelst der Sinnlichkeit [...] werden uns Gegenstände gegeben, und sie allein liefert uns Anschauungen; durch den Verstand aber werden sie gedacht und von ihm entspringen Begriffe“ (Kant 1787, S. 33).

In Erweiterung der dadurch beschriebenen Korrespondenz der perzeptiven und individuellen Ebene (vgl. Kap. 1.1.1), die beide sog. Erkenntnisse *a posteriori* darstellen, also empirisch durch Erfahrung hervorgerufen sind, sind diejenigen gegenübergestellt, die *a priori* sind, also rein, d.h. unabhängig von jeglicher Erfahrung stattfinden (vgl. Kant 1787, S. 34f).

„Raum“ und „Zeit“ postuliert er als die reinen Formen sinnlicher Anschauung, da sie als einzige den Bedingungen für eine Erkenntnis *a priori*, Notwendigkeit und Allgemeinheit, unterliegen. Raum und Zeit sind notwendige Bedingungen für Gegenstände der Anschauung, selber aber von nichts abhängig, da sie unendliche Größen darstellen, bei denen verschiedene, konkret bemaßte Räume und Zeiten nur Teile ihrer selbst sind. Sie können nicht aufgehoben werden. Man kann sich vorstellen, dass in Raum und Zeit keine Gegenstände sind, nicht aber umgekehrt. Raum und Zeit sind objektiv (nicht nur empirisch) allgemein, da keine Ausnahme neben oder zu ihnen existiert (vgl. Kant 1787, S. 37ff).

Der ontologischen Frage der Wirklichkeit nachgehend schreibt er ihnen trotz ihrer Notwendigkeit und Allgemeinheit keine „objektive Realität“, sondern eine „empirische Realität“ zu. Sie sind *subjektive* Bedingungen, nur für und durch das Individuum real und außerhalb von ihm nichts (vgl. Kant 1787, S. 51ff).

„Zeit und Raum sind demnach zwei Erkenntnisquellen, aus denen *a priori* verschiedene synthetische Erkenntnisse geschöpft werden können [...]. Aber diese Erkenntnisquellen *a priori* bestimmen sich eben dadurch (daß sie bloß Bedingungen der Sinnlichkeit sind) ihre Grenzen, nämlich, daß sie bloß auf Gegenstände gehen, sofern sie als Erscheinungen betrachtet werden, nicht aber Dinge an sich darstellen“ (Kant 1787, S. 55f).

Die Quellen der Sinnlichkeit bilden in dieser Arbeit die dargebotenen Situationen (als situative Darstellungen), mit denen die Lernenden konfrontiert werden. Das empirische Fassen individueller mathematischer Begriffe, die in den Situationen sowohl durch das sinnliche als auch das verstandesfähige Erfassen hervorgerufen werden, geschieht in der sprachanalytischen Erweiterung Brandoms und der hier psychologisch-ausgerichteten Perspektive über das Rekonstruieren individueller Urteilsnetze über Fokussierungen, Festlegungen und inferentiellen Relationen zu den jeweils hervorgerufenen Begriffen. Hinsichtlich der Annahme einer vermeintlich objektiven Realität wird Kants beschriebener Ansicht gefolgt:

„Was es für eine Bewandnis mit den Gegenständen an sich und abgesondert von aller dieser Receptivität unserer Sinnlichkeit haben möge, bleibt uns gänzlich unbekannt. Wir kennen nichts, als unsere Art, sie wahrzunehmen, die uns eigenthümlich ist“ (Kant 1787, S. 59).

Aus diesem Grund und wegen der ontologisch kritischen Bezeichnung mathematischer *Objekte* werden solche als ‚konkrete‘ Anschauungen der Sinnlichkeit interpretiert und im Folgenden mit dem Begriff der **Darstellungen** betitelt.

„Die Fähigkeit, [...] Darstellungen durch die Art, wie wir von Gegenständen afficirt werden, zu bekommen, heißt Sinnlichkeit“ (Kant 1787, S. 33)

Mathematische *Begriffe* entstammen hingegen als ‚allgemeine‘ Objekte dem Verstand und unterliegen einer inferentiellen Gliederung aus Fokussierungen und Urteilen.

Obleich *mathematische* Begriffe in ihrer Rolle nicht von *anderen* Begriffen unterschieden werden sollen, so werden dennoch im Folgenden mathematikdidaktische Konzepte zum situativen und situationsübergreifenden Gebrauch mathematischer Begriffe fokussiert, um einen spezifischen Einblick in das empirische Erfassen derartiger ‚Übersetzungen‘ hinsichtlich der hier betrachteten Begriffe (der linearen, proportionalen und antiproportionalen Funktionen) zu erhalten und diese Vorgehensweisen im Rahmen der eingenommenen Sprache aus einer inferentialistischen und psychologisch-orientierten Perspektive zu nutzen.

1.2.2 Situativer Gebrauch mathematischer Begriffe

Besonders relevant für den empirischen Teil dieser Arbeit sind das individuelle Fokussieren und Festlegen (bzw. Urteilen) in der Vermittlung zwischen der individuellen **Situation** (im Rahmen der selbst gestellten Aufgabe, vgl. Kap. 1.1.4) und den hervorgerufenen **mathematischen Begriffen** auf Basis ihrer **situativen und formalen Darstellungen**.

Das Mathematisieren außermathematischer Situationen wird in der mathematikdidaktischen Literatur prominent mit dem Begriff des ‚Modellierens‘ benannt. Dabei werden differenzierte Ansätze mit unterschiedlichen Zielen verfolgt. Dies zeigt sich bspw. durch die Verwendung verschiedener Fassungen von Modellierungskreisläufen, die zur theoretischen Strukturierung von Modellierungsprozessen genutzt werden (vgl. Borromeo Ferri 2006, 2011, Borromeo Ferri et al. 2013).

„Dabei ist *Modellieren* heute die übliche Bezeichnung für den gesamten Kreislaufprozess. [...] *Mathematisieren* ist [...] die übliche Bezeichnung für den Schritt, der mit der Schaffung des mathematischen Modells endet“ (Borromeo Ferri et al. 2013, S. 16).

Unter einer forschenden Perspektive (neben bspw. einer pragmatischen für den Unterricht) werden in dieser Arbeit zugehörige Elemente „*diagnostisch* zum Erfassen von generellen Hürden und individuellen Teilkompetenzen“ (Prediger 2010, S. 7, Hervorh. i. Orig.) gebraucht.

Für mein Erkenntnisinteresse sind insbesondere diejenigen Varianten interessant, die das ‚Situationsmodell‘ als eigenen Teilbereich betrachten. Entstan-